שיעור אי שוויונים

מבוא

אי שוויונים הוא נושא המבוסס על משוואות בנעלמים. לכן מומלץ לקרוא את שיעור "משוואה בנעלם אחד" ולשלוט בעקרונות המשוואה, העברת האגפים ובידוד משתנים. עקרונות אלה ישמשו לפתרון אי שוויונים. נושא אי השוויונים מופיע לעיתים כנושא בפני עצמו ופעמים רבות הוא משולב עם נושא הערך המוחלט. בנוסף, נושא זה חשוב מכיוון שהעקרונות שלו משמשים לעיתים בפתרון בעיות השוואה כמותית, שכידוע מהוות כחמישית מהשאלות בכל פרק כמותי.

*במהלך השיעור יופיעו תרגילים. פתרונות מלאים לתרגילים אלה מופיעים בסוף השיעור.

הגדרות הסימנים

אי שוויון מורכב משני חלקים (אגפים) בצורה דומה למשוואה, אך בין שני האגפים אין שוויון, ומכאן שמו של אי השוויון. באי שוויון נתון יכולים להיות מספר מצבים:

מצב בו האגף הימני גדול מהאגף השמאלי ואז אי השוויון יראה כך: $2 < x$.

במצב זה ערכו של x הוא מספר הגדול מ- 2.

מצב בו האגף השמאלי גדול מהאגף הימני, ואז אי השוויון יראה כך: $2 > x$.

במצב זה ערכו של x הוא מספר הקטן מ- 2.

מצב בו האגף הימני גדול או שווה לאגף השמאלי, ואז אי השוויון יראה כך: $2 \le x$.

במצב זה x יכול להיות שווה ל- 2 או למספר הגדול מ- 2.

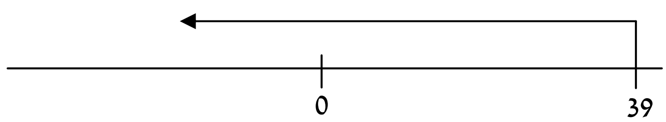
מצב בו האגף השמאלי גדול או שווה לאגף הימני, ואז אי השוויון יראה כך: $2 \ge x$.

במצב זה ערכו של x יכול להיות שווה ל- 2 או למספר הקטן מ- 2.

פתרון אי שוויון

תשובה של אי שוויון אינה ערך אחד ויחיד כפי שאנו מקבלים ממשוואה, אלא תחום של ערכים. לדוגמא: $x < 39$. משמעות הדבר היא שכל מספר הקטן מ- 39 מקיים את אי השוויון הנתון.

ניתן לצייר את תחום הערכים גם על ציר המספרים, בצורה הבאה:



על מנת לפתור אי שוויון נשתמש בעקרונות שלמדנו בשיעור משוואות. מותר להעביר אגפים, אך עם תשומת לב לסימנים ולמספר כללים, כאשר המטרה היא לבודד את x.

חיבור וחיסור: ניתן לבצע על שני צידי אי השוויון כפי שעושים במשוואה.
כפל וחילוק: ניתן לחלק ולהכפיל את שני צידי אי השוויון מבלי לשנות את הסימן, כאשר כופלים / מחלקים **במספר חיובי** בלבד.
כמו במשוואה, אסור לכפול או לחלק את שני צידי אי השוויון ב- 0.

כלל: כאשר כופלים את שני צידי אי השוויון בערך שלילי, עלינו להפוך את סימן אי השוויון.

לדוגמא: כשנרצה לבודד את x באי השוויון $(-x)>(-8)$ נכפול את שני צידי אי השוויון ב- (-1) ונזכור להפוך את סימן אי השוויון כיוון ש - (-1) הוא גודל שלילי. כך נקבל: $x<8$.

כלל: מכיוון שכאשר מכפילים את אי השוויון בגודל שלילי עלינו להפוך את סימן אי השוויון, אסור להכפיל או לחלק את אי השוויון במשתנה שאין אנו יודעים אם ערכו שלילי או חיובי. זאת, מכיוון שבמידה וערכו שלילי עלינו להפוך את סימן אי השוויון, אך במידה וערכו חיובי אין אנו צריכים להפוך את הסימן.

לדוגמא: באי השוויון $\frac{3+b}{a}<a+2$, לא נוכל להכפיל את שני צידי אי השוויון ב- a כפי שהיינו עושים במידה ובין שני האגפים היה נתון סימן שוויון ועלינו למצוא דרך אחרת לפתרון.

