שיעור חד ממד מתקדם

ישנם שני נושאים בתחום החד ממד שעליהם אנו נשאלים רבות בבחינה: דמיון משולשים ומשפט פיתגורס, ועליהם נלמד בשיעור זה.

דמיון משולשים

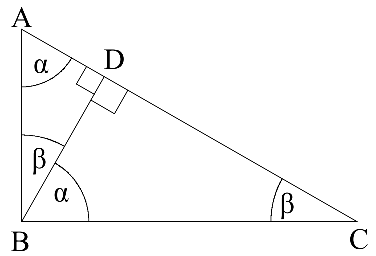
כאשר שלוש הזוויות במשולש מסוים שוות לשלוש הזוויות במשולש אחר, המשולשים דומים.

במשולשים דומים מתקיים:

1. היחס בין כל שתי צלעות במשולש אחד שווה ליחס בין שתי הצלעות המתאימות במשולש השני.
2. היחסים בין צלע אחת במשולש לבין הצלע המתאימה לה במשולש השני שווים בשלוש הצלעות. (ראה דף נוסחאות).

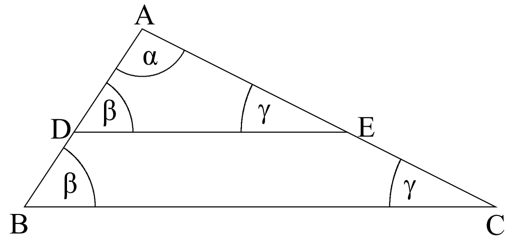
האופנים הנפוצים ביותר ליצירת דמיון הם על ידי העברת גובה ליתר במשולש ישר זווית, העברת קטע מקביל לאחת הצלעות במשולש כלשהו וצורת "שעון החול".

העברת גובה ליתר במשולש ישר זווית



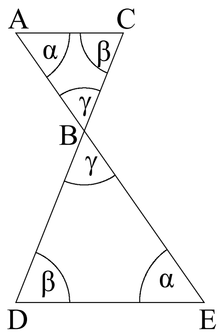
בסרטוט נתון משולש ישר זווית בו הזווית ABC ישרה.
על ידי הורדת גובה ליתר המשולש (הצלע AC) נוצרים שני משולשים ישרי זווית נוספים – ABD ו- DBC.
נניח כי זווית BAC היא α וזווית ACB היא β.
מכיוון שסכום הזוויות במשולש הוא $180°$,
וכמו כן הזווית ABC היא זווית ישרה, כלומר בת $90°$, סכום הזוויות α ו- β שווה ל- $90°$. במשולש DBC יש זווית ישרה (BDC) וזווית β. לכן, על מנת שסכום הזוויות במשולש BDC יהיה $180°$, זווית DBC צריכה להיות שווה ל- α. באותו אופן זווית ABD שווה ל- β. מכאן, שזוויות המשולשים ABD, BDC ו- ABC זהות ולכן שלושת המשולשים הללו דומים זה לזה.

העברת קטע מקביל לאחת הצלעות



הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה, כך שהקטע DE מקביל לצלע BC, ויוצר משולש נוסף – ADE. זווית BAC היא זווית משותפת למשולש ABC ולמשולש ADE. זווית ADE וזווית ABC הן זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים ולכן שוות זו לזו. באותו אופן זווית AED שווה לזווית ACB. מכאן, שלוש הזוויות במשולש ABC שוות לשלוש הזוויות במשולש ADE, ולכן המשולשים דומים.

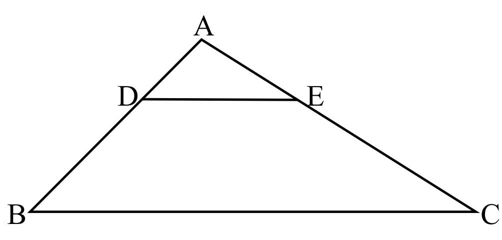
״שעון חול״



בסרטוט הנתון, הקטעים AC ו- DE מקבילים. הזוויות ACB ו- BDE הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ולכן שוות. באותו אופן זווית CAB שווה לזווית BED. כמו כן, הזוויות ABC ו- DBE הן זוויות קדקודיות ולכן שוות זו לזו. מכאן, המשולשים ABC ו- DBE דומים.

<u>**שאלה לדוגמה**</u>

במשולש ABC חסום הקו DE המקביל לצלע BC. נתון: AB=6, AC=9, BC=12 ו- DE=4. מה היקף המשולש ADE (בס״מ)?



(1) 5
(2) 6
(3) 9
(4) 12

<u>פתרון</u>

כפי שראינו, כאשר מעבירים קטע מקביל לצלע במשולש נוצרים שני משולשים דומים.
כאשר שני משולשים דומים, היחסים בין צלע כלשהי במשולש האחד לבין הצלע המתאימה לה במשולש השני (כלומר הצלע שנמצאת מול אותה הזווית במשולש השני) שווים בשלוש הצלעות, ובמקרה שלנו:

$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$. נציב את האורכים הנתונים לנו: $\frac{4}{12}=\frac{AE}{9}=\frac{AD}{6}$.

