

# בעיות כמותיות

---

בעיות יחס

### בעיות יחס

#### מבוא

שאלות בנושא יחס במבחן יכולות לכלול חישוב של ערך מספרי מדויק בהינתן יחס בין קבוצות של גורמים, או חישוב של יחס בהינתן מספר מדויק של גורמים. בנוסף, נושא היחס משולב בנושאים אחרים מתחום החשיבה הכמותית. לדוגמה: בבעיות תנועה יכולים להופיע נתונים אודות היחס בין חלק הדרך שעברנו לחלק שעוד לא עברנו, בגיאומטריה יכולות להופיע שאלות על יחס בין זוויות או יחס בין אורכי צלעות או קטעים. במקרים רבים, הדרך הנוחה ביותר לפתור בעיות מילוליות היא באמצעות שימוש ביחסים. למעשה, כמעט כל נושא בפרקי החשיבה הכמותית בבחינה עשוי לשלב אלמנטים של יחס.

- במהלך השיעור יופיעו תרגילים. פתרונות מלאים לתרגילים אלה מופיעים בסוף השיעור.

#### הגדרה

יחס הוא מושג המגדיר קשר בין כמויות או גדלים של גורמים. קשר זה מביע  $\frac{a}{b}$  כמה גדול או קטן גורם אחד מגורם אחר. גורמים אלה יכולים להיות בני-אדם, בעלי-חיים או חפצים. לדוגמה: אם מספר העיזים גדול פי 5 ממספר הארנבים, ניתן לומר כי היחס בין מספר העיזים למספר הארנבים הוא 5:1.

#### איך לקרוא יחס

היחס בין  $x$  ל- $y$  נרשם  $x:y$ . עברית נקראת מימין לשמאל ואילו יחס נקרא משמאל לימין. לכן, הגורם הראשון שמופיע במילים מיוצג על ידי המספר שמופיע משמאל ביחס. לדוגמה: אם היחס בין גורם א' לגורם ב' הוא 2:1, 1 מסמל את יחידות היחס של גורם א' ו-2 מסמל את יחידות היחס של גורם ב'. עם זאת, אם נאמר שהיחס בין גורם א' לגורם ב' הוא 1:2 בהתאמה, הכוונה היא "להתאים" את קריאת המספרים לרצף הקריאה בעברית. לכן, כאן דווקא 1 מסמל את יחידות היחס של גורם ב' ו-2 מסמל את יחידות היחס של גורם א'. אם מופיעות המילים "לטובת" או "לרעת", היחס ייקרא בהתאם למילים אלו. למשל, אם היחס בין גורם א' לגורם ב' הוא 1:2 לטובת  $x$ , אז  $x$  יקבל את המספר הגדול יותר ביחס (2 יחידות יחס), ללא קשר למיקומו.

# בעיות כמותיות

## בעיות יחס

### משמעות היחס, הרחבה וצמצום

כאשר נאמר שהיחס בין מספר העגבניות במקרר למספר המלפפונים במקרר הוא 1:1, פירוש הדבר הוא שעבור כל עגבנייה הנמצאת במקרר, יש במקרר בדיוק מלפפון אחד. כלומר, מספרם שווה.

אם נאמר שהיחס בין מספר העגבניות במקרר למספר המלפפונים במקרר הוא 1:2, פירוש הדבר הוא שעבור כל עגבנייה הנמצאת במקרר יש במקרר בדיוק שני מלפפונים. כלומר, במקרר יש פי 2 מלפפונים מעגבניות.

**שימו לב:** אין הדבר אומר בהכרח שבמקרר יש בדיוק עגבנייה אחת ושני מלפפונים.

יחס אינו מספק נתונים על כמות הגורמים, אלא רק על הקשר בין הכמויות האלו.

אם נתון, בנוסף ליחס בין מספר העגבניות במקרר למספר המלפפונים במקרר, כי במקרר יש 5 עגבניות, ניתן לחשב את מספר המלפפונים במקרר. אם היחס בין מספר העגבניות במקרר למספר המלפפונים במקרר הוא 1:2, פירוש הדבר שבמקרר יש פי 2 מלפפונים. לפיכך, במקרר יש  $2 \cdot 5 = 10$  מלפפונים.

באופן דומה, אם במקרר יש 30 מלפפונים, נוכל לדעת שיש במקרר 15 עגבניות. זאת כיוון שמספר המלפפונים במקרר גדול פי 2 ממספר העגבניות במקרר.

**שימו לב:** היחס 1:2 שווה ליחס 5:10 ששווה ליחס 30:15.

הסיבה היא שיחס מורכב משני חלקים, בדומה למונה ולמכנה של שבר, וניתן להרחיבו או לצמצמו לפי הצורך. זאת בתנאי שהצמצום או ההרחבה נעשים על שני חלקי היחס.

לדוגמה: היחס 1:2 שווה ליחס  $1:1$  על ידי צמצום היחס ב-2. לפי היחס המצומצם, עבור כל חצי עגבנייה, יש במקרר מלפפון אחד.

**כלל:** אם היחס בין גורם x לגורם y הוא 1:1, הכמות של גורם x זהה לכמות של גורם y. לדוגמה: אם היחס בין מספר התפוזים למספר הבננות הוא 1:1, פירוש הדבר הוא שמספר התפוזים שווה למספר הבננות.

**כלל:** יחס אינו מספק מידע על כמות או גודל, אלא רק על הקשר בין כמויות או גדלים של גורמים. לדוגמה: אם היחס בין מספר סרטי הקומדיה למספר סרטי הדרמה הוא 3:5, פירוש הדבר הוא שמספר סרטי הדרמה גדול פי  $\frac{5}{3}$  ממספר סרטי הקומדיה. לא ניתן לדעת מה מספר סרטי הקומדיה ומה מספר סרטי הדרמה.

**כלל:** ניתן להרחיב או לצמצם יחס מבלי שתשתנה משמעותו, על ידי כפל או חלוקה של שני חלקי היחס באותו המספר.

לדוגמה: אם היחס בין מספר המחשבים למספר המקלדות הוא 6:2, ניתן לצמצם את היחס ב-2 ולקבל את היחס המצומצם 3:1. לחילופין, ניתן להרחיב את היחס פי 2 ולקבל את היחס המורחב 12:4.

