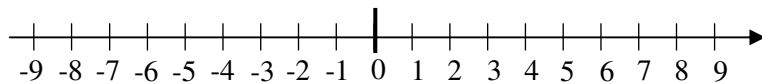




שיעור גיאומטריה אנליטית

מבוא

נושא הגיאומטריה האנליטית עוסק במערכת הצירים ובמציאת נקודות ואורכי קטעים על פיה. שאלות מסוימות יכולות לערב צורות גיאומטריות במערכת הצירים, ולשם פתרון יש להכיר את חוקי הגיאומטריה, כפי שהם מופיעים בדף הנוסחאות ובשיעורי הגיאומטריה. בדרך כלל יש כשאלה אחת במבחן בנושא זה, אך השאלות אינן מסובכות וכדאי ללמוד את הנושא ולתרגלו, שכן זו יכולה להיות שאלה "בטוחה". * במהלך השיעור יופיעו תרגילים. פתרונות מלאים לתרגילים אלה מופיעים בסוף השיעור.



ציר המספרים

ציר המספרים הינו ישר אופקי המשמש להצגה גיאומטרית של יחסים בין מספרים. על הישר מסומנות נקודות במרחקים שווים הממוספרות בסדר כרונולוגי כך שככל שמתקדמים ימינה על הציר ערכיהן גדלים, וכל שזזים שמאלה ערכיהן קטנים. ניתן לחלק את ציר המספרים לחלקו השלילי ולחלקו החיובי, כאשר בין שני החלקים נמצאת הנקודה 0.

המרחק בין שתי נקודות על הציר שווה לערך המוחלט של ההפרש בין שתי הנקודות.

למשל, המרחק בין הנקודה 6 לנקודה 2 שווה ל- $6 - 2 = 4$.

המרחק בין הנקודות (-1) ו- (-3) שווה ל- $(-1) - (-3) = 2$.

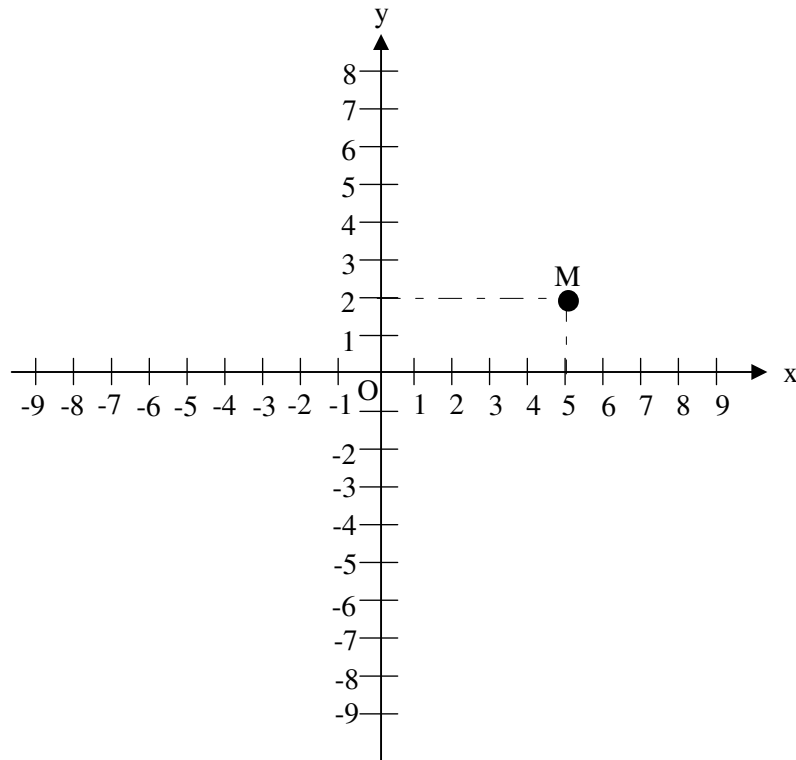
המרחק בין הנקודות 5 ו- (-7) שווה ל- $5 - (-7) = 12$.

תרגול מרחקים

1. מה המרחק בין הנקודה 8 לנקודה 5?
2. מה המרחק בין הנקודה 4 לנקודה (-8)?
3. מה המרחק בין הנקודה 0 לנקודה (-5)?
4. מה המרחק בין הנקודה (-3) לנקודה (-7)?
5. מה המרחק בין הנקודה 9 לנקודה (-9)?



