



## שיעור שתי משוואות בשני נעלמים

### מבוא

שתי משוואות בשני נעלמים הוא נושא שלוקח צעד קדימה את נושא פתרון משוואה בנעלם אחד. כל הכללים החלים על משוואה בנעלם אחד חלים גם כאשר פותרים שתי משוואות בשני נעלמים, ולכן תנאי מקדים לקריאת שיעור זה הוא קריאת שיעור משוואה בנעלם אחד.

### הגדרה

כאשר נתונה משוואה אחת עם שני נעלמים - נוכל לבדוד אחד מהם ולהגדיר אותו בעזרת המשתנה האחר, אך לא נוכל להגיע לפתרון שכולל ערך מספרי של שני הנעלמים. לדוגמא:  $x = 3 + y$ . נוכל לבטא את ערכו של  $x$  על ידי  $y$  ולהיפך, אבל לא נוכל לדעת אם  $x$  שווה 3 או 8 או כל ערך מספרי אחר.

אם נרצה לדעת מה ערכם המספרי של  $x$  ו- $y$  נצטרך נתון נוסף - משוואה שנייה, שונה מהראשונה, שבה מופיעים אותם המשתנים (במקרה שלנו  $x$  ו- $y$ ). לכן, הנושא נקרא שתי משוואות עם שני נעלמים. כדי לפתור את המשוואות נוכל להשתמש בשתי דרכים.

### דרך פתרון ראשונה:

בידוד אחד המשתנים באחת המשוואות והצבתו במשוואה השנייה. כך נקבל למעשה משוואה אחת עם נעלם אחד (הנעלם אותו לא בודדנו), אותה אנו יודעים לפתור. לאחר שנמצא את ערכו של הנעלם אותו לא בודדנו, נציב אותו באחת המשוואות המקוריות, וכך שוב נקבל משוואה אחת בנעלם אחד ונוכל למצוא את ערכו של המשתנה הנוסף.

לדוגמא: נתון  $x = 3 + y$  וגם  $2x + 11 = 3y$ . אנו רואים שבמשוואה הראשונה  $x$  כבר מבודד ושווה ל- $3 + y$ . לכן, נוכל להציב את  $x$ , אותו אנו יודעים לבטא בעזרת  $y$ , במשוואה השנייה, וכך נקבל משוואה המכילה רק מספרים ואת המשתנה  $y$ . המשוואה תראה כך:  $2(3 + y) + 11 = 3y$ . נפתח סוגריים ונקבל:  $6 + 2y + 11 = 3y$ . נחסר מהמשוואה  $2y$  ובמקביל נסכום את האיברים 6 ו-11 בצד שמאל של המשוואה, ונקבל:  $17 = y$ . כלומר, מצאנו את ערכו המספרי של  $y$ . כעת, נוכל להציב את ערכו המספרי של  $y$ , כלומר 17, במשוואה הראשונה  $x = 3 + y$ , ועל ידי כך למצוא את ערכו המספרי של  $x$ . נקבל:  $x = 3 + y = 3 + 17 = 20$ , כלומר מצאנו גם את ערכו המספרי של  $x$ .



### תרגול דרך פתרון ראשונה

הצב את הנתון המבודד במשוואה ומצא את ערכיהם של  $x$  ו- $y$ :

1. נתון:  $x = 2$ , וגם  $y + 8x = 12$

2. נתון:  $x = 10$ , וגם  $\frac{12x}{6} = y - 8$

3. נתון:  $x = y$ , וגם  $18x + 8y = 52$

4. נתון:  $\frac{x}{2} = y - 3$ , וגם  $x = 13$

5. נתון:  $x = 9\sqrt{y}$ , וגם  $\sqrt{y} \cdot x = 18$

### שאלה לדוגמא

נתון:  $4x + 3 = 9y$

וגם  $-3y + 21 = 2x$

$x + y = ?$

(1) 1

(2) 3

(3) 6

(4) 9

### פתרון

ראשית נראה כי במשוואה הראשונה יש  $4x$  ובמשוואה השנייה יש  $2x$ . לכן, נוכל לכפול את

