



שיעור ממוצע

מבוא

בכל פרק של חשיבה כמותית בבחינה, יש כשאלה אחת העוסקת בנושא הממוצע. שאלות בנושא ממוצע יכולות לכלול חישוב ממוצע רגיל, חישוב ממוצע משוקלל, הבנה איך הוספת או גרירת מספר מקבוצת מספרים משפיעה על ממוצע הקבוצה, מציאת מספר אשר בהינתן מספרים אחרים נותן ממוצע מסוים, שאלות הבנה של תכונות הממוצע ועוד. בנוסף, יכולות להופיע שאלות בנושא ממוצע תחת החלק של קריאת נתונים בפרק הכמותי, או בטבלת השוואות הכמותיות.

הגדרה

ממוצע הוא "נקודת שיווי משקל" הקיימת בכל קבוצה של מספרים. ממוצע חשבוני של קבוצת ערכים הוא סכום הערכים מחולק במספר האיברים. לדוגמא: בקבוצת המספרים 1,4,7 ממוצע הקבוצה הוא 4. זאת מכיוון שסכום האיברים חלקי

$$\frac{1+4+7}{3} = 4 \text{ : מספר האיברים הוא}$$

ממוצע אינו חייב להיות מספר בקבוצת המספרים הנתונה. לדוגמא: בקבוצת המספרים 3 ו-9 הממוצע הוא 6. זאת מכיוון שההפרש בין 6 למספר הגדול ממנו בקבוצה (9) הוא $9 - 6 = 3$, וגם ההפרש בין 6 למספר הקטן ממנו בקבוצה (3) הוא $6 - 3 = 3$.

חישוב ממוצע פשוט

ממוצע של קבוצת מספרים שווה לסכום גודלם של כל האיברים, חלקי מספר האיברים אותם סכמו.

נוסחת הממוצע:

$$\frac{a+b}{2} \text{ : עבור שני מספרים: הממוצע של } a \text{ ו- } b \text{ שווה ל-}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \text{ : עבור שלושה מספרים: הממוצע של } a, b \text{ ו- } c \text{ שווה ל-}$$

וכן הלאה, בהתאם למספר האיברים להם אנו מחשבים ממוצע.



דוגמא מספרית: ממוצע המספרים 2, 3, ו-4 שווה לסכום שלושת המספרים חלקי 3:

$$\frac{2+3+4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

תרגול נוסחת הממוצע

חשב ממוצע לקבוצות המספרים הבאות:

- | | |
|-------------|------------------------|
| 1. 1,6,8 | 5. 3,000, 2,000, 1,000 |
| 2. 12,15,18 | 6. 40, 24, 7, 2, 2 |
| 3. 11,12,13 | 7. 50, 31 |
| 4. 2,10,99 | 8. 250, 530, 120 |

שאלות ממוצע לעיתים יופיעו כשאלות מילוליות בהן נצטרך להוציא את הנתונים המספריים מתוך המלל.

מרגע שאיתרנו את הנתונים המספריים, פתרון השאלה זהה ועלינו פשוט להציב את הנתונים בנוסחת הממוצע.

שאלה לדוגמא

מורן דיברה בטלפון ביום ראשון במשך שעה וחצי, ביום שני במשך שעתיים וביום שלישי במשך חצי שעה בלבד. כמה דקות בממוצע דיברה מורן בטלפון בכל יום?

- (1) 45
- (2) 60
- (3) 37.5
- (4) 80

פתרון

השאלה היא שאלת חישוב ממוצע פשוטה, ולכן נשתמש בנוסחת הממוצע הכללית. נחבר את מספר הדקות שדיברה מורן בטלפון במשך שלושה ימים ונחלק במספר הימים. נזכור כי בשעה יש

$$60 \text{ דקות, ונחשב: } \frac{90+120+30}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

התשובה הנכונה היא (4).



חישוב ממוצע משוקלל

לעיתים אנו נדרשים לחשב ממוצע של איברים כאשר לכל איבר בקבוצה משקל שונה. לדוגמא, חישוב ממוצע בגרות כאשר באנגלית יש 4 יחידות ובמתמטיקה 5 יחידות. למתמטיקה יש משקל רב יותר בחישוב הממוצע מאשר לאנגלית (5 יחידות לעומת 4 יחידות). במקרים אלו, עלינו לחשב ממוצע משוקלל (משוקלל = מתן משקל שונה לכל אחת מהקבוצות בעת חישוב הממוצע).

חישוב ממוצע משוקלל ייעשה על ידי הכפלת משקלה כל קבוצה בערכם של האיברים באותה הקבוצה, ולאחר מכן חלוקת סכום המכפלות הללו בסכום האיברים בכל הקבוצות יחד: ניקח לדוגמא, את הערכים a, b, b, b, b : נוכל לחשב ממוצע חשבוני רגיל על ידי סכימת כל האיברים וחלוקתם ב-5, אך נוכל לחלק את הקבוצה ל- a , שלו יש משקל 1 ו- b , שלו יש משקל הגדול פי 4 מזה של a . הדבר דומה לחישוב ממוצע משוקלל בין ציון של יחידת לימוד אחת בלשון (a) לבין ציון של 4 יחידות לימוד באנגלית.

