



שיעור אותיות ומספרים

מבוא

שאלות מסוג אותיות ומספרים מגוונות ביותר בצורתן ודורשות בדרך כלל ידע אלגברי. בחלק מן השאלות נתון חיבור או חיסור ארוך ולעיתים גם שאלות של כפל ארוך בהן נצטרך לזהות ספרות מסויימות מתוך התרגיל הנתון באותיות. חלק גדול מהשאלות נפתר על ידי הצבת מספרים. מעבר לידע האלגברי, בחלק מן השאלות נדרשת גם מעט אינטואיציה על מנת להחליט איזה מהכיוונים לבדוק.
*במהלך השיעור יופיעו תרגילים. פתרונות מלאים לתרגילים אלה מופיעים בסוף השיעור.

הגדרות

ספרה מייצגת מספר שלם בין 0 ל-9.

מספר מורכב מספרה אחת או יותר, ויכול להיות חיובי, שלילי או שווה ל-0.
מספר המורכב משתי ספרות נקרא **מספר דו ספרתי**, לדוגמא: 63
מספר המורכב משלוש ספרות נקרא **מספר תלת ספרתי**, לדוגמא: 423
מספר המורכב מארבע ספרות נקרא **מספר ארבע ספרתי**, לדוגמא: 6,039
וכך הלאה.

הספרה הימנית במספר שלם מייצגת את **ספרת האחדות**.
הספרה הנמצאת במקום השני מימין במספר שלם מייצגת את **ספרת העשרות**.
הספרה הנמצאת במקום השלישי מימין במספר שלם מייצגת את **ספרת המאות**.
הספרה הנמצאת במקום הרביעי מימין במספר שלם מייצגת את **ספרת האלפים**.
לדוגמא: במספר 6,039, ספרת האחדות היא 9, ספרות העשרות היא 3, ספרת המאות היא 0 וספרת האלפים היא 6.

כלל: הספרה השמאלית בכל מספר שלם לעולם לא תהיה 0.



סכום הספרות

סכום הספרות של מספר הוא תוצאת פעולת החיבור של כל הספרות שמרכיבות את המספר זו עם זו. לדוגמא: סכום הספרות של המספר 4,621 הוא $4 + 6 + 2 + 1 = 13$.

תרגול הגדרות (פתרונות נמצאים בסוף השיעור)

1. ספרת האחדות במספר 3 היא: _____
2. ספרת המאות במספר 790 היא: _____
3. ספרת האלפים במספר 94,002 היא: _____
4. ספרת האחדות במספר 7,800 היא: _____
5. ספרת העשרות במספר 23 היא: _____
6. סכום הספרות במספר 8,230 הוא: _____
7. סכום הספרות במספר 555 הוא: _____

הקף בעיגול את התשובה הנכונה:

8. המספר 407 הוא מספר *דו* / *תלת* / *ארבע* ספרתי
9. ספרת המאות במספר 4,078 *קטנה* / *שווה* / *גדולה* מספרת האחדות.
10. ספרת העשרות במספר 7,788 *קטנה* / *שווה* / *גדולה* מספרת האחדות.

כלל: כאשר סוכמים שני מספרים בעלי אותו מספר ספרות, תמיד התוצאה תהיה בעלת מספר ספרות זהה למספר הספרות בשני המספרים אותם סכמנו אן גדול ממנו ב-1.
לדוגמא: סכום של שתי ספרות יכול להיות תוצאה חד ספרתית (לדוגמא: $1 + 2 = 3$) או תוצאה דו ספרתית (לדוגמא: $7 + 8 = 15$) בלבד.
בצורה דומה, סכום של שני מספרים דו ספרתיים יכול להיות תוצאה דו ספרתית (לדוגמא: $10 + 20 = 30$) או תוצאה תלת ספרתית (לדוגמא: $70 + 80 = 150$) בלבד.
וכן הלאה: סכום שני מספרים תלת ספרתיים תמיד יהיה מספר תלת ספרתי או מספר ארבע-ספרתי.



כלל: כאשר סוכמים שני מספרים אשר אין להם את אותו מספר ספרות, תמיד התוצאה תהיה בעלת מספר ספרות זהה למספר הספרות של המספר הגדול יותר מבין שני המספרים, אך בעלת מספר ספרות גדול ב-1 ממספר הספרות של המספר הגדול יותר מבין שני המספרים.
לדוגמא: סכום של מספר דו ספרתי ומספר תלת ספרתי יכול להיות תוצאה בעלת 3 ספרות ($100 + 10 = 110$) או 4 ספרות ($990 + 20 = 1,110$) וכן הלאה.