המשוואה השנייה ב-2, ולמצוא לכמה שווה  $4x$ : אם  $-3y + 21 = 2x$ , אזי

$$-6y + 42 = 4x \quad \text{. כעת נוכל להציב את } 4x \text{ במשוואה הראשונה: } -6y + 42 + 3 = 9y$$

נוסיף,  $6y$  לשני האגפים ונסכום את 42 ו-3:  $45 = 9y + 6y$  ומכאן  $45 = 15y$  ו- $3 = y$ .

כעת נציב את  $y$  במשוואה הראשונה ונקבל:  $4x + 3 = 9 \cdot 3$ . מכאן  $4x + 3 = 27$ . נחסר 3

משני האגפים:  $4x = 24$  ונחלק ב-4 את שני האגפים:  $x = 6$ . מכאן הסכום של  $x + y$

$$\text{שווה ל-} 6 + 3 = 9$$

**התשובה הנכונה היא (4).**



### דרך פתרון שניה:

חיבור או חיסור שתי המשוואות, בצורה של חיבור ארוך, כך שמתקבלת משוואה אחת עם נעלם אחד. לשם כך, עלינו לסדר את המשוואות כך שהנעלמים והמספרים יופיעו באותו סדר בשתי המשוואות. לאחר מכן נרצה להגיע למצב בו לאחד המשתנים יש את אותו מקדם בשתי המשוואות, ואז אם למקדם זה יש את אותו הסימן בשתי המשוואות, נבצע חיסור בין המשוואות, ואם באחת המשוואות המקדם מופיע עם סימן מינוס ובשנייה המקדם מופיע עם סימן פלוס, נבצע חיבור בין המשוואות.

$$\text{לדוגמא, נתונות המשוואות הבאות: } x + y = 8 \text{ ו- } (-x) + 5y = 16.$$

נסדר את המשוואות אחת מתחת לשנייה. נראה כי המקדם של  $x$  הוא 1 במשוואה אחת, ו-1 (-1) במשוואה השנייה. לכן, **נחבר** בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} x + y = 8 \\ + \\ (-x) + 5y = 16 \\ \hline 6y = 24 \end{array}$$

בפועל, סכמנו  $x$  עם  $(-x)$  כך שקיבלנו 0 והעלמנו את  $x$  מן המשוואה. במקביל, סכמנו  $y$  עם  $5y$  וקיבלנו  $6y$  וסכמנו 8 עם 16 כך שקיבלנו 24. כעת קיבלנו משוואה עם נעלם אחד שאם נחלק את שני צדדיה ב-6 נקבל  $y = 4$ . כעת, ממש כמו בשיטה הראשונה, נחזור ונציב את ערכו של  $y$  שמצאנו באחת המשוואות המקוריות, וכך נוכל למצוא את  $x$ . נציב  $y = 4$  במשוואה  $x + y = 8$  ונקבל:  $x + 4 = 8$ . על ידי חיסור 4 משני צידי המשוואה נקבל:  $x = 4$ .

אם המשוואות הנתונות היו  $x + y = 8$  ו-  $x + 5y = 16$ , המקדם של  $x$  בשתי המשוואות זהה, כמו גם סימנו, ולכן **נחסר** בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} x + 5y = 16 \\ - \\ x + y = 8 \\ \hline 4y = 8 \end{array}$$

נחלק ב-4 את שני האגפים ונקבל:  $y = 2$ . נציב את  $y$  במשוואה  $x + y = 8$  ונקבל

$$x + 2 = 8 \text{ ומכאן } x = 6.$$



**דגש:** במידה ואין נעלם המופיע בשתי המשוואות עם אותו מקדם (בסימנים זהים או הפוכים), נוכל לבצע פעולות חשבוניות על אחת המשוואות על מנת להביא את המשוואות למצב כזה. כל עוד אנו מבצעים את הפעולות החשבוניות על שני צידי המשוואה, השוויון בין הצדדים נשמר ולכן אלו פעולות מותרות.

$$2x + 2y = 16 \quad \text{לדוגמא:}$$

$$(-x) + 5y = 16$$

במצב כזה אם נחבר בין המשוואות לא נוכל "להעלים" משתנה אחד, אבל על ידי חלוקה פשוטה של שני צידי המשוואה הראשונה ב-2 נקבל את המשוואה  $x + y = 8$ . כעת, בדיוק כמו בדוגמא שלמעלה נוכל לפתור על ידי סכימת שתי המשוואות.