מערכת הצירים הקרטזית



במערכת הצירים הקרטזית ישנם שני צירי מספרים המאונכים אחד לשני. הציר האופקי נקרא ציר ה- x ובו הערכים גדלים ככל שמתקדמים ימינה וקטנים ככל שמתקדמים שמאלה (בדומה לציר המספרים שהכרנו עד עכשיו). הציר האנכי נקרא ציר ה- y ובו הערכים גדלים ככל שמתקדמים כלפי מעלה וקטנים ככל שמתקדמים כלפי מטה. כל נקודה במישור יכולה להיות מוגדרת על ידי שני ערכים, ערך ה- x וערך ה- y של אותה נקודה, בצורה כזאת: (x, y) , כאשר ערך ה- x מיוצג בצד שמאל בסוגריים וערך ה- y מיוצג בצד ימין בסוגריים. ערך ה- x של נקודה מייצג את מרחק הנקודה מציר ה- y (אותו ניתן למדוד ע"י העברת אנך מהנקודה לציר ה- y). ערך ה- y של נקודה מייצג את מרחקה מציר ה- x (אותו ניתן למדוד ע"י העברת אנך מהנקודה לציר ה- x). למשל, עבור הנקודה M שבסרטוט, הערך על ציר ה- x המתאים לה הוא 5, והערך על ציר ה- y המתאים לה הוא 2 (ניתן להעביר קווים מאונכים לצירים מהנקודה ולראות בדיוק איזה ערך היא מקבלת על כל ציר). לכן, ערכי הנקודה M הם $(5, 2)$. שימו לב - לעתים ערכי הנקודה יכוננו "שיעורי הנקודה".



נקודת המפגש בין ציר ה- x וציר ה- y נקראת "ראשית הצירים" ומסומנת בדרך כלל על ידי האות O .
בנקודה זו הן ערך ה- x והן ערך ה- y הם 0 , ומכאן ששיעורי הנקודה הם $(0,0)$.

כלל:

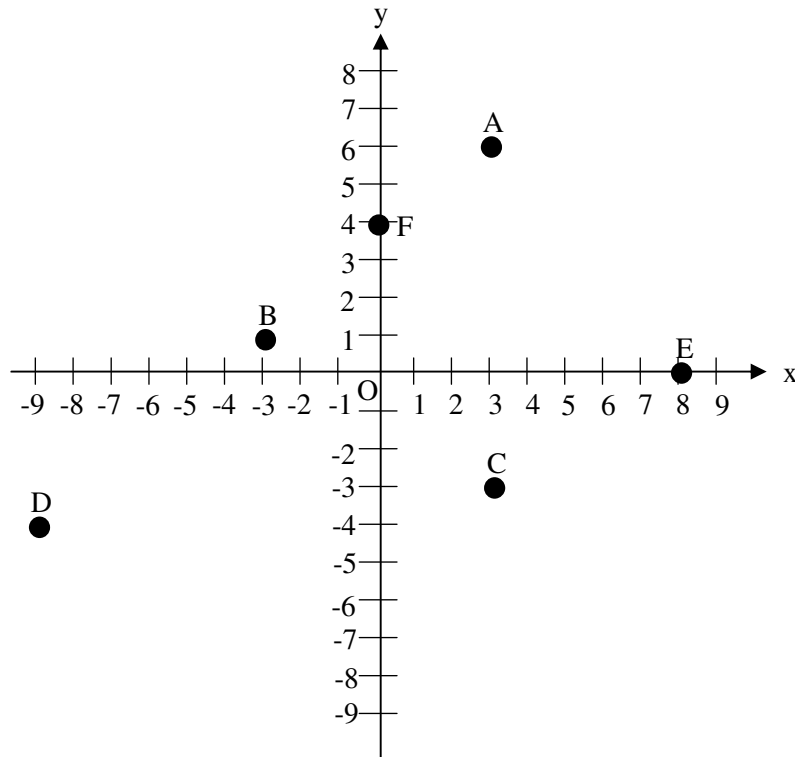
- חלקו החיובי של ציר ה- y נמצא מעל לציר ה- x וחלקו השלילי של ציר ה- y נמצא מתחת לציר ה- x .
- חלקו החיובי של ציר ה- x נמצא מימין לציר ה- y וחלקו השלילי של ציר ה- x נמצא משמאל לציר ה- y .

כלל:

- ערך ה- y של נקודה הנמצאת על ציר ה- x הוא 0 .
- ערך ה- x של נקודה הנמצאת על ציר ה- y הוא 0 .

תרגול שיעורי נקודות

1. ציינו את שיעורי הנקודות הבאות:





2. מקמו את הנקודות הבאות על מערכת צירים:

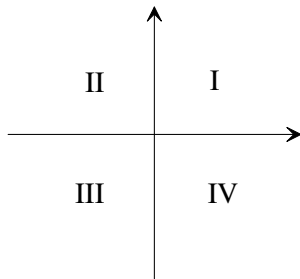
J(-2,8) G(5,4)

K(-4,0) H(-2,-3)

L(0,-4) I(4,-7)

חלוקה לרביעים

החיתוך בין ציר ה- x וציר ה- y מחלק את המישור לארבעה חלקים, המכונים רביעים ומסומנים בספרות רומיות – I (רביע ראשון), II (רביע שני), III (רביע שלישי) ו-IV (רביע רביעי).