כלל: סכום הספרות הקטן ביותר של מספר דו ספרתי הוא סכום הספרות של המספר הדו ספרתי הקטן ביותר, שהוא 10. בדרך דומה, סכום הספרות הגדול ביותר של מספר דו ספרתי הוא סכום הספרות של המספר הדו ספרתי הגדול ביותר, שהוא 99.

הכלל נכון גם עבור מספרים תלת ספרתיים. סכום הספרות הקטן ביותר של מספר תלת ספרתי הוא סכום הספרות של המספר התלת ספרתי הקטן ביותר, שהוא 100. בדרך דומה, סכום הספרות הגדול ביותר של מספר תלת ספרתי הוא סכום הספרות של המספר התלת ספרתי הגדול ביותר, כלומר 999.

שאלה לדוגמא

איזו תשובה מבין התשובות הבאות נכונה בהכרח?

- (1) אם ab הוא מספר דו ספרתי הגדול מהמספר הדו ספרתי cd אז סכום הספרות של ab גדול מסכום הספרות של cd .
- (2) סכום הספרות הקטן ביותר של מספר דו ספרתי שווה לסכום הספרות הקטן ביותר של מספר תלת ספרתי.
- (3) סכום הספרות של מספר זוגי מתחלק ב-2.
- (4) סכום הספרות של מספר תלת ספרתי הוא בהכרח מספר חד ספרתי.



פתרון

נוכל לפסול את תשובה (1) לפי הצבה: אם ab הוא 21 והוא גדול מ- cd שהוא 17, אבל סכום הספרות של ab , שהוא $3+2+1$, קטן מזה של cd שהוא $8=1+7$. לכן תשובה (1) אינה נכונה בהכרח. סכום הספרות של 12 שהוא מספר זוגי הוא $3=1+2$ ו-3 אינו מתחלק ב-2, לכן נפסול גם את תשובה (3). סכום הספרות של מספר תלת ספרתי יכול להיות חד ספרתי, למשל סכום הספרות של 111 הוא $3=1+1+1$, אך סכום הספרות יכול להיות גם דו ספרתי כמו במספר 555, שסכום הספרות שלו הוא $15=5+5+5$. לכן, גם תשובה (4) אינה נכונה. סכום הספרות הקטן ביותר של מספר דו ספרתי הוא 1 (זהו סכום הספרות של המספר הדו ספרתי הקטן ביותר, כלומר 10). בדרך דומה, סכום הספרות הקטן ביותר של מספר תלת ספרתי הוא גם כן 1 (זהו סכום הספרות של המספר התלת ספרתי הקטן ביותר, כלומר 100).

התשובה הנכונה היא (2).

שאלות בהן אותיות מייצגות ספרות

קיימות שאלות בהן במקום ספרות מופיעות אותיות באנגלית. לדוגמא: האות A יכולה לייצג את הספרה 2, והאות B יכולה לייצג את הספרה 4. כאשר האותיות A ו-B יופיעו אחת ליד השנייה, הן ייצרו ביחד מספר AB , המייצג את המספר 24. חשוב לשים לב שהאותיות הצמודות זו לזו מרכיבות יחד מספר ואין אנו כופלים ביניהן, בשונה ממצב בו היינו רואים אותיות המייצגות משתנים בביטוי כלשהו.

כלל: כל אות מייצגת ספרה בין 0 ל-9, אלא אם כתוב אחרת במפורש בשאלה.

כלל: אותיות שונות יכולות לייצג את אותה הספרה, אלא אם כתוב אחרת במפורש בשאלה.

שאלות בהן יש אותיות המייצגות ספרות ניתן בדרך כלל לפתור על ידי הצבה. על מנת לדעת אלו מספרים להציב להלן מספר כללים שמומלץ לזכור:

כלל: ישנם שני מספרים בלבד שכאשר נכפיל אותם בעצמם, התוצאה תהיה שווה למספר המקורי. מספרים אלה הם המספרים 0 ו-1 ($0 \cdot 0 = 0$ ו- $1 \cdot 1 = 1$).



כלל: ישנן שתי ספרות בלבד שכאשר נכפיל אותן בעצמן נקבל מספר **זו ספרתי** שספרת האחדות שלו שווה לספרה המקורית. ספרות אלו הן הספרות 5 ו-6
($5 \cdot 5 = 25$ וגם $6 \cdot 6 = 36$).

כלל: כאשר נכפול את המספר 5 בכל מספר אי זוגי, ספרת האחדות במכפלה תהיה 5. לדוגמא: $5 \cdot 3 = 15$.