### תרגול דרך פתרון שניה

הבא את שתי המשוואות למצב שבו על ידי סכימה או חיסור של שתיהן נוכל "להיפטר" מאחד המשתנים:

$$74x - 10 = 69y \quad .1$$

$$69y + 20 = 79x$$

$$\frac{1}{2}x - 20 = 5y \quad .3$$

$$x + y = 106$$

$$30x + 5y = 100 \quad .2$$

$$10x + 6y = 94$$

$$\frac{15x + 33}{3} = 17y \quad .4$$

$$3y + 2x = 5y + 10$$



### שאלה לדוגמא

נפתור את השאלה שפתרנו קודם בדרך הפתרון השנייה.

$$\text{נתון: } 4x + 3 = 9y$$

$$\text{וגם } -3y + 21 = 2x$$

$$x + y = ?$$

1 (1)

3 (2)

6 (3)

9 (4)

### פתרון

ראשית עלינו להעביר אגפים על מנת שהמשוואות יהיו בנויות בצורה דומה. נעביר אגפים במשוואה הראשונה ונקבל:  $-4x - 9y + 3 = 0$ . כעת, על מנת שהמקדם של  $y$  יהיה זהה בשתי המשוואות, נכפול את המשוואה השנייה ב-3, ונקבל:  $6x - 9y + 63 = 0$ . כעת נכתוב את שתי המשוואות זו מעל זו ונחסר ביניהן כמו בחיבור ארוך:

$$\begin{array}{r} -4x - 9y + 3 = 0 \\ - \\ 6x - 9y + 63 = 0 \end{array}$$

$$\hline 10x - 60 = 63$$

$$10x - 60 = 63$$

מכאן, על ידי חלוקת המשוואה שקיבלנו ב-10 נקבל ש- $x = 6$ . נחזור לאחת

המשוואות המקוריות ונציב  $x = 6$  וכך נקבל כמו בדרך הפתרון הראשונה ש- $y = 3$ .

**התשובה הנכונה היא (4).**

### סיכום

פתרון שתי משוואות בשני נעלמים אינו נושא מסובך למי ששולט בפתרון משוואה בנעלם אחד. בשאלות מסוג זה, נוכל לבחור באחת משתי דרכי פתרון. מומלץ להקדיש רגע של מחשבה לפני תחילת הפתרון לבחירת הדרך הנוחה והקצרה יותר מבין השתיים על מנת לחסוך בזמן (הדרך היעילה יותר נקבעת בהתאם למערכת המשוואות הנתונה). שאלות בנושא זה יכולות לעסוק בערכים המספריים של המשתנים, אך חשוב לציין שישנן שאלות בהן נצטרך לבטא את המשתנים על ידי נעלם נוסף.



