



## שיעור נוסחאות כפל מקוצר

### מבוא

כפל מקוצר הוא נושא הנלמד בבית הספר. הנושא פשוט וכולל בסך הכל 3 נוסחאות שצריך ללמוד בעל פה ויכולות לחסוך זמן יקר בבחינה. שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר יכול לעזור בפתרון בעיות בהן מופיעים ביטויים עם חזקות.

### הגדרה

נוסחאות הכפל המקוצר הן קיצור דרך לפתרון ביטויים המכילים מכפלות משלושה סוגים.

שלוש נוסחאות הכפל המקוצר הן:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### פיתוח הנוסחאות

הנוסחא הראשונה היא:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

ללא הנוסחא, נוכל לפתוח את הסוגריים ולפשט את הביטוי ואז נקבל:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

הנוסחא השניה היא:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

ללא הנוסחא, נוכל לפתוח את הסוגריים ולפשט את הביטוי ואז נקבל:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

הנוסחא השלישית היא:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

ללא הנוסחא, נוכל לפתוח את הסוגריים ולפשט את הביטוי ואז נקבל:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ba + ba - b^2 = a^2 - b^2$$



### תרגול נוסחאות הכפל המקוצר

פתח את הביטויים הבאים על פי נוסחאות הכפל המקוצר:

1.  $(2 + a)^2 = ?$

2.  $(2 - a)^2 = ?$

3.  $(2 + a)(2 - a) = ?$

4.  $(3a + 4)^2 = ?$

5.  $(-5 + a)^2 = ?$

6.  $(5 + a^2)^2 = ?$

7.  $(4a^2 - 1)^2 = ?$

8.  $(7a^2 + a)(7a^2 - a) = ?$

9.  $(8a - 5b)(8a + 5b) = ?$

10.  $[(x + 5)(x - 5)]^2 = ?$

חשוב לזכור כי נוסחאות הכפל המקוצר פועלות לשני הכיוונים. כלומר, ניתן לפתוח באמצעותן סוגריים, וניתן גם לכנס חזרה לסוגריים ביטויים המתאימים למבנה של הנוסחא.

### שאלה לדוגמא

$$\frac{4x^2 + 4xy + y^2}{-2x - y} = ?$$

(1)  $-2x + y$

(2)  $-2x - y$

(3)  $2x + y$

(4) לא ניתן לדעת



### פתרון

נוכל לכנס את המשוואה שבמונה לצורתה הסגורה על פי הנוסחא

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ונקבל: } \frac{(2x+y)^2}{-2x-y} \text{ . כעת נוכל לראות שהאיברים במכנה}$$

ובמונה דומים. על ידי הוצאת גורם משותף  $(-1)$  מחוץ לסוגריים במכנה נקבל:

$$\frac{(2x+y)^2}{-2x-y} = \frac{(2x+y)^2}{-1 \cdot (2x+y)}$$

$$\frac{2x+y}{-1} = -2x-y \text{ : ובמכנה ונקבל:}$$

**התשובה הנכונה היא (2).**

### תרגול נוסחאות כפל מקוצר "הפוכות"

הפוך את הביטויים הבאים לנוסחאות כפל מקוצר:

$$16a^2 + 16a + 4 = ? \quad .1$$

$$100 - 16x^2 = ? \quad .2$$

$$10 - 2\sqrt{10} \cdot a + a^2 = ? \quad .3$$

$$400 + 120\sqrt{x} + 9x = ? \quad .4$$

$$49x^2 - 14x + 1 = ? \quad .5$$

$$30 - x^2 = ? \quad .6$$

### סיכום

את נוסחאות הכפל המקוצר כדאי ללמוד בעל פה ולדעת היטב להשתמש בהן בשני הכיוונים (לפתוח את נוסחאות הכפל וגם להיפך - להפוך ביטוי פתוח לסוגריים מכונסים). במידה והנוסחא פרוחה מזכרונו, תמיד אפשר לפתח אותה לבד תוך כדי המבחן או לבדוק בדף הנוסחאות המופיע בתחילת הפרק הכמותי, אך דבר זה ידרוש מאיתנו זמן יקר במהלך המבחן.