**כלל:** אם נרצה להרחיב או לצמצם יחס  $a:b$  כלשהו, כך שבחלקו השמאלי (או הימני) של היחס מספר יחידות היחס יהיה  $c$  – נכפול את מספר יחידות היחס ביעד  $c$ , ונחלק במספר הנוכחי  $a$  (או

$b$ ). כלומר, נכפול את מספר יחידות היחס הנתון ב-  $\frac{c}{a}$  (או ב-  $\frac{c}{b}$ ).

לדוגמה: אם נרצה להרחיב את היחס 10:4, כך שבחלקו השמאלי של היחס מספר יחידות היחס

יהיה 8 – נכפול את מספר יחידות היחס ב-  $2 = \frac{8}{4}$ . כך, מתקבל היחס 20:8.

לחילופין, אם נרצה לצמצם את היחס 10:4, כך שבחלקו השמאלי של היחס מספר יחידות היחס

יהיה 2 – נכפול את מספר יחידות היחס  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ . כך, מתקבל היחס 5:2.

**יחס הוא צורת הצגה שונה של שבר.**

לדוגמה: אם נתון כי היחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות בכיתה הוא 3:1, המשמעות

היא שיש בכיתה פי 3 יותר בנות מבנים. לכן, ניתן לומר כי מספר הבנים בכיתה מהווה  $\frac{1}{3}$  ממספר

הבנות בכיתה.

**כלל:** כאשר נתון שהכמות של גורם א' גדולה פי  $x$  מהכמות של גורם ב', היחס בין גורם א' לגורם

ב' שווה ל-  $x:1$ .

לדוגמה: אם להילה פי 8 יותר סוכריות מאשר לגילי, אז היחס בין מספר הסוכריות של הילה

למספר הסוכריות של גילי הוא 8:1.

### תרגול הגדרת ומשמעות יחס

1. היחס 2:5 שווה ליחס 4: \_\_\_\_
2. היחס 1:2 שווה ליחס \_\_\_\_ :  $\frac{1}{2}$
3. היחס 5:6 שווה ליחס 1: \_\_\_\_ וליחס \_\_\_\_ : 1
4. היחס 4:9 שווה ליחס \_\_\_\_ : 6 וליחס 6: \_\_\_\_
5. היחס a:b שווה ליחס 1: \_\_\_\_ וליחס \_\_\_\_ : c
6. היחס בין מספר המעילים למספר זוגות המכנסיים בארון הוא 1:3 בהתאמה. מספר המעילים בארון גדול פי \_\_\_\_ ממספר זוגות המכנסיים בארון.
7. היחס בין מספר המגפיים למספר הסנדלים שיש לעדי הוא 5:7. מספר הסנדלים של עדי גדול פי \_\_\_\_ ממספר המגפיים של עדי.
8. לשימי פי 5 יותר דיסקים מאשר לדודי. היחס בין מספר הדיסקים של שימי לבין מספר הדיסקים של דודי הוא \_\_\_\_ : \_\_\_\_.
9. לאורית יש רבע מכמות השפתונים שיש לנועה. היחס בין מספר השפתונים שיש לאורית לבין מספר השפתונים שיש לנועה הוא \_\_\_\_ : \_\_\_\_.
10. היחס בין מספר התוכניות ברדיו חיפה למספר התוכניות ברדיו אילת הוא 3:2. מספר התוכניות ברדיו חיפה מהווה \_\_\_\_ ממספר התוכניות ברדיו אילת.

### תרגול שאלות בהן נתון היחס מפורשות

1. בארון של רינה מספר החולצות מהווה  $\frac{3}{5}$  ממספר זוגות המכנסיים. אם נתון כי לרינה 6 חולצות, כמה זוגות מכנסיים יש לה?
2. היחס בין מספר העגילים לבין מספר השרשראות של שלומית הוא 4:9. פי כמה גדול מספר השרשראות שיש לשלומית ממספר העגילים שיש לה?
3. היחס בין מספר הבנות לבין מספר התפוחים בדוכן של משה הוא 2:7. אם נתון כי בדוכן יש 28 תפוחים, כמה בנות יש בדוכן?
4. היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה הוא 1:3 בהתאמה. אם נתון כי בכיתה 100 בנות, כמה בנים יש בכיתה?
5. היחס בין סרטי האימה לסרטי הקומדיה שיש לשירה הוא 1:1. מה ההפרש בין מספר סרטי האימה לבין מספר סרטי הקומדיה שיש לשירה?
6. בגינה של מירית היחס בין מספר הורדים למספר הכלניות הוא 5:6 בהתאמה. מה יכול להיות ההפרש בין מספר הורדים למספר הכלניות בגינה של מירית?

### הסקה מכמויות של גורמים שונים לגבי היחס ביניהם

על אף שלא ניתן להסיק מיחס בלבד על כמויות של גורמים, ניתן להסיק מכמויות של גורמים שונים לגבי היחס בין הגורמים.

לדוגמה: אם נתון כי במטבח יש 3 צנצנות ריבת תות ו-30 צנצנות ריבת משמש, אז היחס בין מספר צנצנות ריבת התות במטבח למספר צנצנות ריבת המשמש במטבח הוא 3:30. נוכל לצמצם את היחס פי 3, ולקבל שהיחס המצומצם הוא 1:10.

כמו כן, ניתן לומר שמספר צנצנות ריבת המשמש במטבח גדול פי 10 ממספר צנצנות ריבת התות

במטבח, או שמספר צנצנות ריבות התות במטבח מהווה  $\frac{1}{10}$  ממספר צנצנות ריבת המשמש

במטבח. משמעות יחס זה היא שיש במטבח 10 צנצנות ריבת משמש על כל צנצנת ריבת תות.