כאשר נכפול את המספר 5 במספר זוגי, ספרת האחדות תהיה 0 לדוגמא: $5 \cdot 6 = 30$.

כלל: כאשר נכפול את המספר 6 במספר זוגי, ספרת האחדות תהיה זהה לספרת האחדות של המספר הזוגי לדוגמא: $6 \cdot 4 = 24$.

חיבור וחסור

בשאלות חיבור וחסור בהן הספרות הוחלפו באותיות בדרך כלל יופיע התרגיל בצורה של חיבור ארוך או חיסור ארוך (על חיבור ארוך וחסור ארוך ניתן לקרוא בשיעור מבוא לאלגברה).

$$\begin{array}{r} AB \\ + \quad C \\ \hline DB \end{array}$$

לדוגמא:

על מנת לפתור את התרגיל על פי חיבור ארוך, נסכום את ספרת האחדות של המספר AB שהיא B עם ספרת האחדות של המספר C שהיא C. אנו יודעים שתוצאת החיבור B+C היא B עצמו. המצב האפשרי היחיד שבו מתקבל ש-C+B שווה ל-B הוא כאשר C=0. אם C=0, אז לפי $AB + 0 = DB$. נוכל להסיק ש- $\dot{A}B = DB$ ומכאן נקבל ש- $A = D$.

שימו לב שאין מניעה ששתי אותיות שונות ייצגו שתי ספרות זהות, אלא אם כן נכתב אחרת במפורש בשאלה.

כלל: בחיבור וחסור ארוך, אם בטור של ספרת האחדות מופיע $A + B = A$ נוכל להסיק ש- $B = 0$.



כפל

כאשר יופיע תרגיל כפל ארוך בו האותיות מייצגות ספרות, בדרך כלל לא נידרש לפתור את התרגיל או להציב בו את כל האותיות, אלא רק לאתר על פי כל מיני סימנים את הספרה הראשונה או האחרונה בתוצאה. את ספרת האחדות בתוצאה נוכל למצוא כמו בתרגילי חיבור וחיסור על ידי מכפלת ספרת האחדות של שני המספרים אותם אנו כופלים.

שאלה לדוגמא

$$\begin{array}{r} AB \\ \times B \\ \hline 1AB \end{array}$$

מה ערכו של AB?

15 (1)

16 (2)

25 (3)

36 (4)

פתרון

אנו יודעים שתוצאת המכפלה של B ו-B היא מספר שספרת האחדות שלו היא B (או שהוא שווה ל-B). לכן, האפשרויות לספרה שאותה מייצג B הן 0, 1, 5 ו-6. את 0 ו-1 נוכל לפסול, כיוון שאם B שווה 0 או 1 התוצאה של מכפלת מספר דו ספרתי ב-B לא תהיה מספר תלת ספרתי. כלומר, נשארנו עם B השווה ל-5 או 6. את ספרת העשרות / מאות / אלפים נוכל למצוא לעיתים על ידי הבנה של אפשרויות התוצאה.

נוכל לראות שכאשר אנו מכפילים את המספר הדו ספרתי AB פי B אנו מקבלים מספר תלת ספרתי שספרת המאות שלו היא 1, ספרת העשרות שלו זהה לזו של המספר AB וספרת האחדות שלו גם כן זהה לזו של AB.

מכאן, נפתור על ידי הצבה. אם B שווה 5 ו-A שווה 1, אז מכפלת 15 ב-5 היא תוצאה דו ספרתית (75) ולכן המצב לא יכול להתקיים. אם B שווה 6 ו-A שווה 1, אז מכפלת 16 ב-6 היא תוצאה דו ספרתית (96), ולכן גם מצב זה לא יכול להתקיים. אם A שווה 2 ו-B שווה 5, אז מכפלת 25 ב-5 היא 125 – וקיבלנו התאמה לתרגיל הכפל הארוך שלנו. אם A שווה 2 ו-B שווה 6, נקבל 26 כפול 6 והתוצאה תהיה 156, כלומר, ספרת העשרות של התוצאה אינה 2 וכך נוצרת סתירה. לכן, AB שווה 25.

התשובה הנכונה היא (3).



כלל: כאשר סכום של שתי ספרות הוא תוצאה זו ספרתית, ספרת העשרות של התוצאה היא בהכרח 1. לדוגמא: $9 + 9 = 18$.

כלל: כאשר סכום של שני מספרים זו ספרתיים הוא תוצאה תלת ספרתית, ספרת המאות של התוצאה היא בהכרח 1. לדוגמא: $90 + 90 = 180$.