### פתרונות לתרגול נוסחאות כפל מקוצר

1. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(2 + a)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a + a^2 = 4 + 4a + a^2$
2. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(2 - a)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + a^2 = 4 - 4a + a^2$
3. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  ונקבל:  
 $(2 + a)(2 - a) = 2^2 - a^2 = 4 - a^2$
4. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(3a + 4)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4 + 4^2 = 9a^2 + 24a + 16$   
ואנו מעלים בחזקת 2 את הביטוי, כלומר גם 3 מועלה בחזקת 2 וגם a מועלה בחזקת 2.
5. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(-5 + a)^2 = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) \cdot a + a^2 = 25 - 10a + a^2$   
הוא ביטוי שלילי אך כשאנו מעלים אותו בריבוע הוא הופך לחיובי. דרך אחרת לפתרון היא להפוך את סדר האיברים בתוך הסוגריים שהרי  $(-5 + a)^2 = (a - 5)^2$ . את הביטוי הזה נוכל לפתוח על פי נוסחת הכפל המקוצר  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
6. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(5 + a^2)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot a^2 + (a^2)^2 = 25 + 10a^2 + a^4$   
ל-  $a^2$  כאל ביטוי ומעלים את כולו (כמו בתוך סוגריים) בחזקת 2 על פי חוקי החזקות.
7. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ונקבל:  
 $(4a^2 - 1)^2 = (4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 1 + 1 = 16a^4 - 8a^2 + 1$   
ביטוי ואנו מעלים בחזקת 2 את הביטוי, כלומר גם 4 מועלה בחזקת 2 וגם  $a^2$  מועלה בחזקת 2 על פי חוקי החזקות.
8. נציב את הנתונים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  ונקבל:  
 $(7a^2 + a)(7a^2 - a) = (7a^2)^2 - a^2 = 49a^4 - a^2$   
מעלים בחזקת 2 את הביטוי, כלומר גם 7 מועלה בחזקת 2 וגם  $a^2$  מועלה בחזקת 2 על פי חוקי החזקות.



9. מכיוון שמדובר על כפל בין ביטויים בסוגריים, אין משמעות לסדר של הסוגריים ולכן הביטוי  $(8a - 5b)(8a + 5b)$  שווה בערכו לביטוי  $(8a + 5b)(8a - 5b)$ . כעת על פי הנוסחה  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  נציב את הנתונים ונקבל:  
 $(8a + 5b)(8a - 5b) = (8a)^2 - (5b)^2 = 64a^2 - 25b^2$   
ואנו מעלים בחזקת 2 את הביטוי, כלומר גם 8 מועלה בחזקת 2 וגם a מועלה בחזקת 2 על פי חוקי החזקות, ובאופן דומה מעלים את 5b בחזקת 2.

10. נציב את הנתונים שבתוך הסוגריים בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  ולאחר מכן נעלה בריבוע את התוצאה. נקבל:

$$[(x + 5)(x - 5)]^2 = [x^2 - 5^2]^2 = [x^2 - 25]^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$[x^2 - 25]^2 = x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot 25 + 25^2 = x^4 - 50x^2 + 25^2$$

### פתרונות לתרגול נוסחאות כפל מקוצר "הפוכות"

1. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון בנוסחה הוא  $\sqrt{16a^2} = 4a$  והאיבר השני בנוסחה הוא  $\sqrt{4} = 2$ . נוכל לאמת שמצאנו את האיברים הנכונים על ידי כך שנכפול את האיבר הראשון באיבר השני ואז נכפול ב-2, ונבדוק שקיבלנו את האיבר האמצעי בביטוי הנתון:  
 $4a \cdot 2 \cdot 2 = 16a$ , ואכן קיבלנו את האיבר האמצעי. מכאן,  
 $16a^2 + 16a + 4 = (4a + 2)^2$

2. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון הוא  $\sqrt{100} = 10$  והאיבר השני הוא  $\sqrt{16x^2} = 4x$ . מכאן:  
 $100 - 16x^2 = (10 + 4x)(10 - 4x)$



3. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון בנוסחא הוא  $\sqrt{10}$  והאיבר השני בנוסחא הוא  $\sqrt{a^2} = a$ . נוכל לאמת שמצאנו את האיברים הנכונים על ידי כך שנכפול את האיבר הראשון באיבר השני ואז נכפול ב-2. במקרה זה אנו אמורים לקבל את האיבר האמצעי בביטוי הנתון:
- $$\sqrt{10} \cdot 2 \cdot a = 2\sqrt{10} \cdot a$$
- $$10 - 2\sqrt{10} \cdot a + a^2 = (\sqrt{10} - a)^2$$
4. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון בנוסחא הוא  $\sqrt{400} = 20$  והאיבר השני בנוסחא הוא  $\sqrt{9x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$ . נוכל לאמת שמצאנו את האיברים הנכונים על ידי כך שנכפול את האיבר הראשון באיבר השני ואז נכפול ב-2, ונקבל את האיבר האמצעי בביטוי הנתון:  $20 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{x} = 120\sqrt{x}$ . מכאן
- $$400 + 120\sqrt{x} + 9x = (20 + 3\sqrt{x})^2$$
5. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון בנוסחא הוא  $\sqrt{49x^2} = 7x$  והאיבר השני בנוסחא הוא  $\sqrt{1} = 1$ . נוכל לאמת שמצאנו את האיברים הנכונים על ידי כך שנכפול את האיבר הראשון באיבר השני ואז נכפול ב-2, ונקבל את האיבר האמצעי בביטוי הנתון:  $2 \cdot 7x \cdot 1 = 14x$ . מכאן
- $$49x^2 - 14x + 1 = (7x - 1)^2$$
6. עלינו לאתר מהם האיברים שמרכיבים את נוסחת הכפל המקוצר ולהציב בנוסחת הכפל המקוצר ההפוכה:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ . לפי הנתונים נוכל לראות שהאיבר הראשון הוא  $\sqrt{30}$  והאיבר השני הוא  $\sqrt{x^2} = x$ . מכאן
- $$30 - x^2 = (\sqrt{30} + x)(\sqrt{30} - x)$$