### פתרונות - דרך פתרון ראשונה

1. נציב את הנתון  $x = 2$  במשוואה  $y + 8x = 12$  ונקבל:  $y + 8 \cdot 2 = 12$ . לאחר העברת אגפים נקבל:  $y = 12 - 8 \cdot 2 = 12 - 16 = (-4)$ .
2. נציב את הנתון  $x = 10$  במשוואה  $\frac{12x}{6} = y - 8$  ונקבל:  $\frac{12 \cdot 10}{6} = y - 8$ . נצמצם את השבר בצד שמאל ונקבל:  $20 = y - 8$ . לאחר העברת אגפים נקבל:  $28 = y$ .
3. נציב את הנתון  $x = y$  במשוואה  $18x + 8y = 52$  ונקבל:  $18x + 8x = 52$ . נסכום את האיברים בצד שמאל ונקבל:  $26x = 52$ . נחלק את שני צידי המשוואה ב-26 ונקבל:  $x = 2$ . נציב את הנתון שמצאנו במשוואה  $x = y$  ונקבל  $y = 2$ .
4. נציב את הנתון  $x = 13$  במשוואה  $\frac{x}{2} = y - 3$  ונקבל:  $\frac{13}{2} = y - 3$ . נכפול פי 2 את שני צידי המשוואה ונקבל:  $13 = 2y - 2 \cdot 3$ . על ידי העברת אגפים נקבל:  
 $13 + 2 \cdot 3 = 2y$ . על ידי חלוקה ב-2 של שני צידי המשוואה נקבל:  $\frac{19}{2} = y$ .
5. נציב את הנתון  $x = 9\sqrt{y}$  במשוואה  $\sqrt{y} \cdot x = 18$  ונקבל:  $\sqrt{y} \cdot 9\sqrt{y} = 18$ . על פי חוקי שורשים נוכל לכתוב את צד שמאל של המשוואה כך:  $9y = 18$ . נחלק את שני צידי המשוואה ב-9 ונקבל:  $y = 2$ . נציב את ערך  $y$  שמצאנו ונקבל:  $x = 9\sqrt{2}$ .

### פתרונות - דרך פתרון שנייה

1. נשים לב שהאיבר  $69y$  מופיע בשתי המשוואות. על ידי העברת אגפים נקבל במשוואה השנייה  $-79x + 20 = (-69y)$ . כעת נוכל לסכום את שתי המשוואות ו"להיפטר מהמשתנה  $y$ . לאחר סכימת המשוואות נקבל משוואה עם משתנה  $x$  בלבד שאותה אנו יכולים לפתור בקלות.

$$\begin{array}{r} 74x - 10 = 69y \\ + \\ -79x + 20 = (-69y) \\ \hline (-5x) + 10 = 0 \end{array}$$



2. הדרך המהירה ביותר "להיפטר" מהמשתנה  $x$  על ידי הכפלת המשוואה השנייה ב-3. כך נקבל:  $30x + 18y = 282$ . ניתן לראות שכעת המקדם של  $x$  זהה בשתי המשוואות, כמו גם סימנו, ולכן נחסר בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} 30x + 5y = 100 \\ - \\ 30x + 18y = 282 \\ \hline -13y = -182 \end{array}$$

3. הדרך המהירה ביותר "להיפטר" מהמשתנה  $x$  על ידי הכפלת המשוואה הראשונה ב-2. כך נקבל:  $x - 40 = 10y$ . על ידי העברת אגפים נגיע למצב שבו האיברים מסודרים בסדר שבו מסודרים האיברים במשוואה השנייה כך:  $x - 10y = 40$ . המקדם של  $x$  זהה בשתי המשוואות, כמו גם סימנו, ולכן נחסר בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} x - 10y = 40 \\ - \\ x + y = 106 \\ \hline -11y = -66 \end{array}$$

4. נתחיל בצמצום השבר בצד שמאל של המשוואה הראשונה:
- $$\frac{15x + 33}{3} = \frac{15x}{3} + \frac{33}{3} = 5x + 11$$
- מכאן, המשוואה הראשונה היא:
- $$5x + 11 = 17y$$
- את המשוואה השנייה גם ניתן לסדר ולכנס את שני האיברים שבהם מופיע  $y$ . כך נקבל:  $2x - 10 = 2y$ . על מנת "להיפטר" מהמשתנה  $x$  נכפול את המשוואה הראשונה ב-2 ואת המשוואה השנייה ב-5. כעת המקדם של  $x$  זהה בשתי המשוואות, וכך גם סימנו, ולכן נחסר בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} 10x + 22 = 34y \\ - \\ 10x - 50 = 10y \\ \hline 72 = 24y \end{array}$$