על פי נוסחת הממוצע המשוקלל, נכפול את a במשקלו (שהוא 1) ואת b במשקלו (שהוא 4) ואת

$$\frac{1 \cdot a + 4 \cdot b}{1 + 4} = \frac{a + 4b}{5} \quad \text{כך נקבל:}$$

דוגמא מספרית: נתון שבספארי יש 9 זברות הרצות במהירות 90 ק"מ לשעה כל אחת, וצב אחד הרץ במהירות 10 ק"מ לשעה. מהי המהירות הממוצעת של חברי הקבוצה? נחשב בעזרת ממוצע משוקלל: מכיוון שיש 9 זברות, משקלן של הזברות הוא 9 ואותו נכפול במהירות הריצה של הזברות. מכיוון שיש צב אחד נכפול 1 במהירות הריצה של הצב שהיא 10 קמ"ש. את כל זה נחלק במספר החיות הכולל 9 ועוד 1, כלומר 10 חיות, ונקבל:

$$\frac{9 \cdot 90 + 1 \cdot 10}{9 + 1} = \frac{820}{10} = 82$$

נוכל לראות שהממוצע המשוקלל קרוב יותר למהירות הריצה של הזברות (שהוא 90 קמ"ש) מאשר למהירות הריצה של הצב (שהוא 10 קמ"ש). הסיבה לכך היא שיש יותר זברות מאשר צבים בקבוצה ולכן גם משקלן גדול יותר בחישוב הממוצע המשוקלל.

כלל: כאשר נתונות שתי קבוצות, הממוצע המשוקלל יהיה תמיד קרוב יותר בערכו לקבוצה בעלת מספר האיברים הגדול יותר.



תרגול ממוצע משוקלל

1. בחנות 20 חולצות. חצי מהחולצות עולות 30 ש"ח וחצי מהחולצות עולות 80 ש"ח. מהו המחיר הממוצע של חולצה בחנות?
2. במבחן ההכשרה של אחיות הציון הסופי מורכב מ- 30% ציון מבחן בעל פה ו- 70% ציון מבחן מעשי. אם מיה קיבלה 80 במבחן בעל פה ו- 90 במבחן המעשי מה הציון הסופי של מיה?
3. בשכבה של כיתות א' 3 כיתות. בכיתה א'-1 יש 20 תלמידים. בכיתה א'-2 יש 40 תלמידים ובכיתה א'-3 יש 40 תלמידים. ממוצע הציונים בכיתה א'-1 הוא 70, ממוצע הציונים בכיתה א'-2 הוא 80 וממוצע הציונים בכיתה א'-3 הוא 90. מהו ממוצע הציונים של התלמידים בשכבת כיתה א'?
4. לרוני 60 גולות במשקל 300 גרם כל אחת ו- 20 גולות במשקל 100 גרם כל אחת. מכאן, ממוצע המשקל של כלל הגולות של רוני גדול / קטן / שווה ל- 200 (הקף את התשובה הנכונה).

שאלה לדוגמא

בחוג כדורסל עשרה ילדים: 3 ילדים שגובה כל אחד מהם 180 ס"מ, 3 ילדים שגובה כל אחד מהם 190 ס"מ, 2 ילדים שגובה כל אחד מהם 184 ס"מ, ו- 2 ילדים שגובה כל אחד מהם 186 ס"מ. מה ממוצע הגבהים של כל העשרה?

185 (1)

189 (2)

192 (3)

179.5 (4)



פתרון

השאלה היא שאלה מסוג ממוצע משוקלל, ולכן נוכל להציב את הנתונים בנוסחת הממוצע המשוקלל:

$$\frac{3 \cdot 180 + 3 \cdot 190 + 2 \cdot 184 + 2 \cdot 186}{10} = \frac{540 + 570 + 368 + 372}{10} = \frac{1850}{10} = 185$$

ואולם, השימוש בנוסחת הממוצע המשוקלל אינו הכרחי במקרה זה.

נניח שהיו רק 2 אנשים, אחד מהם בגובה 180 והשני בגובה 190, היינו מסיקים בקלות שהממוצע ביניהם הוא 185 (כך שהמרחק של כל אחד משני האנשים מן הממוצע יהיה שווה ל-5 ס"מ).

הממוצע יישאר 185 גם אם נחשב ממוצע ל-3 אנשים בגובה 180 ו-3 אנשים בגובה 190.

נוכל לחזור על אותו תהליך בדיוק בין המספרים 186 ו-184. נקבל שהממוצע ביניהם הוא 185 ולכן אם נוסיף אדם אחד בכל אחד מן הגבהים הממוצע יישמר כ-185. מכאן שהממוצע הכולל הוא 185 (ממוצע של 185 ו-185 יישאר 185).