שאלה לדוגמא

נתון: A, B, C ו- D הן אותיות המייצגות ספרות. בנוסף: $\frac{AB}{C} = D$

$$A^2 = ?$$

- (1) 1
- (2) 9
- (3) 25
- (4) 64

פתרון

בשאלה נתון תרגיל חיסור בו אותיות מייצגות ספרות. אנו יודעים ש- AB הוא מספר דו ספרתי שממנו מחסרים ספרה (C) והתוצאה המתקבלת היא ספרה המיוצגת על ידי האות D , כלומר, מספר חד ספרתי.

המצב היחיד שבו חיסור של ספרה ממספר דו ספרתי יביא לתוצאה חד ספרתית הוא

כאשר A (ספרת העשרות) שווה ל- 1 (לדוגמא: $12 - 4 = 8$). מכאן, $A^2 = 1^2 = 1$.

ניתן גם להפוך את תרגיל החיסור לתרגיל חיבור, והדבר יקל עלינו לראות את הכלל

הרלוונטי: $AB - C = D$, כלומר על ידי העברת אגפים נקבל: $C + D = AB$. שני

מספרים חד-ספרתיים שתוצאת החיבור ביניהם היא מספר דו-ספרתי. ספרת העשרות A חייבת להיות הספרה 1.

התשובה הנכונה היא (1).



שאלה לדוגמא

A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות בין 0 ל-9.
איזו מן התשובות הבאות לא יכולה להיות סכום הספרות A ו-B?

0 (1)

3 (2)

10 (3)

19 (4)

פתרון

האותיות A ו-B מייצגות ספרות בין 0 ל-9. מכיוון שלא נתון שהן מייצגות ספרות שונות, יכול להיות שגם A וגם B הן 0, ואז סכומן הוא 0. בדרך דומה, אם A שווה 2 ו-B שווה 1 נקבל שסכומן הוא 3, ואם A שווה 5 וגם B שווה 5 סכומן הוא 10. הערך המקסימלי ש-A ו-B יכולות לקבל הוא 9. אם גם A וגם B שוות לערך המקסימלי שהן יכולות לקבל, כלומר $A = B = 9$, סכומן שווה ל- $A + B = 9 + 9 = 18$, ולכן סכומן של A ו-B לא יכול להיות 19.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה לדוגמא

$$\begin{array}{r} AB \\ \times C \\ \hline 1BB \end{array}$$

A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9. נתון:

בנוסף נתון: $A + 2 = B$ וגם: $B + 2 = C$.

$B = ?$

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)



פתרון

מהנתונים נובע שמכפלת B עם C היא B או מספר דו ספרתי שספרת האחדות שלו היא B. נחפש מה יכול להיות הערך של C כך שיתקבל מצב זה. אם $C=1$ אז לפי הנתון $B+2=C$ נקבל כי $B=(-1)$, ומכיוון שנתון כי B מייצגת ספרה בין 1 ל-9 הדבר אינו אפשרי. הספרה הבאה שיכולה להיות מיוצגת על ידי C כך שהכפלת B ב-C תביא לתוצאה שספרת האחדות שלה גם היא B היא 5, ובמקרה זה B צריכה גם היא להיות שווה ל-5. עם זאת, לפי המשוואה $B+2=C$ הדבר אינו ייתכן, ולכן C אינה שווה גם ל-5. אם $C=6$ אז לפי המשוואה $B+2=C$ נקבל ש- $B=4$, ואכן מתקיים כי מכפלת B ב-C היא מספר שספרת האחדות שלו שווה ל-B ($4 \times 6 = 24$). כמו כן, לפי הנתון $A+2=B$ נקבל ש- $A=2$. נבדוק האם תרגיל הכפל נכון לאחר הצבת המספרים במקום האותיות: $24 \cdot 6 = 144$. התוצאה היא 144 , ולכן $B=4$.
נוכל גם לפתור על ידי הצבת התשובות בנתוני השאלה. דרך זו תיקח יותר זמן - במיוחד כי התשובה הנכונה היא התשובה האחרונה, אך במקרה ולא הצלחנו לחשוב על שום דרך פתרון אחרת זו גם אופציה.
התשובה הנכונה היא (4).

פירוק מספר

בחלק מהשאלות בנושא אותיות ומספרים נידרש להתייחס לחלקי המספר או להרכיב מספר על פי תאור נתון. כל מספר נוכל לפרק לגורמים שבנויים מאחדות, עשרות מאות וכו'.
ככלל, ספרת האחדות סופרת כמה אחדות קיימות במספר, ספרת העשרות סופרת כמה עשרות קיימות במספר וכן הלאה. כלומר, במספר ABCD יש A אלפים, B מאות, C עשרות ו-D אחדות. לדוגמא, במספר 24 יש 4 אחדות ו-2 עשרות.
(בחלק מהמספרים ניתן להבין את זה מהשם של המספר. למשל 800 מבוטא בעברית כ-שמונה מאות. כלומר, ספרת המאות במספר 800 מונה את כמות המאות הקיימת במספר).