### תרגול מציאת היחס

1. רותי אפתה 60 עוגיות ו-20 בורקסים. מה היחס בין מספר העוגיות למספר הבורקסים שאפתה רותי?
2. שייקספיר כתב 25 מחזות ו-150 סונטות. השלימו: מספר המחזות שכתב שייקספיר מהווה \_\_\_\_\_ ממספר הסונטות שכתב.
3. לבתיה מטע זיתים ופרדס תפוזים. במטע הזיתים 80 עצי זית. בפרדס 30 עצי תפוז. מה היחס בין מספר עצי הזית במטע של בתיה לבין מספר עצי התפוז בפרדס של בתיה?
4. בקלמר של רננה פי 6 יותר מחקים מאשר בקלמר של עמית. מה היחס בין מספר המחקים של עמית למספר המחקים של רננה?
5. מספר הספרים שיש למוטי שווה למספר הספרים שיש לדובי. מה היחס בין מספר הספרים של מוטי לִפְעַמַיִם מספר הספרים של דובי?
6. טוביה חולב 45 ליטרים בכל יום. מילי חולבת 15 ליטרים בכל יום. מה היחס בין מספר הליטרים שחולב טוביה בשבוע לבין מספר הליטרים שחולבת מילי בשבוע?

### ערכה של יחידת יחס

יחס הוא הקשר שבין כמויות הגורמים, אך כמויות הגורמים לא ידועות מהיחס לבדו. כמויות הגורמים יכולות להיות הרחבה או צמצום של יחידות היחס המייצגות כל גורם ביחס הנתון. הערך בו יש להרחיב או לצמצם את היחס הנתון, בכדי למצוא את כמויות הגורמים, הוא ערכה של יחידת יחס אחת.

לדוגמה: היחס בין מספר התפוזים למספר הבננות הוא 3:2. אם ישנם 20 תפוזים ו-30 בננות, ערכה של יחידת יחס אחת ביחס זה הוא 10 פריטים. זאת כיוון שאם מרחיבים את היחס הנתון פי 10, מתקבל היחס המורחב 30:20, יחס בין הכמות האמיתית של התפוזים לכמות האמיתית של הבננות.

ניתן לחבר ולחסר יחידות יחס, גם אם ערכה של יחידת יחס אחת לא ידוע, כל עוד ידוע שערכן של יחידות היחס זהה.

לדוגמה: היחס בין מספר התפוזים למספר הבננות הוא 3:2. לפיכך, ההפרש בין מספר התפוזים למספר הבננות מיוצג על ידי 1 (3-2) יחידת יחס. אם ידוע בנוסף כי היחס בין מספר האגוזים למספר הבוטנים הוא 7:5. לא ניתן לומר כי מספר התפוזים והבוטנים יחד מיוצג על ידי 9 (2+7) יחידות יחס, מפני שיתכן כי ערכה של יחידת יחס שונה בכל אחד מהיחסים.

### שימוש בנעלם ובניית משוואות על פי יחס נתון

שאלות יחס רבות ניתנות לפתרון על ידי שימוש בנעלם  $x$  שייצג את ערכה של יחידת יחס אחת. לדוגמה, אם נתון כי היחס בין מספר המדפסות בחנות למספר הסורקים בחנות הוא 5:2, ויש בחנות בסך הכל 28 סורקים ומדפסות, ניתן לומר שמספר המדפסות בחנות הוא  $2x$  ומספר הסורקים בחנות הוא  $5x$ . כך, ניתן לבנות את המשוואה הבאה:  $2x + 5x = 28$ , ומכאן שמתקבל כי  $7x = 28$ . על ידי חלוקת שני אגפי המשוואה ב-7 מתקבל כי  $x = 4$ . כלומר, מספר המדפסות בחנות הוא  $2x = 2 \cdot 4 = 8$  (יש לשים לב כיצד הגדרנו את הכמויות, כלומר מספר המדפסות בחנות הוא  $2x$  ולא  $x$ , ולכן יש לכפול את ערכו של הנעלם  $x$  ב-2 על מנת למצוא את מספר המדפסות בחנות). כמו כן, מספר הסורקים בחנות הוא  $5 \cdot x = 5 \cdot 4 = 20$ .

לעיתים, היחס משתנה בעקבות הוספה או הפחתה של כמויות. גם במקרה זה ניתן לבנות משוואה מתאימה, ולמצוא את הערך המספרי של הגדלים או הכמויות של הגורמים המתוארים ביחס.

### שאלה לדוגמה

נתון כי היחס בין מספר המדפסות במשרד לבין מספר הסורקים במשרד הוא 5:2. לאחר קניית 10 מדפסות נוספות למשרד, היחס בין מספר המדפסות במשרד לבין מספר הסורקים במשרד הוא 2:1. מה סך המדפסות והסורקים במשרד לאחר קניית המדפסות הנוספות?

### פתרון

אילו ערכה של יחידת יחס אחת ביחסים הנתונים היה ידוע, ניתן היה להכפיל את מספר יחידות היחס המייצגות את מספר המדפסות או הסורקים בערכה של יחידת יחס אחת וכך למצוא את מספר המדפסות והסורקים במשרד. ערכה של יחידת יחס אחת אינו ידוע, לכן ניתן לסמן אותו בתור נעלם  $x$ . 2 יחידות יחס מייצגות את מספר המדפסות במשרד לפני קניית המדפסות הנוספות, לכן מספר המדפסות הראשוני הוא  $2x$ . 5 יחידות יחס מייצגות את מספר הסורקים, לכן מספר הסורקים הראשוני הוא  $5x$ . לאחר הוספת 10 מדפסות, מספר המדפסות במשרד הוא  $2x+10$ . כמו כן, היחס החדש הוא 2:1, כלומר, מספר הסורקים כפול ממספר המדפסות. ניתן לבנות את המשוואה הבאה:  $5x = 2(2x + 10)$ , כיוון שכדי להגיע לשוויון עלינו להכפיל את מספר המדפסות פי 2. כעת, יש לפשט את המשוואה:  $5x = 4x + 20$ . על ידי העברת אגפים, מתקבל כי  $x = 20$ . לכן, מספר המדפסות הראשוני במשרד, טרם קניית המדפסות הנוספות, הוא  $2x = 2 \cdot 20 = 40$  ומספר הסורקים הראשוני במשרד הוא  $5x = 5 \cdot 20 = 100$ . מספר המדפסות, לאחר קניית המדפסות הנוספות, הוא  $2x + 10 = 40 + 10 = 50$  ומספר הסורקים, הכפול ממספר המדפסות, הוא  $2 \cdot (2x + 10) = 2 \cdot 50 = 100$ . לכן, סך המדפסות והסורקים במשרד לאחר קניית המדפסות הנוספות הוא  $100 + 50 = 150$ .