התשובה הנכונה היא (1).

סכום האיברים

לפי נוסחת הממוצע, הממוצע שווה לסכום האיברים חלקי מספר האיברים. מנוסחה זו נוכל להסיק על סכום האיברים אם יינתן לנו מספר האיברים והממוצע, על ידי הכפלת הממוצע במספר האיברים.

לדוגמא, אם ממוצע של 10 מספרים הוא 30, נוכל לדעת שסכום כל המספרים הוא

$300 = 30 \cdot 10$. הסיבה לכך היא שאם נקרא לסכום כל המספרים x ונציב אותו בנוסחת הממוצע

הכללית נקבל: $\frac{x}{10} = 30$ וכך על ידי הכפלת שני צידי המשוואה ב-10 נקבל: $x = 30 \cdot 10 = 300$.

שאלה לדוגמא

נתון שלעדי, לימור וענת יש בממוצע 8 שמלות לכל אחת. בנוסף, לקרן, טלי ויערה יש בממוצע 6 שמלות לכל אחת. כמה שמלות יש בסך הכל לעדי, לימור, ענת, קרן, טלי ויערה ביחד?

(1) 42

(2) 54

(3) 24

(4) אין מספיק נתונים בשביל לענות על השאלה.



פתרון

נתון שלעדי, לימור וענת יש בממוצע 8 שמלות לכל אחת. נוכל לדעת כמה שמלות יש לשלושתן על ידי הכפלת מספר הבנות (3 בנות) בממוצע השמלות שהוא 8. כך נקבל שלעדי, לימור וענת יש ביחד $3 \cdot 8 = 24$ שמלות. בדרך דומה, לקרון, טלי ויערה יש בממוצע 6 שמלות ולכן על ידי הכפלת מספר הבנות (3 בנות) בממוצע השמלות שהוא 6 נקבל את מספר השמלות של קרון, טלי ויערה: $6 \cdot 3 = 18$. מכאן, בסך הכל לשש הבנות יש $18 + 24 = 42$ שמלות.
התשובה הנכונה היא (1).

משמעות הממוצע ותכונותיו

את משמעות הממוצע ותכונותיו נמחיש על ידי הדוגמא הבאה.
ניקח את ארבעת המספרים הבאים: 0, 3, 5, 12.

$$\text{ראשית, נחשב לארבעת המספרים הללו ממוצע פשוט: } \frac{0+3+5+12}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

הממוצע שווה ל-5.

בקבוצה ישנם 2 איברים הקטנים מהממוצע, איבר אחד בגודל הממוצע, ואיבר אחד גדול מהממוצע.

המרחק של 12 מהממוצע (5) הוא 7. ערך זה שווה לסכום המרחקים של 3 מהממוצע (2) ושל 0 מהממוצע (5): $(12 - 5) = (5 - 3) + (5 - 0)$.

כלל: סכום המרחקים של כל האיברים הגדולים מהממוצע מהממוצע עצמו, שווה בהכרח לסכום המרחקים של כל האיברים הקטנים מהממוצע, מהממוצע עצמו.

כלל: נשים לב שגם אם אחד מאיברי הקבוצה שווה ל-0 הוא עדיין מחושב כאיבר בקבוצה ולכן נחלק את סכום איברי הקבוצה ב-4 ולא ב-3. גם 0 הוא איבר בעל משקל בחישוב ממוצע.

כלל: אין מניעה שאחד מאיברי קבוצה יהיה שווה לממוצע עצמו בדיוק כמו שאין מניעה שהממוצע יהיה שווה למספר שאינו מופיע בקבוצה. נוכל לראות בדוגמא שלנו שהממוצע שווה ל-5, ויש גם איבר בגודל 5 בקבוצה עצמה.

כלל: הממוצע יהיה תמיד בתחום שבין שני המספרים הקיצוניים בקבוצה (כלומר בין המספר הגדול ביותר בקבוצה לבין המספר הקטן ביותר בקבוצה). הממוצע לעולם לא יהיה גדול מהמספר הגדול ביותר בקבוצה ולא יהיה קטן מהמספר הקטן ביותר בקבוצה.



כעת נבדוק מה קורה לממוצע הקבוצה כאשר אנו מוסיפים לקבוצה איבר השווה בגודלו לממוצע הקבוצה (במקרה שלנו שווה ל-5). נחשב ממוצע לקבוצת המספרים הבאה: 5, 12, 3, 0, 5, ונזכור שכעת עלינו לחלק את סכום המספרים ב-5:

$$\frac{12+5+3+0+5}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

הממוצע נשאר 5.

נבדוק מה קורה לממוצע הקבוצה במידה ואנו גורעים מהקבוצה איבר השווה בגודלו לממוצע הקבוצה. נחשב ממוצע לקבוצת המספרים הבאה: 5, 12, 3, 0, ונזכור שכעת עלינו לחלק את סכום המספרים ב-3:

$$\frac{12+3+0}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

הממוצע נשאר 5.