ברביע הראשון (I), הן ערכי ה- x והן ערכי ה- y של הנקודות הם חיוביים.

ברביע השני (II), ערכי ה- x של הנקודות הם שליליים וערכי ה- y של

הנקודות הם חיוביים.

ברביע השלישי (III), הן ערכי ה- x והן ערכי ה- y של הנקודות הם שליליים.

ברביע הרביעי (IV), ערכי ה- x של הנקודות הם חיוביים וערכי ה- y

של הנקודות הם שליליים.

למשל, הנקודה (5, -2) נמצאת ברביע השני.

תרגול רביעים

באלו רביעים נמצאות הנקודות הבאות?

A(3,4)

B(-6,1)

C(-1,-9)

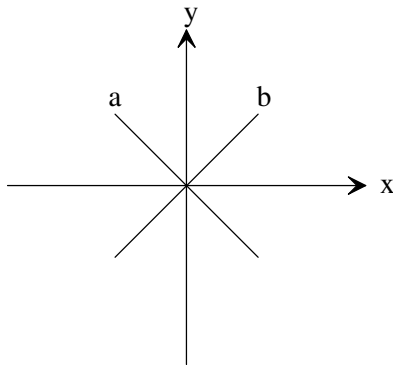
D(-2,7)

E(8,-3)

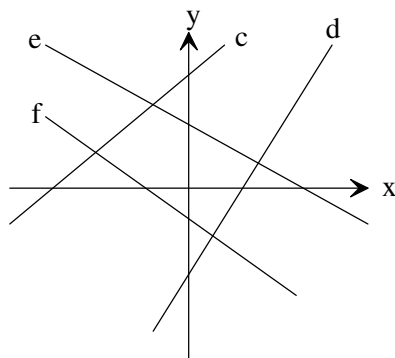


סוגי ישרים

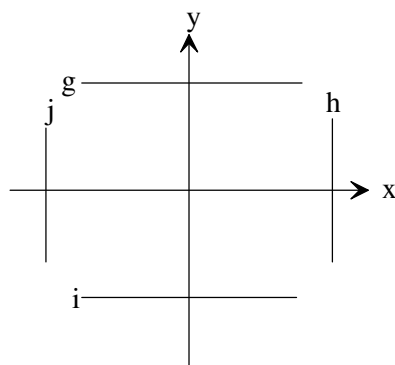
כלל: דרך שתי נקודות יכול לעבור רק ישר אחד. חלק של תחום בין שתי נקודות נקרא קטע (ישר עובר דרך שתי נקודות אך לא תחום בין שתייהן בלבד).



ישר יכול לעבור בראשית הצירים, כלומר הנקודה $(0,0)$ נמצאת עליו, ואז הוא חותך את שני הצירים באותה הנקודה (ראשית הצירים). במקרה זה הישר יכול להיות ברביע הראשון והשלישי (ישר b) או השני והרביעי (ישר a), אך לא בכל שילוב אחר של רביעים.



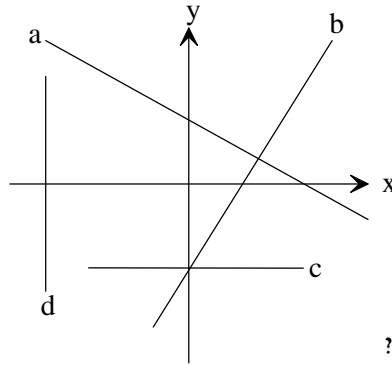
ישר יכול שלא לעבור בראשית הצירים ולחתוך את הצירים בנקודות שונות. הוא יכול לחתוך את ציר ה- x ואת ציר ה- y בחלק השלילי שלהם (ישר f), את ציר ה- x ואת ציר ה- y בחלק החיובי שלהם (ישר e), את ציר ה- x בחלקו החיובי ואת ציר ה- y בחלקו השלילי (ישר d), או את ציר ה- x בחלקו השלילי ואת ציר ה- y בחלקו החיובי (ישר c).



ישר יכול להיות מקביל לאחד הצירים. במקרה זה הישר יחתוך רק ציר אחד - הציר שהוא אינו מקביל לו (ולמעשה הוא מאונך לו). הישר יכול להיות מקביל לציר ה- x ולחתוך את ציר ה- y בחלקו החיובי (ישר g), הוא יכול להיות מקביל לציר ה- x ולחתוך את ציר ה- y בחלקו השלילי (ישר i), הוא יכול להיות מקביל לציר ה- y ולחתוך את ציר ה- x בחלקו החיובי (ישר h), והוא יכול להיות מקביל לציר ה- y ולחתוך את ציר ה- x בחלקו השלילי (ישר j).