<u>תרגול בידוד משתנה באי שיוויון</u>

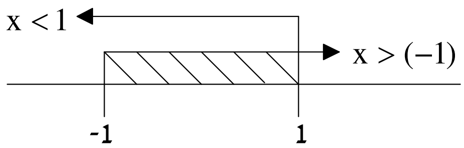
1. $0<x-2$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
2. $-3<7+x$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
3. $0<-x+2$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
4. $-20x<-2+2x$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
5. $-x\le x-4$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
6. $18>9-3x$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
7. $\frac{4x}{x}\le 6x$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
8. $\frac{x}{2}\ge\frac{(-x)}{2}$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
9. $-x+3>x-3$, מהו תחום הערכים המדויק של x?
10. $\frac{3}{x}<1$, נתון: $x>0$, מהו תחום הערכים המדויק של x?

אי שוויונים עם יותר מתחום אחד

בשאלות אי שוויונים מסוימות יכול להיווצר מצב בו יש יותר מתחום אחד בתוצאה (למשל כאשר אנו פותרים אי שוויון עם חזקות מסדר זוגי). במקרה זה קיימות שתי אפשרויות: בין התחומים קיימת חפיפה או שבין התחומים לא קיימת חפיפה.

מצב בו קיימת חפיפה בין התחומים:

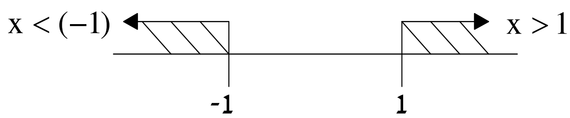
למשל: $x<1$ וגם $x>(-1)$. בצורה גרפית, התחום יראה כך:



מכיוון שיש חפיפה בין שני התחומים, התחום שמקיים את אי השוויון שתנאיו הם $x<1$ וגם $x>(-1)$ הוא רק התחום המסומן בקווים אלכסוניים. כלומר, השטח בסרטוט שחופף בין שני התחומים הנתונים. במילים אחרות, התחום הוא $-1<x<1$.

מצב בו לא קיימת חפיפה בין התחומים:

למשל: התחום שמקיים אי שוויון הוא $x>1$ או $x<(-1)$. בצורה גרפית, התחום יראה כך:



כלל: כאשר נתון אי שוויון בצורה $x^2<a$, התוצאה תהיה $x<a$ וגם $x>(-a)$, כלומר, תחום עם חפיפה. במילים אחרות, התחום שמקיים אי השוויון הוא $-a<x<a$.

לדוגמא: פתרון אי השוויון $x^2<4$ הוא $x<2$ וגם $x>(-2)$.

את הפתרון $x<2$ וגם $x>(-2)$ ניתן לכתוב בצורה מאוחדת באופן הבא: $(-2)<x<2$.

כלל: כאשר נתון אי שוויון בצורה $x^2>a$ התוצאה תהיה $x>a$ או $x<(-a)$, כלומר, תחום שאין בו חפיפה.

לדוגמא: פתרון אי השוויון $x^2>4$ הוא $x>2$ או $x<(-2)$.

פתרון מסוג זה לא ניתן לכתוב בצורה מאוחדת באי שוויון אחד, מכיוון שבמצבים מסוג זה אין תחום חופף.

<u>שאלה לדוגמא</u>

נתון: $\frac{3-a}{a}>2$, $a>0$.

מהו תחום הערכים המקיים את שני אי השוויונים?

(1) $a<(-1)$ וגם $a>0$

(2) $(-1)<a<0$

(3) $a>1$ וגם $a>0$

(4) $0<a<1$

<u>פתרון</u>

נתונים שני אי שוויונים, באחד מהם a כבר מבודד, ובשני עלינו לבודד את a. נתון ש- $a>0$, לכן כבר נוכל לפסול את תשובות (1) ו- (2), כיוון שהן אינן מקיימות את התנאי הזה. כעת נבודד את a באי השוויון $\frac{3-a}{a}>2$. שימו לב, מכיוון שאנו יודעים שערכו של a גדול מ- 0 על פי הנתון $a>0$, כלומר אנו יודעים בוודאות ש- a הוא גודל חיובי, ניתן לכפול את שני צידי אי השוויון ב- a מבלי לשנות את הסימן (זכרו, אם היינו יודעים ש- a הוא גודל שלילי היינו יכולים לכפול בו את שני צידי אי השוויון ולהפוך את סימן אי השוויון, ואם לא היינו יודעים אם הוא שלילי או חיובי לא היינו יכולים לכפול בו כלל את שני צידי אי השוויון). כך נקבל: $3-a>2a$. כעת, על ידי העברת אגפים נקבל: $3>3a$. נחלק ב- 3 (שגם הוא גודל חיובי ולכן אין אנו צריכים לשנות את כיוון הסימן), וכך נקבל: $1>a$. היות שנתון כי $a>0$, התוצאה היא התחום החופף בין תחום זה והתחום שמצאנו, כלומר: $0<a<1$ (קיבלנו תחום חופף ולכן ניתן לכתוב אותו בצורה המאוחדת).