דרך נוספת אפשרית, אם איננו רוצים לעשות שימוש בנעלמים, היא לבחון כיצד הוספה של 10 מדפסות השפיעה על היחס שבין מספר המדפסות למספר הסורקים. במקור, היחס היה 5:2 ולאחר הוספת 10 מדפסות היחס הוא 2:1. ניתן לומר שהיחס החדש (אם נרחיב אותו) הוא 5:2.5, ומכאן שחצי יחידת היחס שנוספה למדפסות מייצגת למעשה 10 מדפסות ויחידת יחס שלמה מייצגת 20 מדפסות. מכיוון שסך יחידות היחס במקור הוא  $7(2+5)$ , המשמעות היא שהיו 140 מדפסות וסורקים יחדיו, ולאחר הוספה של 10 מדפסות, סך המדפסות והסורקים הוא 150.

### תרגול הצבת משתנים ובניית משוואות

עבור התרגילים הבאים, בנו משוואה מתאימה (אין צורך לפתור אותה).

1. לסימה פי 4.5 יותר בובות מאשר לרינת. סך הבובות של רינת וסימה הוא 66 בובות.
2. היחס בין מספר שעות הלימוד בקורס נהיגה למספר שעות הלימוד בקורס בישול הוא 12:5. ההפרש בין מספר שעות הלימוד בקורס בישול לבין מספר שעות הלימוד בקורס נהיגה הוא 35 שעות.
3. היחס בין מספר הורדים שקנה קובי לבין מספר הורדים שקנה אלי הוא 5:3. אלי נתן לקובי 2 ורדים וכעת יש לשניהם מספר זהה של ורדים.
4. היחס בין מספר הספרים שיש לחיים לבין מספר הספרים שיש ללאה הוא 3:2. חיים קנה 40 ספרים נוספים וכעת היחס בין מספר הספרים שלו למספר הספרים של לאה הוא 1:2.

### מצאת יחסים בעזרת גורם מקשר

כאשר נתון היחס בין גורם א' לגורם ב' והיחס בין גורם ב' לגורם ג', נוכל למצוא את היחס בין גורם א' לגורם ג' בעזרת גורם ב' שמהווה גורם מקשר.

לדוגמה: אם נתון כי היחס בין מספר הכיסאות בכיתה לבין מספר השולחנות בכיתה הוא 2:1 והיחס בין מספר השולחנות בכיתה לבין מספר הארונות בכיתה הוא 6:2, אז היחס בין מספר הכיסאות בכיתה לבין מספר הארונות בכיתה הוא 6:1. זאת כי נתון שיש פי 3 יותר ארונות מאשר שולחנות בכיתה וגם נתון שיש פי 2 יותר שולחנות מאשר כסאות בכיתה. לכן, יש פי 6 יותר ארונות מאשר כסאות בכיתה (יחס של 6:1).

לסיכום, ניתן לומר שכאשר מספר יחידות היחס המייצג את הגורם המשותף לשני היחסים זהה בשני היחסים, היחס בין שני הגורמים האחרים הוא פשוט היחס בין מספר יחידות היחס המייצגות אותם בשני היחסים הנתונים.

לעומת זאת, כאשר הגורם המקשר הוא בעל מספר יחידות יחס שונה בכל אחד מהיחסים, יש להרחיב או לצמצם את אחד מהיחסים כדי להביא למצב בו הגורם המשותף הוא בעל מספר זהה של יחידות יחס בשניהם. עד שלא נביא למצב בו הגורם המקשר מופיע בצורה זהה בשני היחסים, לא ניתן יהיה לעשות בו שימוש כגורם מקשר.

# בעיות כמותיות

## בעיות יחס

### שאלה לדוגמה

נתון כי היחס בין מספר המעטפות הקטנות לבין מספר המעטפות הבינוניות הוא 3:2, וגם כי היחס בין מספר המעטפות הבינוניות לבין מספר המעטפות הגדולות הוא 8:5. מה היחס בין מספר המעטפות הקטנות למספר המעטפות הגדולות?

### תשובה

הגורם המשותף - מעטפות בינוניות - הוא בעל מספר שונה של יחידות יחס בשני היחסים הנתונים. ראשית, יש להביא למצב בו הגורם המשותף הוא בעל מספר יחידות יחס זהה בשני היחסים. אם יורחב היחס 3:2 פי 5, יתקבל היחס המורחב 15:10. אם יורחב היחס 8:5 פי 3, יתקבל היחס המורחב 24:15. כעת, הגורם המשותף זהה בערכו בשני היחסים (15 יחידות יחס), ולכן ניתן להסיק כי היחס בין מספר המעטפות הקטנות לבין מספר המעטפות הגדולות הוא 10:24. לאחר צמצום היחס פי 2, יתקבל היחס המצומצם 5:12.

המחשה בעזרת טבלה:

מעטפות קטנות	מעטפות בינוניות	מעטפות גדולות	
2	3		יחס מקורי
	5	8	יחס מקורי
10	15		יחס מורחב פי 5
	15	24	יחס מורחב פי 3
10		24	יחס שהתקבל
5		12	יחס מצומצם פי 2

### תרגול מציאת יחסים

- היחס בין מספר הילדים בגן של אורה לבין מספר הילדים בגן של עירית הוא 2:1. היחס בין מספר הילדים בגן של עירית לבין מספר הילדים בגן של גלית הוא 4:2. מה היחס בין מספר הילדים בגן של אורה לבין מספר הילדים בגן של גלית?
- היחס בין מספר התפוזים לבין מספר הלימונים בשוק הוא 3:2. היחס בין מספר הלימונים לבין מספר האשכוליות בשוק הוא 7:6. מה היחס בין מספר התפוזים לבין מספר האשכוליות בשוק?
- היחס בין מספר העיזים לבין מספר הכבשים בעדר של דרור הוא 5:1. היחס בין מספר העיזים לבין מספר הפרות בעדר של דרור הוא 2:1. מה היחס בין מספר הכבשים לבין מספר הפרות בעדר של דרור?
- אמיר מבוגר מגל פי 3. תמיר מבוגר מגל פי 2. פי כמה מבוגר אמיר מתמיר?