תרגול ישרים

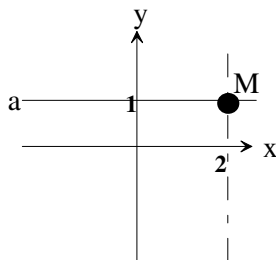


1. באילו רביעים עובר הישר a?
2. איזה ציר נחתך על ידי הישר c?
3. ישר b חותך את ציר ה-x בחלקו השלילי / חיובי ואת ציר ה-y בחלקו השלילי / חיובי (הקף את המילה המתאימה).
4. הישר d מקביל לציר ה-_____
5. ישר העובר בראשית הצירים עובר ב- 2 / 3 / 4 רביעים (הקף את המספר הנכון)
6. ישר המקביל לאחד הצירים עובר ב- 2 / 3 / 4 רביעים (הקף את המספר הנכון)
7. כמה נקודות חיתוך לכל היותר יש לישר מסוים עם ציר ה-x?
8. כמה נקודות חיתוך לכל היותר יש לישר מסוים עם ציר ה-y?
9. מהו מספר הרביעים המקסימלי בהם יכול לעבור ישר אחד?

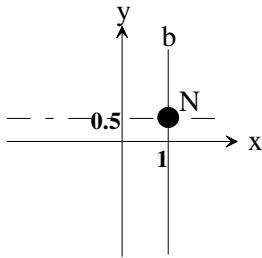
ישרים המקבילים לצירים

כלל:

- ערכן של כל הנקודות על ישר המקביל לציר ה-x זהה ושווה לערך ה-y בנקודת המפגש בין ציר ה-y והישר.
- ערכן של כל הנקודות על ישר המקביל לציר ה-y זהה ושווה לערך ה-x בנקודת המפגש בין ציר ה-x והישר.



למשל, הישר a מקביל לציר ה-x. בנקודת המפגש של הישר a עם ציר ה-y ערך ה-y הוא 1, ולכן בכל הנקודות על הישר a ערך ה-y הוא 1, והדבר היחיד שמשתנה הוא ערך ה-x.
 למשל, שיעורי הנקודה M הנמצאת על הישר a הם (2,1).



הישר b מקביל לציר ה- y . בנקודת המפגש של הישר b עם ציר ה- x ערך ה- x הוא 1 , ולכן בכל הנקודות על הישר b ערך ה- x הוא 1 , והדבר היחיד שמשתנה הוא ערך ה- y . למשל, שיעורי הנקודה N הנמצאת על הישר b הם $(1, 0.5)$.

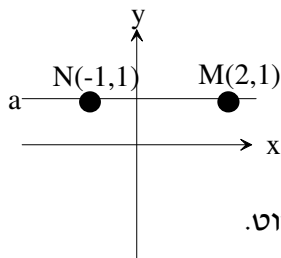
תרגול ישרים מקבילים לצירים

נתון: הישר a מקביל לציר ה- x והישר b מקביל לציר ה- y .

1. על איזה מהישרים a ו- b יכולות להימצא שלוש הנקודות הבאות: $(5, 19)$, $(5, 8)$, $(5, 3)$?
2. על איזה ישר יכולות להימצא שלוש הנקודות הבאות: $(92, 3)$, $(0, 3)$, $(-4, 3)$?
3. אם הישר a עובר בנקודה $(9, 3)$, מהם שיעורי נקודת החיתוך בינו לבין ציר ה- y ?
4. אם הישר b עובר בנקודה $(6, 2)$, מהם שיעורי נקודת החיתוך בינו לבין ציר ה- x ?

מציאת אורכי קטעים

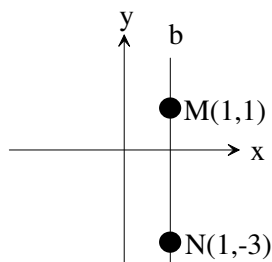
קטעים מקבילים לצירים



כאשר נתון ישר המקביל לציר ה- x ואנו מתבקשים למצוא אורך קטע מסוים על הישר, אורך הקטע יהיה שווה להפרש בין ערכי ה- x של הנקודות התוחמות את הקטע. למשל, הישר a מקביל לציר ה- x . ערכי הנקודות M ו- N נתונים בסרטוט.

$$\text{אורך הקטע } MN \text{ שווה ל: } 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