התשובה הנכונה היא (4).

<u>שאלה לדוגמא</u>

נתון: $7x-8<4x-2$. x הוא מספר חיובי ושלם.

$x=?$

(1) 1

(2) 8

(3) 3

(4) 4

פתרון

נתחיל בבידוד x באי השוויון הנתון על ידי חיסור 4x משני צידי אי השוויון. כך נקבל $3x-8<-2$. כעת נוסיף לשני צידי אי השוויון 8 ונקבל: $3x<6$. נחלק את שני צידי אי השוויון ב- 3 על מנת לבודד את x (אנו יכולים לחלק את שני צידי אי השוויון ב- 3 בלי חשש מכיוון ש- 3 הוא מספר חיובי בוודאות). נקבל: $x<2$. כעת נתייחס לנתון הנוסף בשאלה לפיו x הוא מספר חיובי ושלם. בשילוב עם התחום שקיבלנו, המספר היחיד שהוא חיובי ושלם וגם קטן מ- 2 (הרי קיבלנו $x<2$) הוא 1.

התשובה הנכונה היא (1).

יחסיות באי שוויונים

כלל: אם נתון $a<b$ וגם נתון $b<c$ אז בהכרח $a<c$.

נוכל לראות את היישום של הכלל הנ"ל בדוגמא מספרית פשוטה.

אם $1<2$ וגם $2<3$ אז בהכרח $1<3$.

שאלה לדוגמא

נתון: $(m+n)<33+a$ וגם $33+a<2m+2n$

מה נכון בהכרח?

(1) $(m+n)$ הוא ביטוי שלילי.

(2) $(33+a)$ הוא ביטוי שלילי.

(3) $(m+n)$ הוא ביטוי חיובי.

(4) לא ניתן לדעת בוודאות אם הביטויים חיוביים או שליליים.

<u>פתרון</u>

נוכל לאחד את שני אי השוויונים הנתונים ונקבל: $(m+n)<33+a<2m+2n$. על פי חוק היחסיות באי שוויונים נוכל להגיד בוודאות ש: $(m+n)<2m+2n$. נוציא מחוץ לסוגריים גורם משותף 2 באגף הימני של אי השוויון ונקבל: $(m+n)<2(m+n)$ (שימו לב - אסור לחלק ב- $(m+n)$ שכן איננו יודעים האם ביטוי זה חיובי או שלילי ולכן לא נדע אם יש להפוך את הסימן). עם זאת, מכיוון שנתון שהביטוי $(m+n)$ קטן מ- $2(m+n)$, כלומר מערכו של הביטוי פי 2, נוכל להסיק שערכו של הביטוי $(m+n)$ הוא חיובי. זאת מכיוון שאם הביטוי $(m+n)$ היה שלילי, ברגע שהיינו מכפילים אותו פי 2 ערכו של הביטוי היה הופך קטן יותר ולא גדול יותר. מכאן, שהביטוי $(m+n)$ הוא ביטוי חיובי.

(ניתן גם לחסר $(m+n)$ משני האגפים וכך נקבל: $0<(m+n)$, כלומר הביטוי חיובי).

אם נסתכל על השאלה לעומק לפני הפתרון, נוכל לפסול את תשובה (2) מכיוון שאם $(33+a)$ הוא ביטוי שלילי, ובנוסף נתון שהוא גדול מהביטוי $(m+n)$, אז בהכרח גם הביטוי $(m+n)$ הוא ביטוי שלילי ואז נקבל שיש שתי תשובות נכונות (גם תשובה (1) וגם תשובה (2).

התשובה הנכונה היא (3).