כלל: הוספת או גריעת איבר השווה בגודלו לממוצע הקבוצה, אינה משנה את ממוצע הקבוצה.

כעת נבדוק מה קורה לממוצע הקבוצה כאשר אנו מוסיפים לקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה. נוסיף לקבוצת המספרים את המספר 10 ונחשב ממוצע לקבוצת המספרים הבאה: 12, 10, 5, 3, 0:

$$\frac{0+3+5+10+12}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

ממוצע הקבוצה גדל מ-5 ל-6.

כלל: כאשר מוסיפים לקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה גדל.

נבדוק מה קורה לממוצע הקבוצה כאשר אנו מוסיפים לקבוצה איבר הקטן מממוצע הקבוצה. נוסיף לקבוצת המספרים את המספר 2.5 ונחשב ממוצע לקבוצת המספרים הבאה: 12, 5, 3, 2.5, 0.

$$\frac{0+2.5+3+5+12}{5} = 4.5$$

ממוצע הקבוצה קטן מ-5 ל-4.5.

כלל: כאשר מוסיפים לקבוצה איבר הקטן מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה קטן.

ראינו אם כן, שהוספת איבר הגדול מממוצע הקבוצה מעלה את הממוצע והוספת איבר הקטן מהממוצע מקטינה את ממוצע הקבוצה. מה יקרה לממוצע אם נגרע איבר מאיברי הקבוצה? נגרע מהקבוצה 5, 3, 0, את 12, איבר הגדול מממוצע הקבוצה, ונבדוק מה יקרה לממוצע:

$$\frac{0+3+5}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

ממוצע הקבוצה קטן מ-5 ל- $2\frac{2}{3}$.

כלל: כאשר גורעים מקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה קטן.



כעת, נגרע מהקבוצה 12, 5, 3, 0 את 0, איבר הקטן מממוצע הקבוצה ונבדוק מה יקרה לממוצע:

$$\frac{3+5+12}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

ממוצע הקבוצה גדל מ-5 ל- $6\frac{2}{3}$.

כלל: כאשר גורעים מקבוצה איבר הקטן מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה גדל.

תרגול תכונות הממוצע

רשום עבור כל אחד מהסעיפים הבאים האם לאחר השינוי המתואר בו הממוצע יקטן / יגדל / לא ישתנה או שלא ניתן לדעת.

1. בקבוצה של 8 איברים, הממוצע הוא 5. הוסיפו לקבוצה 8 איברים בגודל 5. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
2. בקבוצה של 8 איברים הממוצע הוא 6. הוסיפו לקבוצה 5 איברים בגודל 7. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
3. בקבוצה של 3 איברים הממוצע הוא 0. הוסיפו לקבוצה 5 איברים שליליים. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
4. לקבוצה שהממוצע שלה הוא 9 הוסיפו שני איברים שגודלם 8. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
5. לקבוצה בה 20 איברים הוסיפו 3 איברים בגודל 30. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
6. מקבוצה שבה הממוצע הוא 4 הוציאו איבר אחד בגודל 4. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
7. מקבוצה שבה הממוצע הוא 9 הוציאו שני איברים שליליים. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
8. מקבוצה שבה 30 איברים והממוצע שלה הוא 100 הוציאו שני איברים, אחד בגודל 90 ואחד בגודל 110. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
9. מקבוצה שבה 10 איברים והממוצע שלה הוא 20 הוציאו שני איברים, אחד בגודל 2 ואחד בגודל 22. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.
10. מקבוצה שבה 10 איברים והממוצע שלה הוא 30 הוציאו איבר בגודל 20 והוסיפו איבר בגודל 40. הממוצע יגדל / יקטן / לא ישתנה / לא ניתן לדעת.



שינויים בממוצע

כעת אנו יודעים מה קורה לממוצע הקבוצה כאשר מוסיפים או גורעים איבר גדול או קטן מהממוצע באופן כללי. אך בכמה בדיוק משתנה הממוצע בכל אחד מהמקרים? כאשר מוסיפים לקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה, המרחק בין האיבר החדש לממוצע מתחלק שווה בשווה על פני כל איברי הקבוצה (כולל האיבר החדש). נסיף לקבוצת המספרים 0, 3, 5, 12 שהממוצע שלה כזכור הוא 5, את המספר 10 ונחשב את

$$\frac{0+3+5+12+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$
 הממוצע החדש: 6

המרחק של 10 מהממוצע הוא: $10 - 5 = 5$ והוא מתחלק על פני חמישה איברים, כלומר הממוצע

$$\text{גדל ב- } 1 = \frac{5}{5}, \text{ ואכן הממוצע גדל מ- } 5 \text{ ל- } 6.$$

כלל: כאשר מוסיפים איבר הגדול מהממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה יגדל בגודל השווה למרחק בין האיבר החדש לממוצע הקבוצה הישן חלקי מספר האיברים כולל האיבר החדש.