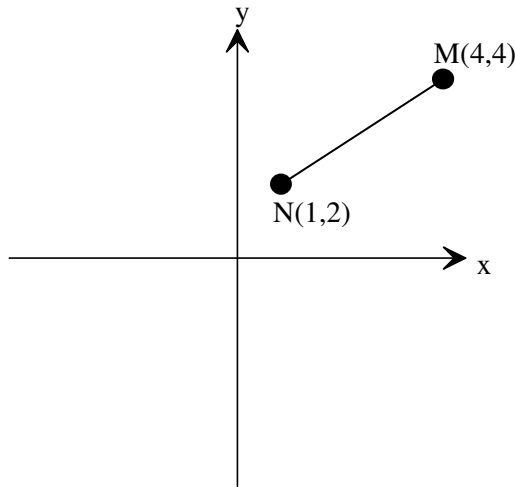
כאשר נתון ישר המקביל לציר ה- y ואנו מתבקשים למצוא אורך קטע מסוים על הישר, אורך הקטע יהיה שווה להפרש בין ערכי ה- y של הנקודות התוחמות את הקטע.



$$\text{אורך הקטע } MN \text{ הוא } 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$$

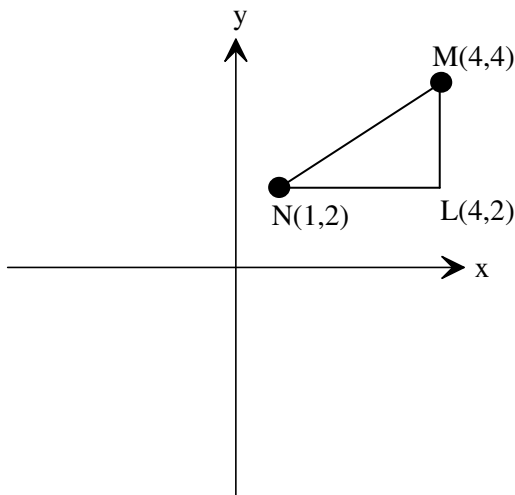


קטעים שאינם מקבילים לצירים



כאשר קטע אינו מקביל לאף אחד מהצירים, על מנת למצוא את אורכו נצייר קטעים מקבילים לשני הצירים ליצירת משולש ישר זווית שהיתר שלו הוא הקטע המבוקש.

למשל, נתון קטע MN, וכמו כן נתון כי שיעורי הנקודה M הם (4,4) ושיעורי הנקודה N הם (1,2). מה אורכו של הקטע MN?



על מנת למצוא את אורכו של הקטע MN נמקם את הנקודות M ו-N ונצייר קטעים המקבילים לצירים – ML המקביל לציר ה-y ו-NL המקביל לציר ה-x. מכיוון ש-ML מקביל לציר ה-y, ערכי ה-x של כל הנקודות על הקטע זהים, ולכן ערך ה-x של הנקודה L שווה לערך ה-x של הנקודה M, כלומר שווה ל-4. כמו כן, מכיוון ש-NL מקביל לציר ה-x, ערכי ה-y של כל הנקודות על הקטע זהים, ולכן ערך ה-y של הנקודה L שווה לערך ה-y של הנקודה N, כלומר שווה ל-2. מכאן, ששיעורי הנקודה L הם (4,2).

קיבלנו משולש ישר זווית שניצביו הם ML ו-NL והיתר שלו הוא MN. במשולש ישר זווית מתקיים משפט פיתגורס לפיו אם A ו-B הם הניצבים ו-C הוא היתר אזי: $C^2 = A^2 + B^2$. מכאן, מתקיים: $MN^2 = ML^2 + NL^2$. את האורכים של ML ו-NL אנו יודעים למצוא מפני שהם מקבילים לצירים. אורך ML המקביל לציר ה-y שווה להפרש בין ערכי ה-y של הנקודות M ו-L, כלומר ל- $4 - 2 = 2$. אורך NL המקביל לציר ה-x שווה להפרש בין ערכי ה-x של הנקודות N ו-L, כלומר ל- $4 - 1 = 3$. נציב במשוואת פיתגורס ונמצא כי: $MN^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ ומכאן $MN = \sqrt{13}$.



תרגול מציאת מרחק של ישר כאשר נתונים שיעורי הנקודות

מצא את המרחקים בין זוגות הנקודות הבאים :

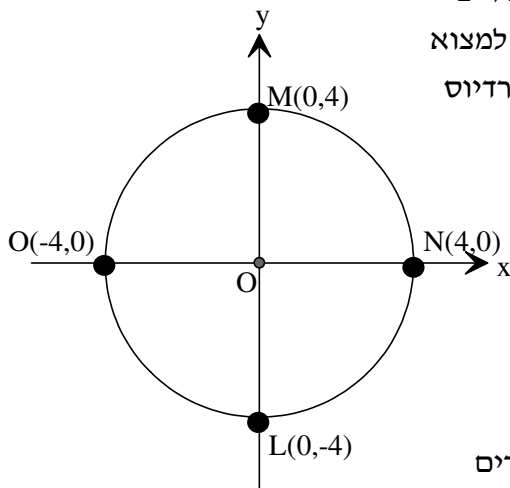
1. $(5,2)$ ו- $(1,2)$

2. $(8,4)$ ו- $(8,-2)$

3. $(9,4)$ ו- $(-1,-3)$

צורות גיאומטריות על מערכת צירים

על מערכת הצירים לעתים יסורטטו צורות כמו מעגלים, מרובעים וכו', ולשם מציאת הגדלים הנדרשים בשאלות מסוג זה יש לדעת את חוקי הגיאומטריה כפי שהם מופיעים בדף הנוסחאות ובשיעורי הגיאומטריה.