# בעיות כמותיות

## בעיות יחס

5. היחס בין מספר האגרטלים של שושנה לבין מספר האגרטלים של מרים הוא 5:4. היחס בין מספר האגרטלים של מרים לבין מספר האגרטלים של דבורה הוא 11:9. מה היחס בין מספר האגרטלים של שושנה לבין מספר האגרטלים של דבורה?

### יחידות יחס

יחידות יחס יכולות לשמש ככלי לפתרון בעיות יחס בדרך דומה לפתרון בעזרת משוואה, אך ללא שימוש בנעלם או במשוואה.

לדוגמה: כאשר נתון כי היחס בין מספר העגבניות במקרר לבין מספר המלפפונים במקרר הוא 3:1, נובע מכך כי יחידת יחס אחת מייצגת את מספר העגבניות במקרר ו-3 יחידות יחס מייצגות את מספר המלפפונים במקרר. אם נתון כי מספר המלפפונים במקרר הוא 18, ניתן להסיק כי שלוש יחידות יחס של מלפפונים (סך יחידות היחס של מלפפונים) שוות ל-18 מלפפונים (מספר המלפפונים במקרר).

ניתן לצמצם ב-3 את היחס הנתון וכך נקבל כי יחידת יחס אחת מייצגת 6 מלפפונים. מכאן, ניתן לראות כי יחידת יחס אחת מייצגת 6 יחידות של הגורם המתואר. לכן, מכיוון שידוע כי יש יחידת יחס אחת של עגבניות, ניתן להסיק כי במקרר 6 עגבניות.  
המחשה בעזרת טבלה:

עגבניות במקרר	מלפפונים במקרר	
1	3	יחס מקורי
6	18	כמויות

ברוב המקרים, ניתן למנות את הגורמים המשתתפים ביחס רק המספרים שלמים. למשל, כל כמות של ילדים או של מכנסיים בהכרח תיוצג על ידי מספר שלם, כי לא ניתן לדבר על חצאי ילדים או על רבעי מכנסיים. במקרה כזה, סך הפריטים צריך להתחלק ללא שארית בסך יחידות היחס המייצגות אותם.

לדוגמה: אם נתון כי היחס בין מספר המכוניות הורדות למספר המכוניות הכחולות בחניון הוא 1:5, ובחניון יש רק מכוניות ורודות וכחולות, ניתן להסיק שבסך הכל יש 6 יחידות יחס המייצגות את מספר המכוניות הכולל. לכן, מספר המכוניות חייב להתחלק ב-6 ללא שארית. מסקנה זו התקבלה ללא שימוש בנעלמים ובמשוואות.

### תרגול יחידות יחס

1. השלימו : היחס בין מספר התלמידים שנכשלו למספר התלמידים שעברו את הבחינה במתמטיקה הוא 7 : 3. נוכל להסיק כי מספר התלמידים שנבחנו בבחינה בהכרח מתחלק ללא שארית במספר \_\_\_\_.
2. היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה הוא 3 : 2. אם בכיתה 9 בנות, מה מספר הבנים בכיתה?
3. היחס בין מספר הפסים בחולצה של ענבר לבין מספר הפסים בחולצה של קרן הוא 9 : 4. אם בחולצתה של קרן 18 פסים, כמה פסים בסך הכל בחולצות של קרן וענבר יחד?
4. היחס בין מספר התמונות שצילם יוחאי לבין מספר התמונות שצילם רועי הוא 13 : 8. מספר התמונות שצילמו שניהם יחד הוא 63. מה ההפרש בין מספר התמונות שצילם רועי לבין מספר התמונות שצילם יוחאי?

### שאלה לדוגמה

היחס בין גילו של גור כלבים (בימים) לגילו של גור חתולים (בימים) הוא 5 : 1. בעוד 10 ימים יהיה היחס בין גילו של גור הכלבים לגילו של גור החתולים 4 : 1. בן כמה ימים גור החתולים היום?

1. 10
2. 30
3. 50
4. 150

### פתרון

גילו של גור הכלבים היום אינו ידוע, לכן נסמן את גילו הנוכחי בתור נעלם  $x$ . היחס בין גילו של גור הכלבים לגילו של גור החתולים הוא 5 : 1. כלומר, גילו של גור החתולים גדול פי 5 מגילו של גור הכלבים. לכן, גילו של גור החתולים היום הוא  $5x$  ימים. בעוד 10 ימים, יהיה גילו של גור הכלבים  $x+10$  ימים וגילו של גור החתולים  $5x+10$  ימים. כמו כן, היחס בין גיליהם לאחר 10 ימים יהיה 4 : 1. כלומר, גילו של גור החתולים יהיה גדול פי 4 מגילו של גור הכלבים.

$$\text{לכן, ניתן לבנות את המשוואה הבאה: } 5x + 10 = 4(x + 10).$$

$$\text{מפתיחת הסוגריים יתקבל: } 5x + 10 = 4x + 40, \text{ ומהעברת אגפים: } x = 30.$$

מכיוון שגילו של גור החתולים היום הוא  $5x$  ימים, מהצבת ערכו של הנעלם  $x$  יתקבל כי גילו

$$5x = 5 \cdot 30 = 150 \text{ ימים.}$$

**התשובה הנכונה היא (4).**

# בעיות כמותיות

## בעיות יחס

### סיכום

נושא היחס יכול להופיע בפני עצמו או להשתלב בנושאים רבים אחרים: בעיות מסוגים שונים, גיאומטריה והשוואה כמותית. חשוב להבין לאיזה גורם בשאלה מתייחס כל מספר ביחס המתואר. כך תימנעו מטעויות שנגרמות מאי הבנת נתוני השאלה. כמו כן, חשוב לזכור כי יחס הוא צורת הצגה שונה של שבר, כך שניתן לעבוד עם שברים במידת הצורך.