כלל: כאשר מוסיפים איבר הקטן מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה יקטן בגודל השווה למרחק בין האיבר החדש לממוצע הקבוצה הישן חלקי מספר האיברים כולל האיבר החדש.

בדרך דומה נוכל לחשב בכמה משתנה ממוצע הקבוצה כאשר גורעים מהקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה. כאשר גורעים מקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה, ההפרש בין האיבר שגרענו לממוצע, יורד באופן שווה מכל איברי הקבוצה שנשארו. נגרע מקבוצת המספרים 0, 3, 5, 12 שהממוצע שלה הוא 5 את 12, ונחשב את הממוצע החדש:

$$\frac{0+3+5}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$
 נוכל לראות שהמרחק של 12 מהממוצע 5 הוא $12 - 5 = 7$ והוא מתחלק

$$\text{על פני } 3 \text{ איברים: } \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}. \text{ הממוצע קטן ב- } 2\frac{1}{3}, \text{ ואכן הממוצע קטן מ- } 5 \text{ ל- } 2\frac{2}{3}.$$

כלל: כאשר גורעים מקבוצה איבר הגדול מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה יקטן בגודל השווה למרחק בין האיבר שגרענו לממוצע הקבוצה הישן חלקי מספר האיברים שנותרו בקבוצה לאחר הגריעה.

כלל: כאשר גורעים מקבוצה איבר הקטן מממוצע הקבוצה, ממוצע הקבוצה יגדל בגודל השווה למרחק בין האיבר שגרענו לממוצע הקבוצה הישן חלקי מספר האיברים שנותרו בקבוצה לאחר הגריעה.



שאלה לדוגמא

ממוצע כמות העמודים בספר בספרייה העירונית הוא 350. הספרייה קיבלה תרומה של ספרים, 10 מהם עם 350 עמודים כל אחד, ו-2 מהם עם 367 עמודים כל אחד. במקביל, תרמה הספרייה 20 ספרים לספרייה עירונית אחרת. בכל אחד מהספרים שתרמה היו 350 עמודים. מה יקרה לממוצע כמות העמודים בספר בספרייה העירונית לאחר קבלת ונתינת התרומות?

- (1) הממוצע יגדל.
- (2) הממוצע יקטן.
- (3) הממוצע לא ישתנה.
- (4) לא ניתן לחשב ממוצע כי לא נתון לנו מספר הספרים בספרייה.

פתרון

מכיוון שהורדת או הוספת איבר השווה בגודלו לממוצע לא משנה את הממוצע, אנו יודעים ש-10 הספרים שהספרייה קיבלה ובהם 350 עמודים בכל ספר ו-20 הספרים שהספרייה תרמה ובהם 350 עמודים בכל אחד, לא שינו את הממוצע כלל. כעת נשארו עוד שני ספרים שהספרייה קיבלה ובכל אחד מהם 367 עמודים, כלומר מספר עמודים הגדול מן הממוצע. לכן, ממוצע כמות העמודים בספר בספרייה גדל.
התשובה הנכונה היא (1).

מספרים עוקבים וסדרות מספרים

כלל: בהינתן קבוצת מספרים עוקבים בעלת כמות מספרים אי זוגית, הממוצע הוא המספר האמצעי בקבוצה.

לדוגמא: נחשב ממוצע ל-5 מספרים עוקבים: 8, 9, 10, 11, 12. על פי הכלל, הממוצע הוא המספר האמצעי - 10. אם נחשב את הממוצע בדרך הפשוטה נקבל כי אכן הממוצע הוא 10:

$$\frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

כלל: בהינתן קבוצת מספרים עוקבים בעלת כמות מספרים זוגית, הממוצע הוא הממוצע של שני המספרים האמצעיים.



לדוגמא: נחשב ממוצע ל-4 מספרים עוקבים: 5, 6, 7, 8. על פי הכלל, הממוצע שווה לממוצע שני המספרים האמצעיים. במקרה שלנו המספרים האמצעיים הם 6 ו-7, ולכן הממוצע הוא

$$6.5 = \frac{6+7}{2} . \text{ נוכל לחשב את ממוצע ארבעת המספרים בדרך הארוכה ולראות שנקבל תשובה}$$

$$\text{זוהי: } 6.5 = \frac{5+6+7+8}{4} = \frac{26}{4}$$

כלל: בהינתן קבוצת איברים בעלת מספר אי זוגי של איברים, שבה ההפרש בין כל שני איברים צמודים זהה, ממוצע הקבוצה יהיה שווה לאיבר האמצעי בקבוצה.