שילוב של משוואה ואי שוויון

לעיתים מופיעות במבחן שאלות שמערבות שני נתונים, כאשר אחד מהם הוא אי שוויון והשני משוואה. ברוב המקרים בשאלות מסוג זה יופיעו שני משתנים באי השוויון, במשוואה או בשניהם.
שאלות מסוג זה מזכירות במקצת את נושא שתי משוואות בשני נעלמים. דרך הפתרון גם כן תהיה דומה ובדרך כלל תהיה מורכבת מבידוד משתנה אחד במשוואה והצבתו באי השוויון על מנת לקבל אי שוויון עם משתנה אחד בלבד.

<u>שאלה לדוגמא</u>

נתון: $4a+2b=3a-15$ וגם $b-a<30$.

מה תחום הערכים המדויק שיכול לקיים את b?

(1) $b<5$

(2) $b<a$

(3) $b<15$

(4) $b<15-2a$

פתרון

בשאלה נתונים משוואה ואי שוויון ואנו נשאלים מה תחום הערכים המדוייק שיכול לקיים את b. נבודד במשוואה את a על מנת שנוכל להציב אותו באי השוויון וכך נקבל אי שוויון עם משתנה אחד בלבד (ואותו אנחנו יודעים כבר לפתור). על ידי העברת אגפים נקבל: $a=-15-2b$. נכפול במינוס 1 את שני צידי המשוואה וכך נקבל: $(-a)=15+2b$. כעת נוכל להציב את $(-a)$ באי השוויון ונקבל: $b+15+2b<30$. על ידי כינוס איברים והעברת אגפים נקבל: $3b<15$. נחלק ב- 3 את שני צידי אי השוויון (אין צורך להחליף את סימן אי השוויון כי 3 הוא מספר חיובי בוודאות) ונקבל: $b<5$.

התשובה הנכונה היא (1).

טווח אפשרי

בשאלות מסוג זה, נקבל נתון לגבי משתנה ועל פיו נצטרך לחשב מהו טווח הערכים שיכול לקבל המשתנה. בחלק מן השאלות נוכל לפתור על ידי הצבה של התשובות אך לעיתים נצטרך להפעיל חשיבה על מנת לאתר את התחום.

<u>שאלה לדוגמא</u>

נתון: b ,a הם מספרים שלמים.

נתון: $a-b=4$ וגם $1\le a\le 7$

מה הטווח הערכים האפשרי עבור b שמקיים את המשוואה הנתונה?

(1) $-3<b<3$

(2) $-3\le b\le 3$

(3) $0<b<8$

(4) $-2<b<5$

פתרון

נוכל לפתור על ידי הצבת כל המספרים האפשריים שמקיימים את המשוואה וגם את שאר הנתונים.

מכיוון שנתון ש- a ו- b הם מספרים שלמים, האפשרויות עבור a הן 1,2,3,4,5,6,7. אם נציב $a=1$, נקבל $1-b=4$, כלומר $b=(-3)$. אם נציב $a=2$ נקבל $2-b=4$, ומכאן $b=(-2)$. בדרך דומה, אם נציב $a=3$, $a=4$, $a=5$, $a=6$, $a=7$ נקבל $b=(-1)$, $b=0$, $b=1$, $b=2$, $b=3$. לכן, b יכול לקבל ערכים שלמים בין 3 ל- (-3), כולל 3 ו- (-3).

דרך מהירה יותר לפתור היא להציב רק את המצבים הקיצוניים בהם $a=1$ וגם $a=7$. כך נקבל מהר יותר את כל טווח הערכים שמקיים את b.

התשובה הנכונה היא (2).

לסיכום

נושא אי השוויונים דומה מאוד לנושא המשוואות, מלבד כמה כללים שעלינו לזכור. במידה ואנו כופלים או מחלקים בגודל שלילי, יש להפוך את הסימן. מסיבה זו, אסור לכפול או לחלק בגודל שאין אנו יודעים האם הוא חיובי או שלילי.

נושא אי השוויונים לעיתים מרתיע תלמידים רבים אך אין סיבה אמיתית לכך. הנושא מצריך תרגול ותשומת לב לכללים, אך לאחר תרגול מספיק הוא יחסית פשוט.