פתרונות תרגול הגדרת ומשמעות היחס

1. ניתן לראות כי צידו השמאלי של היחס הפך מ- 2 ל- 4. כלומר, צידו השמאלי של היחס הורחב פי 2. לכן, נרחיב גם את צידו הימני של היחס פי 2, ונקבל יחס של 10:4.

2. ניתן לראות כי צידו השמאלי של היחס הפך מ- 1 ל-  $\frac{1}{2}$ . כלומר, צידו השמאלי של היחס

צומצם על ידי חלוקה ב- 2. לכן, נחלק ב- 2 גם את הצד הימני של היחס ונקבל יחס של  $1 : \frac{1}{2}$ .

3. על מנת לקבל 1 בצד הימני של היחס, צריך לחלק את היחס 5:6 ב- 6. לכן, נחלק ב- 6 גם את הצד השמאלי. נקבל יחס של  $1 : \frac{5}{6}$ . על מנת לקבל 1 בצד השמאלי של היחס, צריך לחלק ב- 5

את היחס 6:5. לכן, נחלק ב- 5 גם את הצד הימני, ונקבל יחס של  $1 : \frac{6}{5}$ .

4. על מנת לקבל 6 בצד השמאלי של היחס, צריך לכפול את היחס 4:9 במספר היעד, ולחלק במספר יחידות היחס הנוכחי בצד שמאל. לכן, נכפול את שני הצדדים של היחס ב-  $\frac{6}{4}$  ונקבל

יחס של  $9 \cdot \frac{6}{4} : 6$ . נפשט את צידו הימני של היחס ונקבל:  $6 : \frac{27}{2}$ .

על מנת לקבל 6 בצד הימני של היחס, צריך לכפול את היחס 4:9 במספר היעד, ולחלק במספר יחידות היחס הנוכחי. לכן, נכפול את שני הצדדים ב-  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ . נכפול ב-  $\frac{2}{3}$  ונקבל יחס של

$6 : \frac{2}{3} \cdot 4$ . נפשט את צידו השמאלי של היחס ונקבל:  $6 : \frac{8}{3}$ .

5. על מנת לקבל 1 יחידות יחס בחלקו הימני של היחס a:b, צריך לחלק את צידו הימני של היחס

ב- b. נחלק ב- b גם את החלק השמאלי של היחס ונקבל  $1 : \frac{a}{b}$ . על מנת לקבל c יחידות יחס

בחלקו השמאלי של היחס, צריך לכפול אותו ב-  $\frac{c}{a}$ . נכפול ב-  $\frac{c}{a}$  גם את החלק הימני של

היחס ונקבל יחס של  $c : \frac{bc}{a}$ .

## בעיות כמותיות

### בעיות יחס

6. אם היחס בין מספר המעילים למספר זוגות המכנסיים בארון הוא 3:1 בהתאמה, ניתן להסיק כי מספר המעילים גדול פי 3 ממספר זוגות המכנסיים.
7. אם היחס בין מספר המגפיים למספר הסנדלים שיש לעדי הוא 7:5, ניתן להסיק כי מספר הסנדלים שיש לעדי גדול פי  $\frac{7}{5}$  ממספר המגפיים שיש לעדי. הסיבה לכך היא שעל כל 5 מגפיים שיש לעדי - יש לעדי 7 סנדלים. לצורך המחשה, ניתן להרחיב את היחס פי  $\frac{7}{5}$  ולמצוא כי היחס המורחב שווה ל-  $\frac{7}{5}$ :1.
8. אם לשימי יש פי 5 יותר דיסקים מאשר לדודי, היחס בין כמות הדיסקים של שימי לבין כמות הדיסקים של דודי הוא 5:1 (שימו לב לסדר כתיבת יחידות היחס - הצד השמאלי צריך לייצג את כמות הדיסקים של שימי והצד הימני - את כמות הדיסקים של דודי).
9. אם לאורית יש רבע מכמות השפתונים שיש לנועה, היחס בין כמות השפתונים שיש לאורית לבין כמות השפתונים שיש לנועה הוא 1:4, או  $\frac{1}{4}$ .
10. אם היחס בין כמות התוכניות ברדיו חיפה לכמות התוכניות ברדיו אילת הוא 3:2, אז עבור כל 2 תוכניות ברדיו חיפה יש 3 תוכניות ברדיו אילת, כלומר, כמות התוכניות ברדיו חיפה מהווה  $\frac{2}{3}$  מכמות התוכניות ברדיו אילת.

### פתרונות לשאלות בהן נתון היחס מפורשות

1. על פי הנתונים, על כל 3 חולצות יש לרינה 5 זוגות מכנסיים, כלומר יש לרינה פי  $\frac{5}{3}$  מכנסיים מחולצות. לכן, אם לרינה יש 6 חולצות, נסיק כי יש לה  $6 \cdot \frac{5}{3} = 2 \cdot 5 = 10$  זוגות מכנסיים. דרך נוספת לפתרון היא הרחבת היחס פי 2. כך נקבל שהיחס בין מספר החולצות של רינה לבין מספר זוגות המכנסיים של רינה הוא  $\frac{6}{10}$ . מכאן, אם ידוע כי לרינה 6 חולצות, ניתן להסיק כי יש לרינה 10 זוגות מכנסיים.