ניקח לדוגמא את המספרים: 1,000, 2,000, 3,000. ההפרש בין כל שני איברים צמודים הוא 1,000 ובקבוצה שלושה איברים, ולכן הממוצע יהיה שווה ל-2,000. נחשב גם על פי נוסחת הממוצע

$$\text{הכללית: } 2000 = \frac{1000 + 2000 + 3000}{3} = \frac{6000}{3} . \text{ קיבלנו תוצאה זהה.}$$

כלל: בהינתן קבוצת איברים בעלת מספר זוגי של איברים, שבה ההפרש בין כל שני איברים צמודים זהה, ממוצע הקבוצה יהיה שווה לממוצע שני האיברים האמצעיים בקבוצה.

תרגול ממוצע מספרים עוקבים וסדרות מספרים

קבע את ממוצע קבוצות המספרים הבאות:

1. 3,4,5,6,7
2. -4,-5,-6
3. 9,10,11,12
4. -1,0,1,2
5. 10,20,30
6. 1000,2000,3000,4000



שאלה לדוגמא

נתונים 10 מספרים עוקבים חיוביים. נסמן את ממוצע עשרת המספרים ב- a. מה נכון בהכרח?

- (1) אם נכפיל את a פי 10 נקבל את מכפלת עשרת המספרים העוקבים.
- (2) a שווה למספר החמישי בגודלו בקבוצת המספרים.
- (3) 2a גדול מהמספר הגדול ביותר מתוך עשרת המספרים.
- (4) אם לפחות מספר אחד מתוך המספרים הוא שלילי, a הוא שלילי.

פתרון

בשאלה זו אין נתונים מספריים, ולכן נוכל להציב בעצמנו מספרים על מנת להקל על הפתרון. השאלה בוחנת ידע של תכונות הממוצע, ומי שמזהה את התכונה הנוגעת לממוצע מספרים עוקבים אינו צריך להציב דבר.

אנו יודעים על פי כללי המספרים העוקבים שבמידה ובקבוצה יש כמות זוגית של מספרים עוקבים, הממוצע יהיה הממוצע של שני המספרים האמצעיים כלומר של המספר החמישי והמספר השישי.

$$\text{למשל, עבור המספרים 1 עד 10, הממוצע יהיה ממוצע המספרים 5 ו-6: } \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

(ניתן גם להציב את המספרים 1 עד 10 ולחשב את הממוצע:

$$a = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

מכיוון שהממוצע שווה לסכום המספרים חלקי 10, אם נכפול את הממוצע פי 10, נקבל את סכום המספרים ולא את מכפלתם. נפסול את תשובה מספר 1. את תשובה 2 נפסול היות ואנו רואים שהממוצע שווה ל- 5.5 ואינו שווה למספר החמישי בקבוצה (5).

ממוצע עשרת המספרים שווה ל- 5.5 ואם נכפילו פי 2 נקבל $2a = 11$. מספר זה אכן גדול מהמספר הגדול ביותר מבין עשרת המספרים, ולכן תשובה 3 היא התשובה הנכונה. את תשובה 4 נוכל לפסול בקלות על ידי הצבת המספרים העוקבים (-1) עד 8. הממוצע שווה ל-

$$a = \frac{-1+0+1+2+3+4+5+6+7+8}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$$

שלילי אחד בקבוצת האיברים.

התשובה הנכונה היא (3).



דוגמא נוספת

בסדרה 6 איברים שההפרשים ביניהם קבועים וזהים. ממוצע הקבוצה שווה ל-10.5. האיבר הרביעי בסדרה שווה ל-12. מה האיבר הראשון בסדרה?

- 1 (1)
- 3 (2)
- 9 (3)
- 15 (4)

פתרון

על פי הכלל, בסדרה בה ההפרש בין כל 2 איברים צמודים זהה, ומספר האיברים בה זוגי, הממוצע שווה לממוצע 2 האיברים האמצעיים. בסדרה בת 6 איברים ממוצע הקבוצה יהיה שווה לממוצע האיברים השלישי והרביעי. נתון לנו שהאיבר הרביעי שווה ל-12. אנו יודעים שהממוצע נמצא בדיוק בין האיבר השלישי לרביעי. מכיוון שבין האיבר הרביעי לממוצע יש מרחק של 1.5, נסיק שגם בין הממוצע לאיבר השלישי יש מרחק של 1.5 ומכאן האיבר השלישי שווה ל- $10.5 - 1.5 = 9$. כעת, אנו יודעים שההפרשים בסדרה שווים ל-3 (ההפרש בין האיבר הרביעי לאיבר השלישי הוא $12 - 9 = 3$), ומכאן, שהאיבר השני שווה לאיבר השלישי פחות 3, כלומר ל-6, והאיבר הראשון שווה לאיבר השני פחות 3, כלומר ל-3.
התשובה הנכונה היא (2).

לסיכום

שאלות ממוצע יכולות להופיע כשאלות מספריות או כשאלות מילוליות, וכן לשלב נושאים שונים מחומר הבחינה. לרוב, על מנת לפתור שאלת ממוצע עלינו להציב את נתוני השאלה בנוסחת הממוצע הכללית או בנוסחת הממוצע המשוקלל ולבודד את המשתנה שחסר לנו. בנוסף, מומלץ להבין את חוקי השתנות הממוצע כאשר מוסיפים או מורידים איברים. הדבר יכול לחסוך זמן רב במהלך הבחינה.