למשל, ניתן לסרטט מעגל על מערכת צירים כך שראשית הצירים היא מרכז המעגל. אם נתון כי קוטר המעגל שווה ל-8, ניתן למצוא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים, מתוך ידיעה כי רדיוס המעגל שווה למחצית מהקוטר, וכי שיעורי ראשית הצירים הם $(0,0)$. הקטע ML עובר דרך מרכז המעגל (הוא עובר דרך ראשית הצירים שכן מדובר בציר y) ולכן הוא קוטר ושווה ל-8. כמו כן, מכיוון שראשית הצירים היא מרכז המעגל, הקטעים MO ו- LO הם רדיוסים ולכן שווים ל-4 כל אחד. הנקודה M נמצאת על ציר ה- y ולכן ערך ה- x שלה הוא 0. מכיוון שערך ה- y בראשית הצירים הוא 0, ואורך MO הוא 4, ניתן להסיק כי ערך ה- y של הנקודה M

הוא 4. מכאן, שנקודת החיתוך של המעגל עם החלק החיובי של ציר ה- y היא $(0,4)$. באופן דומה, ניתן

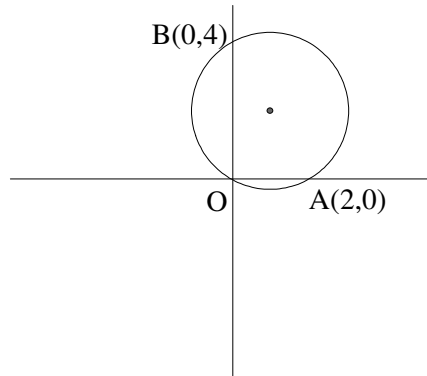
להסיק כי ערך ה- y של הנקודה L הוא $(0,-4)$ ולכן הנקודה L היא $(0,-4)$.

כמו כן, ערך ה- y על ציר ה- x הוא 0, ובדרך דומה ניתן להסיק כי נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x הן הנקודות $(4,0)$ ו- $(-4,0)$.



שאלה לדוגמא

מעגל חותך את הצירים בנקודות A, O ו-B.
 על פי נתוני הסרטוט, מה אורכו של רדיוס המעגל?



(1) $\sqrt{10}$

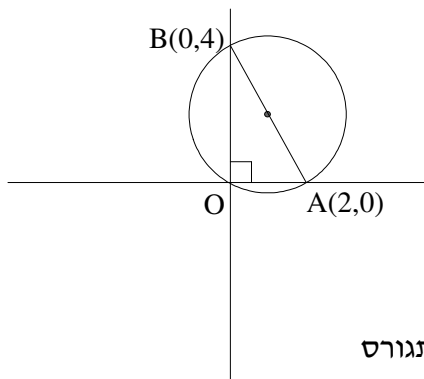
(2) $\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{15}$

(4) לא ניתן לדעת מהנתונים

פתרון

הצירים מאונכים זה לזה ולכן זווית BOA היא זווית ישרה. כמו כן, זוהי זווית היקפית במעגל, ולפי חוקי המעגל זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר. לכן, AB הוא קוטר המעגל. הנקודות A ו-B נתונות לנו ולכן נוכל לדעת את אורכי הניצבים



OA ו-OB במשולש ישר הזווית OAB.

שיעורי הנקודה בראשית הצירים הם (0,0). הנקודה A נמצאת

על ציר ה-x, ולכן אורך OA שווה להפרש ערכי ה-x של הנקודות:

$$2 - 0 = 2. \text{ באופן דומה, אורך OB שווה ל-} 4. \text{ מכאן, לפי משפט פיתגורס}$$

$$\text{מתקיים: } AB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \text{ ומכאן } AB = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{רדיוס מעגל שווה למחצית הקוטר ולכן הרדיוס שווה ל-} \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

התשובה הנכונה היא (2).

לסיכום

נושא הגיאומטריה האנליטית אינו מסובך וכדאי לתרגלו על מנת לקבל את הנקודות מנושא זה במבחן. לעתים אנו נדרשים לדעת גם את חוקי הגיאומטריה ולכן אם אינכם בטוחים בהם עדיין כדאי לחזור עליהם.