2. אם היחס בין מספר העגילים של שלומית לבין מספר השרשראות של שלומית הוא 4:9 אז מספר השרשראות של שלומית גדול פי  $\frac{9}{4}$  ממספר העגילים של שלומית.
3. מהיחס הנתון עולה כי על כל 2 בנות שיש למשה, יש למשה 7 תפוחים. לכן, אם למשה יש 28 תפוחים, נובע מכך כי מספר הבנות שיש למשה הוא  $\frac{2}{7}$  מכמות זו. כלומר,  $8 = \frac{2}{7} \cdot 28$  בנות. דרך נוספת לפתרון השאלה היא לראות ש-28 הוא הרחבה פי 4 של הצד השמאלי ביחס שמייצג את התפוחים ( $\frac{28}{7} = 4$ ). לכן, עלינו להרחיב פי 4 גם את מספר הבנות. כך נקבל שלמשה יש 8 בנות.
4. מכיוון שהיחס הנתון הוא בהתאמה, על כל **בת** אחת יש **3 בנים**. כלומר, יש פי 3 יותר בנים מבנות בכיתה. לכן, אם יש 10 בנות בכיתה, אזי יש 30 בנים בכיתה.
5. מכיוון שהיחס הנתון הוא 1:1, נוכל להסיק שכמות סרטי האימה שווה לכמות סרטי הקומדיה. לכן, אין צורך בנתונים נוספים לגבי הכמויות המדויקות על מנת להסיק כי ההפרש בין סוגי הסרטים הוא 0 (גם אם יהיו 5 סרטים מכל סוג וגם אם יהיו 80 סרטים מכל סוג, ההפרש בין סרטי האימה לסרטי הקומדיה יהיה שווה ל-0).
6. מכיוון שבגינה של מירית היחס בין מספר הורדים למספר הכלניות הוא 6:5 בהתאמה, ההפרש בין מספר הורדים למספר הכלניות שווה ליחידת יחס אחת. ערכה של יחידת יחס אחת לא ידוע, ולכן יכול להיות שווה לכל מספר חיובי ושלים. זאת כיוון שיחידת יחס אחת מייצגת מספר פרחים, ואין שברי פרחים. לדוגמה: ייתכן שלמירית 6 ורדים ו-5 כלניות. במקרה זה, ההפרש בין מספר הפרחים הוא 1. לחילופין, ייתכן שלמירית 12 ורדים ו-10 כלניות. במקרה זה, ההפרש בין מספר הפרחים הוא 2.

### פתרונות לתרגול מציאת היחס

1. היחס בין מספר העוגיות למספר הבורקסים שאפתה רותי הוא 20:60 (שימו לב לסדר הכתיבה). לא נאמר לנו שהיחס הוא בהתאמה ולכן מספר העוגיות נמצא מצד שמאל ומספר הבורקסים מצד ימין, שכן נשאלנו על היחס בין מספר העוגיות למספר הבורקסים). נצמצם פי 20 את היחס ונקבל יחס של 1:3.

## בעיות כמותיות

### בעיות יחס

2. היחס בין מספר המחזות למספר הסונטות שכתב שייקספיר הוא  $\frac{25}{150}$ . נצמצם פי 25 את

$$\frac{1}{6}$$

3. היחס בין מספר עצי הזית בפרדס למספר עצי התפוז בפרדס הוא 30 : 80. נצמצם את היחס פי 10 ונקבל יחס של 3 : 8.

4. אם בקלמר של רננה פי 6 יותר מחקים מאשר בקלמר של עמית, אזי היחס בין מספר המחקים של עמית לבין מספר המחקים של רננה הוא 6 : 1. כלומר, על כל מחק שיש לעמית, לרננה יש 6 מחקים.

5. אם מספר הספרים של מוטי שווה למספר הספרים של דובי, אזי היחס ביניהם שווה ל- 1 : 1. כלומר, על כל ספר של מוטי יש גם לדובי ספר אחד. כדי למצוא את היחס בין מספר הספרים של מוטי לפעמיים מספר הספרים של דובי, נכפיל את מספר הספרים של דובי ב- 2. לכן, גם מספר יחידות היחס גדל פי 2. קיבלנו כי היחס בין מספר הספרים שיש למוטי לפעמיים מספר הספרים של דובי הוא : 2 : 1.

6. היחס בין מספר הליטרים שחולב טוביה בשבוע לבין מספר הליטרים שחולבת מילי בשבוע שווה ליחס בין מספר הליטרים שחולב טוביה ביום לבין מספר הליטרים שחולבת מילי ביום, זאת מכיוון שעל מנת למצוא את מספר הליטרים שכל אחד מהם חולב בשבוע, למעשה עלינו לכפול את מספר הליטרים שהם חולבים ב- 7, והדבר אינו משנה את היחס (תמיד נוכל לצמצמו בחזרה פי 7).  
לכן, היחס בין הכמות שחולב טוביה לכמות שחולבת מילי שווה ל- 15 : 45. נוכל לצמצם פי 15 ולקבל יחס מצומצם של 1 : 3.

### פתרונות תרגול הצבת משתנים ובניית משוואות

1. ראשית, היחס בין מספר הבובות של רינת למספר הבובות של סימה הוא 4.5 : 1. לשם הנוחות נרחיב את היחס פי 2, ונקבל יחס של 9 : 2. נסמן ב-  $x$  את הערך של כל יחידת יחס. לפיכך, תוצאת מכפלה של  $x$  במספר יחידות היחס של רינת (או סימה) היא מספר הבובות שיש לרינת (או לסימה). מכאן שלרינת  $2x$  בובות ולסימה  $9x$  בובות. יחד יש להן 66 בובות, לכן נוכל לבנות את המשוואה הבאה :  $2x + 9x = 66$ .

2. נסמן את  $x$  בתור הערך של כל יחידת יחס, מכאן שמספר שעות הלימוד בקורס נהיגה היא  $5x$  ומספר שעות הלימוד בקורס בישול היא  $12x$ . ההפרש בין מספר שעות הלימוד של שני הקורסים הוא  $12x - 5x = 7x$  ונתון כי ההפרש שווה ל-35 שעות, כלומר נוכל לבנות את המשוואה הבאה:  $7x = 35$ .
3. נסמן ב- $x$  את הערך של כל יחידת יחס, מכאן שקובי קנה  $3x$  ורדים ואלי קנה  $5x$  ורדים. לאחר שאלי נתן לקובי 2 ורדים יש לאלי  $5x - 2$  ורדים, ולקובי יש  $3x + 2$  ורדים. נתון כי כמות הורדים שיש לשניהם זהה לאחר ההעברה ולכן נוכל להשוות בין הכמויות:  
 $5x - 2 = 3x + 2$
4. נסמן ב- $x$  את הערך של כל יחידת יחס, מכאן שלחיים יש  $2x$  ספרים וללאה יש  $3x$  ספרים. לאחר שחיים קנה 40 ספרים נוספים, יש לו  $2x + 40$  ספרים. נתון כי לאחר שקנה את הספרים הנוספים יש לו פי 2 יותר ספרים מלאה. ללאה יש  $3x$  ספרים (שימו לב לסדר הכתיבה החדש – היחס החדש בין חיים ללאה הוא 2:1, כלומר ה-2 מתייחס לחיים וה-1 ללאה). לכן, נוכל לכתוב את המשוואה הבאה:  $2 \cdot 3x = 2x + 40$ .