שאלה לדוגמא

נתון: A, B, C ו-D הן אותיות המייצגות ספרות.
איזו מהתשובות הבאות מתארת במדויק את המספר DBCA?

- (1) D מאות, A אלפים, B עשרות ו-C אחדות.
- (2) C אחדות, A עשרות, B מאות ו-D אלפים.
- (3) A אחדות, B מאות, C עשרות ו-D אלפים.
- (4) B מאות, A אחדות, C אלפים ו-D עשרות.

פתרון

אנחנו יודעים שהספרה הימנית בכל מספר מסמנת את ספרת האחדות. מכאן, שספרת האחדות במספר DBCA היא A. כבר נוכל לפסול את תשובות (1) ו-(2) כיוון שהן לא תואמות לנתון הזה. בשתי התשובות (3) ו-(4) B היא ספרת המאות, לכן בדיקה של נתון זה לא תעזור לנו למצוא את התשובה הנכונה. אנו יודעים שהספרה השנייה מימין מסמנת את ספרת העשרות ולכן ספרת העשרות במספר DBCA היא C. לכן, תשובה (3) היא הנכונה ותשובה (4) אינה נכונה, מפני שמצויין בה ש-C מסמן את ספרת האלפים.
התשובה הנכונה היא (3).

פירוק לתבנית עשרונית

בהמשך לפירוק המספר, נוכל לכתוב כל מספר כסכום המורכב מהמכפלה של הספרה המייצגת את ספרת האחדות בו ב-1, ועוד הספרה המייצגת את ספרת העשרות בו ב-10, ועוד הספרה המייצגת את ספרת המאות בו ב-100 וכן הלאה.
לדוגמא: $2,384 = 2 \cdot 1,000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1$.
פירוק לתבנית עשרונית יעזור לנו בפתרון שאלות גם אם יש בהן אותיות המייצגות ספרות.
לדוגמא: $ABCD = A \cdot 1,000 + B \cdot 100 + C \cdot 10 + D \cdot 1$.



תרגול פירוק לתבנית עשרונית

פרק את המספרים הבאים לתבנית עשרונית:

1. 24
2. 399
3. 2,433
4. ABC
5. 10,789

סיכום

נושא אותיות ומספרים הוא נושא רחב. על מנת להרגיש ביטחון בחומר נדרש תרגול רב. סוגי השאלות חוזרים על עצמם יחסית הרבה ולכן על ידי תרגול ניתן להכיר את רוב הדרכים לפתרון. כמו כן, פעמים רבות התרגיל נפתר על ידי הצבת מספרים. מומלץ להכיר היטב את סימני החלוקה וחוקי המספרים השלמים, אשר יעזרו לעיתים קרובות בפתרון השאלות.



פתרונות לתרגול הגדרות

1. כאשר נתונה לנו ספרה היא עצמה מהווה את ספרת האחדות. לכן ספרת האחדות במספר 3 היא 3. במספר 3 אין ספרת עשרות, מאות וכו'.
2. ספרת המאות במספר 790 היא 7.
3. ספרת האלפים במספר 94,002 היא 4. שימו לב, 9 היא ספרת העשרות אלפים.
4. ספרת האחדות במספר 7,800 היא 0. שימו לב, במספר 7,800 ספרת העשרות זהה לספרת האחדות.
5. ספרת העשרות במספר 23 היא 2.
6. סכום הספרות במספר 8,230 שווה ל- $8 + 2 + 3 + 0 = 13$.
7. סכום הספרות במספר 555 שווה ל- $5 + 5 + 5 = 15$.
8. המספר 407 מורכב משלוש ספרות ולכן הוא תלת ספרתי.
9. ספרת המאות במספר 4,078 היא 0 והיא קטנה מספרת האחדות שהיא 8.
10. ספרת העשרות במספר 7,788 היא 8 והיא שווה לספרת האחדות, השווה גם היא ל- 8.

פתרונות לתרגול פירוק לתבנית עשרונית

1. $24 = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
2. $399 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 1$
3. $2,433 = 2 \cdot 1,000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1$
4. $ABC = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1$
5. $10,789 = 10,000 \cdot 1 + 0 \cdot 1,000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1$