פתרון לתרגול בידוד משתנה באי שוויון

1. על ידי הוספת 2 לכל אחד מצידי אי השוויון נקבל: $2 < x$. כלומר, ערכי ה- x המקיימים אי השוויון $0 < x - 2$ יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- 2.
2. נחסיר 7 משני צידי אי השוויון וכך נקבל: $-10 < x$. כלומר, ערכי ה- x המקיימים את אי השוויון $-3 < 7 + x$ יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- (-10).
3. נוסיף x לשני צידי אי השוויון וכך נקבל: $x < 2$. שימו לב, אין צורך לשנות את הסימן כיוון שהשתמשנו בחיבור x בשני צידי אי השוויון ולא בכפל או בחילוק במספר שלילי. ערכי ה- x המקיימים את אי השוויון $0 < -x + 2$ יכולים להיות אך ורק מספרים הקטנים מ- 2.
4. נחסיר 2x משני צידי אי השוויון ונקבל: $-22x < -2$. שימו לב, אין צורך לשנות את הסימן כיוון שהשתמשנו בחיסור 2x בשני צידי אי השוויון ולא בכפל או בחילוק. כעת, נחלק ב- (-2) את שני צידי אי השוויון ונזכור להפוך את הסימן, כיוון שאנו מחלקים בגודל שלילי. כך נקבל: $11x > 1$. כעת נחלק את שני צידי אי השוויון ב- 11 ונקבל: $x > \frac{1}{11}$. ערכי x המקיימים את אי השוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- $\frac{1}{11}$.
5. נוסיף x לשני צידי אי השוויון ובמקביל נוסיף 4 לשני צידי אי השוויון וכך נקבל: $4 \le 2x$. כעת על ידי חלוקה של שני צידי המשוואה ב- 2 נקבל: $2 \le x$. כלומר, ערכי x המקיימים את אי השוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- 2 או שווים ל- 2.
6. נחסיר משני צידי אי השוויון 9 ונקבל: $9 > -3x$. כעת, על מנת לבודד את x נחלק את שני צידי אי השוויון במינוס 3 ולא נשכח להפוך את סימן אי השוויון כי אנחנו מחלקים אותו בגודל שלילי. כך נקבל: $-3 < x$. ערכי ה- x המקיימים את אי השוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים ממינוס 3.
7. אסור לנו לכפול את שני צידי אי השוויון ב- x כי אנו לא יודעים אם הוא גודל שלילי או חיובי, ולכן אנחנו לא יודעים אם עלינו להפוך את סימן אי השוויון. עם זאת, יש דרך אחרת בה נוכל להגיע לפתרון, על ידי צמצום x בשבר הנמצא באגף השמאלי של אי השוויון. לאחר צמצום נקבל: $4 \le 6x$. כעת נוכל ללא קושי לבודד את x על ידי חלוקת שני צידי אי השוויון ב- 6. כך נקבל: $\frac{4}{6} \le x$. נוכל לצמצם את השבר שקיבלנו ב-2, וכך נקבל: $\frac{2}{3} \le x$. ערכי ה- x המקיימים את אי השוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- $\frac{2}{3}$ או שווים לו.

8. נוכל לכפול את שני צידי אי השוויון ב- 2 וכך נקבל: $x \geq (-x)$. נוסיף x לשני צידי אי השוויון וכך נקבל: $2x \geq 0$. שימו לב, אין צורך לשנות במקרה זה את כיוון סימן אי השוויון, כיוון שאנחנו מוסיפים x לשני צידי אי השוויון ולא מבצעים פעולה של כפל או חילוק במספר שלילי. לאחר חלוקה של שני צידי אי השוויון ב- 2 על מנת לבודד את x נקבל: $x \geq 0$. ערכי ה- x המקיימים את אי השוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- 0 או שווים לו.
9. נוסיף x לשני צידי אי השוויון ובמקביל נוסיף 3 לשני צידי אי השוויון ונקבל: $6 > 2x$. שימו לב, אין צורך לשנות את כיוון הסימן כיוון שרק הוספנו x ו- 3 לשני צידי אי השוויון ולא ביצענו פעולה של כפל או חילוק במספר שלילי. כעת נחלק ב- 2 את שני צידי אי השוויון ונקבל: $3 > x$. ערכי ה- x המקיימים את אי השיוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הקטנים מ- 3.
10. נוכל לכפול את שני צידי אי השוויון ב- x מכיוון שנתון ש- $x > 0$, כלומר, אנו יודעים ש- x חיובי בהכרח, ולכן אין צורך לשנות את סימן אי השוויון. כך נקבל: $3 < x$. ערכי ה- x המקיימים את אי השיוויון יכולים להיות אך ורק מספרים הגדולים מ- 3.