פתרונות לתרגול נוסחת הממוצע

1. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $5 = \frac{1+6+8}{3} = \frac{15}{3}$. למעשה סכמנו את שלושת

המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.

2. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $15 = \frac{12+15+18}{3} = \frac{45}{3}$. למעשה סכמנו את

שלושת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.

3. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $12 = \frac{11+12+13}{3} = \frac{36}{3}$. למעשה סכמנו את

שלושת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.

4. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $37 = \frac{2+10+99}{3} = \frac{111}{3}$. למעשה סכמנו את

שלושת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.

5. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $2,000 = \frac{3,000+2,000+1,000}{3} = \frac{6,000}{3}$.

למעשה סכמנו את שלושת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.

6. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $15 = \frac{40+24+7+2+2}{5} = \frac{75}{5}$. למעשה

סכמנו את חמשת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 5. נשים לב שבקבוצת המספרים מופיע פעמיים המספר 2, אך אין זה משנה. אנו סוכמים את 2 פעמים בדיוק כאילו היו אלה שני מספרים שונים.

7. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $40\frac{1}{2} = \frac{81}{2} = \frac{50+31}{2}$. למעשה סכמנו את שני

המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 2. נוכל לראות שממוצע יכול להיות גם מספר שאינו שלם.

8. נציב את המספרים בנוסחת הממוצע ונקבל: $300 = \frac{250+530+120}{3} = \frac{900}{3}$. למעשה

סכמנו את שלושת המספרים וחילקנו במספר האיברים שהוא 3.



פתרונות לתרגול ממוצע משוקלל

1. משקלן של החולצות שעולות 30 ש"ח הוא חצי מ-20 כלומר 10 וכך גם משקלן של החולצות שעולות 80 ש"ח. מכאן, נציב בנוסחת הממוצע המשוקלל ונקבל:

$$55 = \frac{1100}{20} = \frac{10 \cdot 30 + 10 \cdot 80}{20}$$

ניתן לראות שכאשר משקלן של שתי הקבוצות זהה אפשר

לחשב את הממוצע כממוצע פשוט בין איבר אחד מקבוצה א' לאיבר שני מקבוצה ב':

$$55 = \frac{30 + 80}{2}$$

2. אנו יודעים שמיה קיבלה ציון 80 במבחן בעל פה שמשקלו הוא 30%. בנוסף, אנו יודעים שמיה קיבלה 90 במבחן המעשי שמשקלו הוא 70%. מכאן, הציון הממוצע המשוקלל של מיה

$$\text{הוא: } 87 = 24 + 63 = \frac{30 \cdot 80}{100} + \frac{70 \cdot 90}{100} \quad (30\% \text{ שווים ל-} \frac{30}{100} \text{ ובאותו אופן } 70\% \text{ שווים ל-}$$

$\frac{70}{100}$). אין צורך לחלק במספר האיברים מכיוון שהחישוב מלכתחילה מחושב באחוזים מתוך

השלם. (החלוקה של 30 אחוז מוצגת כ-30 מתוך 100 או 30 חלקי 100 ולכן אין צורך לחלק שוב במספר האיברים).

3. נתון שבכיתה א' יש 20 תלמידים וממוצע הציונים הוא 70. בכיתה א'-2 יש 40 תלמידים וממוצע הציונים הוא 80. בכיתה א'-3 יש 40 תלמידים וממוצע הציונים הוא 90. נכניס את הנתונים לנוסחת הממוצע המשוקלל ונקבל:

$$82 = \frac{820}{10} = \frac{140 + 320 + 360}{10} = \frac{1,400 + 3,200 + 3,600}{20 + 40 + 40}$$

הציון הממוצע של תלמיד בשכבת כיתה א' הוא 82.

4. נוכל לחשב את הממוצע המשוקלל אך אין בכך צורך במקרה זה, מכיוון שאנו נדרשים רק לדעת האם הממוצע גדול, קטן או שווה ל-200. אם כמות הגולות מכל סוג היתה שווה, ממוצע המשקלים היה ממוצע רגיל שמרחקו מכל אחד מערכי המשקלים זהה, ולכן היה שווה ל-200 (המרוחק ב-100 מ-300 וגם מרוחק ב-100 מ-100). מכיוון שהמצב הוא שיש יותר גולות במשקל 300 גרם מאשר גולות במשקל 100 גרם, הממוצע של כלל משקלי הגולות קרוב יותר בערכו ל-300, ולכן גדול מנקודת האמצע בין המשקלים, כלומר גדול מ-200.