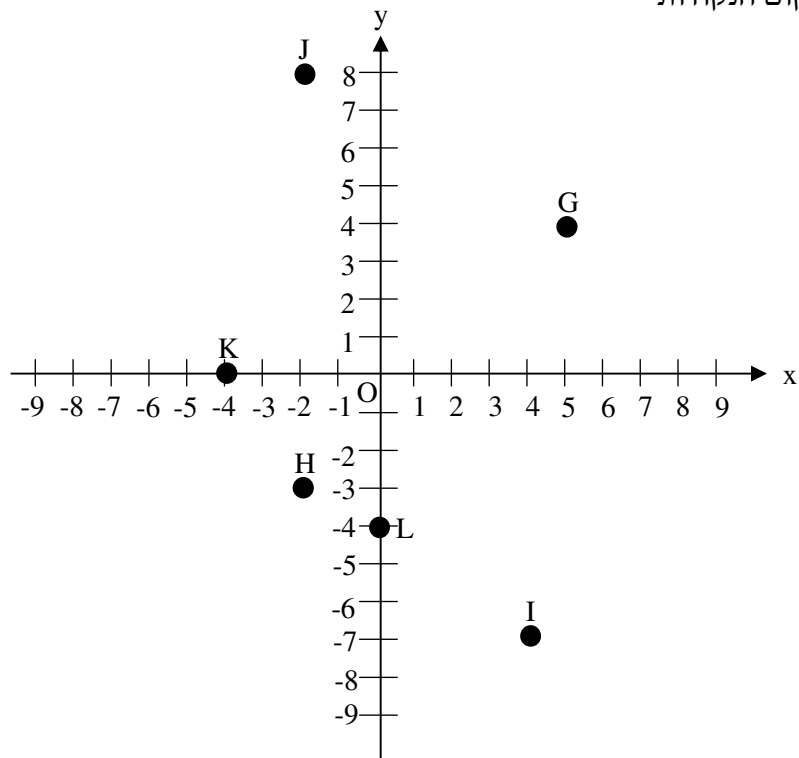
פתרונות תרגול מרחקים

1. המרחק בין הנקודות 8 ו-5 הוא $8 - 5 = 3$.
2. המרחק בין הנקודות 4 ו-(-8) הוא $4 - (-8) = 12$.
3. המרחק בין הנקודות 0 ו-(-5) הוא $0 - (-5) = 5$.
4. המרחק בין הנקודות (-3) ו-(-7) הוא $(-3) - (-7) = (-3) + 7 = 4$.
5. המרחק בין הנקודות 9 ו-(-9) הוא $9 - (-9) = 18$.

פתרונות שיעורי נקודות

1. שימו לב לסדר כתיבת הערכים - ערך ה-x בצד שמאל וערך ה-y בצד ימין בסוגריים
שיעורי הנקודה A הם: $A(3,6)$, כלומר $x = 3$ ו- $y = 6$.
שיעורי הנקודה B הם: $B(-3,1)$, כלומר $x = (-3)$ ו- $y = 1$.
שיעורי הנקודה C הם: $C(3,-3)$, כלומר $x = 3$ ו- $y = (-3)$.
שיעורי הנקודה D הם: $D(-9,-4)$, כלומר $x = (-9)$ ו- $y = (-4)$.
שיעורי הנקודה E הם: $E(8,0)$, כלומר $x = (8)$ ו- $y = (0)$.
שיעורי הנקודה F הם: $F(0,4)$, כלומר $x = 0$ ו- $y = 4$.

2. מיקום הנקודות





תרגול רביעים

- בנקודה A ערך ה- x הוא חיובי וערך ה- y גם הוא חיובי, לכן הנקודה נמצאת ברביע הראשון.
בנקודה B ערך ה- x הוא שלילי וערך ה- y הוא חיובי, לכן הנקודה נמצאת ברביע השני.
בנקודה C ערך ה- x הוא שלילי וערך ה- y שלילי גם הוא, לכן הנקודה נמצאת ברביע השלישי.
בנקודה D ערך ה- x הוא חיובי וערך ה- y הוא חיובי, לכן הנקודה נמצאת ברביע השני.
בנקודה E ערך ה- x הוא חיובי וערך ה- y הוא שלילי, לכן הנקודה נמצאת ברביע הרביעי.