### פתרונות תרגול מציאת יחסים

1. מספר הילדים בגן של גלית גדול פי 2 ממספר הילדים בגן של עירית. לכן, היחס בין מספר הילדים בגן של אורה לבין מספר הילדים בגן של גלית הוא  $2 : 1$ , כלומר שווה ל- $1 : 4$ .
2. את היחס בין מספר התפוזים למספר הלימונים נוכל להרחיב על מנת שיהיה קל יותר למצוא את היחס בין התפוזים לאשכוליות. היחס בין התפוזים ללימונים הוא  $3 : 2$  ואם נרחיב אותו פי 2 נקבל יחס של  $6 : 4$ . כעת, נראה כי מספר היחידות של הלימונים, הגורם המקשר, זהה בשני היחסים. לכן, נוכל להסיק כי היחס בין מספר התפוזים למספר האשכוליות הוא  $4 : 7$ .
3. נשים לב לאיזה גורם מתייחסות היחידות ביחסים הנתונים. ביחס הראשון, 1 מתייחס למספר העיזים ו-5 מתייחס למספר הכבשים. ביחס השני, 1 מתייחס גם הוא למספר העיזים ו-2 מתייחס למספר הפרות. לכן, מכיוון שבשני היחסים מספר העיזים מיוצג על ידי יחידת יחס אחת, היחס בין מספר הכבשים למספר הפרות בעדר הוא  $2 : 5$ .

## בעיות כמותיות

### בעיות יחס

4. אם אמיר מבוגר מגל פי 3, היחס בין גילו של אמיר לגילו של גל הוא 1:3. כמו כן, מכיוון שתמיר מבוגר מגל פי 2, היחס בין גילו של תמיר לגילו של גל הוא 1:2. מכאן, באופן דומה לשאלה הקודמת, היחס בין גילו של אמיר לגילו של תמיר הוא 2:3 (שימו לב לסדר כתיבת

$$\text{היחידות}). \text{ לכן אמיר מבוגר מתמיר פי } 1.5 = \frac{3}{2}.$$

5. מכיוון שהיחס בין מספר האגרטלים של מרים למספר האגרטלים של דבורה הוא 11:9, מספר

האגרטלים של דבורה גדול פי  $\frac{11}{9}$  ממספר האגרטלים של מרים. לפיכך, היחס בין מספר

האגרטלים של שושנה למספר האגרטלים של דבורה הוא  $5 \cdot \frac{11}{9} : 4$ . לכן, היחס שווה ל-

$$4 : \frac{55}{9} \text{ ולאחר הרחבת היחס פי 9 מתקבל יחס מורחב של } 36 : 55.$$

דרך נוספת לפתרון: מספר האגרטלים של מרים משותף לשני היחסים הנתונים, ולכן מהווה גורם מקשר. על ידי הבאתו למצב בו לגורם המשותף יש מספר זהה של יחידות יחס בשני היחסים הנתונים, ניתן להשוות בין היחסים ולמצוא את היחס הדרוש. ביחס הראשון מתואר כי למרים 5 יחידות יחס של אגרטלים, ניתן להפוך אותן ל-9 יחידות יחס של אגרטלים. על ידי

הרחבה של היחס הראשון פי  $\frac{9}{5}$ , מתקבל כי היחס בין מספר האגרטלים של שושנה למספר

האגרטלים של מרים שווה ל-9:  $9 = \frac{36}{5} : 9 = 4 \cdot \frac{9}{5}$ . כעת, לגורם המשותף – מספר האגרטלים

של מרים – יש מספר זהה של יחידות יחס בשני היחסים.

ניתן להשוות בין היחסים ולקבל כי היחס בין מספר האגרטלים של שושנה לבין מספר

$$\text{האגרטלים של דבורה הוא } 11 : \frac{36}{5}.$$

על ידי הרחבת היחס פי 5, מתקבל שהיחס המורחב הוא 55:36.

### פתרון תרגול יחידות יחס

1. סכום יחידות היחס של הנכשלים והעוברים הוא  $3 + 7 = 10$ . לכן, מספר התלמידים שנבחנו

שווה ל- $10x$ , כאשר  $x$  הוא ערך יחידת יחס אחת. ערכה של יחידת יחס אחת הוא בהכרח

מספר שלם, כי לא ייתכן שחצי אדם נבחן. לכן, מספר התלמידים שנבחנו חייב להתחלק ב-10 ללא שארית.

2. מספר הבנות בכיתה מיוצג על ידי 3 יחידות יחס. מספרן המדויק הוא 9, ולכן כל יחידת יחס מייצגת  $\frac{9}{3} = 3$  אנשים. מספר הבנים מיוצג על ידי 2 יחידות יחס ולכן מספרם הוא  $2 \cdot 3 = 6$ .
3. מספר הפסים בחולצתה של קרן מיוצג על ידי 9 יחידות יחס. מספר הפסים המדויק הוא 18, ולכן כל יחידת יחס מייצגת  $\frac{18}{9} = 2$  פסים. סך הפסים בחולצותיהן של קרן וענבר יחד מיוצג על ידי  $4 + 9 = 13$  יחידות יחס. מכאן, סך הפסים על חולצותיהן הוא  $2 \cdot 13 = 26$ .
4. סך כל התמונות שצולמו על ידי יוחאי ורועי מיוצג על ידי 21 יחידות יחס. מכיוון שהסכום המדויק של התמונות הוא 63, כל יחידת יחס מייצגת  $\frac{63}{21} = 3$  תמונות. ההפרש בין מספר התמונות מיוצג על ידי  $13 - 8 = 5$  יחידות יחס, ולכן ההפרש שווה ל-  $5 \cdot 3 = 15$  תמונות.