פתרונות לתרגול תכונות הממוצע

1. נתונה לנו קבוצה שהממוצע שלה הוא 5. נתון שהוסיפו לקבוצה עוד 8 איברים שגודלם 5, כלומר גודלם כגודל הממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה לא השתנה.
2. נתונה קבוצה שהממוצע שלה הוא 6. לקבוצה הוסיפו 5 איברים בגודל 7, כלומר גודל הגדול מהממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה גדל.
3. נתונה קבוצה הממוצע שלה הוא 0. נתון שהוסיפו לקבוצה 5 איברים שליליים, כלומר 5 איברים הקטנים מ-0 ולכן קטנים מהממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה קטן.
4. נתונה קבוצה שבה הממוצע הוא 9. נתון שהוסיפו לקבוצה שני איברים בגודל 8, כלומר בגודל קטן מהממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה קטן.
5. נתונה קבוצה שאנו לא יודעים מה הממוצע שלה (ידוע לנו רק גודלה) ולה מוסיפים 3 איברים שגודלם 30. מכיוון שאנו לא יודעים מה הממוצע ההתחלתי של הקבוצה לפני שמוסיפים לה איברים, אנחנו לא יכולים לדעת איך האיברים הללו משפיעים על הממוצע. לדוגמא, אם ממוצע הקבוצה היה 20 אז 3 איברים בגודל 30 היו מגדילים את הממוצע. לעומת זאת, אם גודל הממוצע היה 40 אז 3 איברים בגודל 30 היו מקטינים את הממוצע. מכאן, שלא ניתן לדעת איך ישפיעו האיברים החדשים על ממוצע הקבוצה הראשוני.
6. נתונה קבוצה שהממוצע שלה הוא 4. הוציאו מהקבוצה איבר אחד בגודל 4, כלומר בגודל הממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה לא השתנה.
7. נתונה קבוצה שבה הממוצע הוא 9 ונתון שהוציאו ממנה שני איברים שליליים, כלומר איברים הקטנים מ-0 ולכן גם קטנים מהממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה גדל.
8. נתונה קבוצה שהממוצע שלה הוא 100. נתון שהוציאו איבר אחד בגודל 90 ואיבר בגודל 110. כלומר הוציאו מהקבוצה איבר שגודל ב-10 מהממוצע ואיבר שקטן ב-10 מהממוצע. מכאן, שממוצע הקבוצה לא השתנה.
9. נתונה קבוצה שבה הממוצע הוא 20 וממנה הוציאו איבר בגודל 2 ואיבר בגודל 22. כלומר, הוציאו מהקבוצה איבר שגודל ב-2 מהממוצע ואיבר שקטן ב-18 מהממוצע. מכאן, האיבר שקטן מהממוצע ב-18 ויצא מחישוב הממוצע ישפיע יותר מהאיבר שהיה גדול רק ב-2 מהממוצע, ולכן הממוצע של הקבוצה גדל.
10. נתונה קבוצה שהממוצע שלה הוא 30. מהקבוצה הוציאו איבר בגודל 2, כלומר קטן מהממוצע, ולכן ממוצע הקבוצה החדשה יגדל. בנוסף, הכניסו לקבוצה איבר בגודל 40, כלומר איבר הגדול מממוצע הקבוצה ולכן ממוצע הקבוצה יגדל שוב. מכאן, שממוצע הקבוצה גדל.



פתרונות לתרגול ממוצע מספרים עוקבים וסדרות מספרים

1. נתונים חמישה מספרים עוקבים, כלומר, מספר אי זוגי של מספרים עוקבים. מכאן, נוכל לדעת שהממוצע הוא המספר האמצעי, כלומר 5.
2. נתונים שלושה מספרים עוקבים שליליים, כלומר, מספר אי זוגי של מספרים עוקבים. מכאן, נוכל לדעת שהממוצע הוא המספר האמצעי, כלומר (-5).
3. נתונים ארבעה מספרים עוקבים, כלומר, מספר זוגי של מספרים עוקבים. הממוצע שלהם הוא הממוצע של שני המספרים האמצעיים, כלומר, הממוצע של 10 ו-11:
$$\frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$
4. נתונים ארבעה מספרים עוקבים, כלומר, מספר זוגי של מספרים עוקבים. הממוצע שלהם הוא הממוצע של שני המספרים האמצעיים, כלומר הממוצע של 0 ו-1:
$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
5. נתונה סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל שני מספרים שווה ל-10, ובסך הכל יש בה שלושה מספרים, כלומר, מספר אי זוגי של מספרים. מכאן, הממוצע של הסדרה הוא המספר האמצעי, כלומר 20.
6. נתונה סדרה של ארבעה מספרים שבה ההפרש בין כל שני מספרים שווה ל-1,000, ובסך הכל יש בה ארבעה מספרים, כלומר מספר זוגי של מספרים. מכאן, ממוצע הסדרה שווה לממוצע שני המספרים האמצעיים בסדרה: 2,500:
$$\frac{2,000+3,000}{2} = \frac{5,000}{2} = 2,500$$