פתרונות ישרים

1. הישר a עובר ברביעים הראשון, השני והרביעי.
2. הישר c חותך את ציר y (ומקביל לציר ה- x).
3. הישר b חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי ואת ציר ה- y בחלקו השלילי.
4. הישר d מקביל לציר ה- y .
5. ישר העובר בראשית הצירים עובר ב- 2 רביעים בלבד – 1 ו- 2 או 3 ו- 4.
6. ישר המקביל לאחד הצירים עובר ב- 2 רביעים בלבד – 1 ו- 2, 2 ו- 3, 3 ו- 4 או 1 ו- 4, אבל לא 1 ו- 3 או 2 ו- 4.
7. ישר אחד יכול לחתוך לכל היותר פעם אחת את ציר ה- x .
8. באותו אופן, ישר אחד יכול לחתוך לכל היותר פעם אחת את ציר ה- y .
9. ישר לא יכול לעבור ביותר מ- 3 רביעים (במקרה זה הוא חותך את הצירים בנקודות שונות).

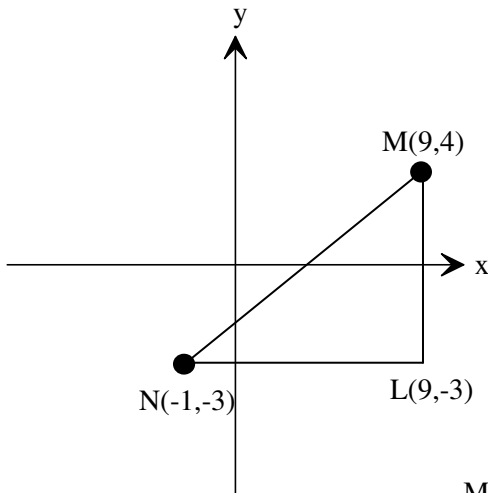
פתרון ישרים מקבילים לצירים

1. ערך ה- x של הנקודות $(5,3)$, $(5,8)$, $(5,19)$ זהה ושווה ל- 5. כאשר ערכי ה- x בנקודות שונות על ישר זהים, הישר מקביל לציר ה- y , לכן הנקודות הנתונות נמצאות על ישר b .
2. ערך ה- y של הנקודות $(-4,3)$, $(0,3)$, $(9,3)$ זהה ושווה ל- 3. כאשר ערכי ה- y בנקודות שונות על ישר זהים, הישר מקביל לציר ה- x , לכן הנקודות הנתונות נמצאות על ישר a .
3. ישר a מקביל לציר ה- x , כלומר ערכי ה- y עליו זהים לכל אורכו, ולכן בנקודת החיתוך עם ציר ה- y ערך ה- y שווה גם הוא ל- 3 (נתון שהישר עובר בנקודה $(9,3)$). כמו כן, נקודת החיתוך עם ציר ה- x נמצאת על ציר ה- y ולכן ערך ה- x שלה הוא 0. מכאן, ששיעורי נקודת החיתוך בין הישר לבין ציר ה- y הם $(0,3)$.
4. באופן דומה לפתרון שאלה 3, ישר b מקביל לציר ה- y , ולכן לכל אורכו ערכי ה- x זהים. מכיוון שהוא עובר בנקודה $(6,2)$, כלומר ערך ה- x בנקודה אחת עליו הוא 6, גם בנקודת החיתוך עם ציר ה- x ערך ה- x יהיה 6. כמו כן, ערך ה- y יהיה שווה ל- 0 בנקודת החיתוך (נקודת החיתוך נמצאת על ציר ה- x). נקודת החיתוך בין הישר לבין ציר ה- x היא $(6,0)$.



פתרון מציאת מרחק של ישר כאשר נתונים שיעורי הנקודות

1. ערכי ה- y של הנקודות $(5,2)$ ו- $(1,2)$ זהים, כלומר, הן נמצאות על ישר המקביל לציר ה- x . לכן, המרחק בין הנקודות שווה להפרש בין ערכי ה- x שלהן: $5 - 1 = 4$.
2. ערכי ה- x של הנקודות $(8,4)$ ו- $(8,-2)$ זהים, כלומר הן נמצאות על ישר המקביל לציר ה- y . לכן, המרחק בין הנקודות שווה להפרש בין ערכי ה- y שלהן: $4 - (-2) = 4 + 2 = 6$.
3. לשם חישוב המרחק בשאלה זו יש לסרטט את הנקודות על מערכת צירים:



נוריד ישרים מקבילים לצירים הנפגשים בנקודה L.

ערך ה- x של הנקודה L זהה לערך ה- x של

הנקודה M, ושווה ל- 9. ערך ה- y של הנקודה

L זהה לערך ה- y של הנקודה N ושווה ל- (-3) .

אורך ML שווה להפרש בין ערכי ה- y של

הנקודות: $4 - (-3) = 7$.

אורך NL שווה להפרש בין ערכי ה- x של

הנקודות: $9 - (-1) = 10$. מכאן, לפי משפט

פיתגורס, מתקיים: $MN^2 = 7^2 + 10^2 = 49 + 100 = 149$

ומכאן $MN = \sqrt{149}$.