מכאן: $AE=\frac{4\cdot 9}{12}=\frac{36}{12}=3$ ו- $AD=\frac{4\cdot 6}{12}=\frac{24}{12}=2$. היקף המשולש ADE הוא $2+3+4=9$

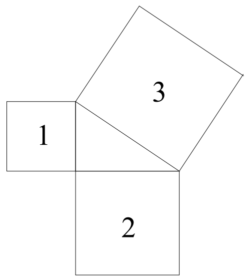
ס"מ.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>משפט פיתגורס</u>

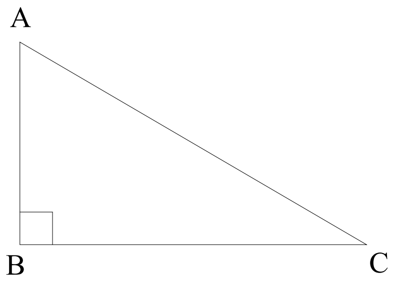
במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

המשמעות היא, שאם נבנה ריבוע על כל אחד מצלעות המשולש, נקבל מצב בו שטחי הריבועים שנבנו על הניצבים, שווים יחדיו לשטח הריבוע שנבנה על היתר:



סכום שטחי הריבועים 1 ו- 2 שווה לשטח ריבוע 3.

למשל, עבור המשולש הבא:



מתקיים: $AB^2+BC^2=AC^2$.

אם למשל AB=3 ו- BC=4, אז $AC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

שלשות פיתגוריות

שימו לב כי מצאנו ששלשת המספרים 3,4,5, מקיימת את משפט פיתגורס, כאשר 5 הוא כמובן היתר – הצלע הארוכה ביותר במשולש ישר זווית מכל סוג שהוא.

מדובר אם כן, ב"שלשה פיתגורית" – שלשת מספרים המקיימת את משפט פיתגורס.

שלשה פיתגורית היא למעשה יחס המתקיים בין צלעות המשולש, ולכן עבור כל שלשה פיתגורית, במידה וכל אחד מהמספרים מורחב או מצומצם באותו אופן, נקבל עוד שלשה פיתגורית.

לדוגמה, נכפיל כל אחד מהמספרים פי 2, ונקבל במקום היחס 5 :4 :3 את המספרים 10 :8 :6.

בבדיקה פשוטה נראה, כי גם שלשת מספרים זו מקיימת את משפט פיתגורס: $6^2+8^2=10^2$ או $36+64=100$.

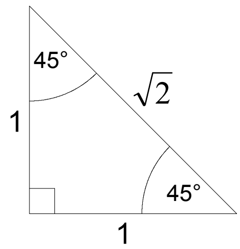
ישנן מספר שלשות מספרים החוזרות על עצמן בבחינה וכדאי לזכור אותן:

- 3,4,5
- 5,12,13
- 8,15,17

שלשות פיתגוריות מיוחדות

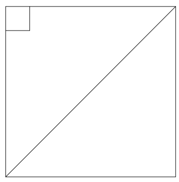
ישנם שני משולשים ישרי זווית מיוחדים שכדאי לזכור את יחסי הצלעות שלהם.

1. משולש ישר זווית ושווה שוקיים:



יחס הצלעות במשולש מסוג זה הוא $1:1:\sqrt{2}$ (היתר הוא בעל יחידת היחס $\sqrt{2}$).

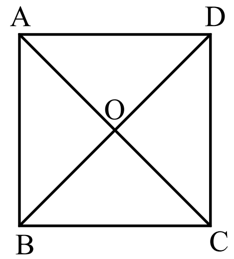
יחס צלעות זה שימושי מאוד בשאלות מסוימות בנושא המרובעים. בשאלות רבות עלינו לדעת לחשב מהר את אורך אלכסונו של ריבוע על מנת לפתור את השאלה (או לחשב את אורך הצלע מהאלכסון). לשם פתרון מהיר של השאלה, כדאי לזכור שאלכסון ריבוע שווה לאורך צלע הריבוע כפול $\sqrt{2}$. זאת מכיוון שאלכסון הריבוע יוצר שני משולשים שווי שוקיים וישרי זווית (מכיוון שכל צלעות הריבוע שוות זו לזו, וכל זוויות הריבוע הן זוויות ישרות), אשר הניצבים שלהם הם צלעות הריבוע, והיתר הוא אלכסון הריבוע.



כפי שראינו, יחס הצלעות במשולש מסוג זה הוא $1:1:\sqrt{2}$, ולכן אלכסון הריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מצלעו.

<u>שאלה לדוגמה</u>

ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 2 ס"מ. מה היקף המשולש AOD (בס"מ)?



(1) $2+4\sqrt{2}$

(2) $2+2\sqrt{2}$

(3) $2+\sqrt{2}$

(4) 4

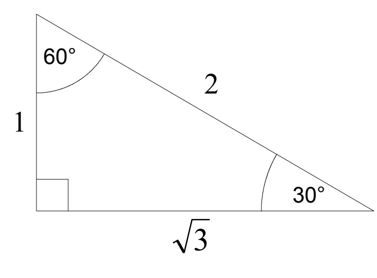
<u>פתרון</u>

כפי שראינו, אורך אלכסונו של הריבוע גדול מצלעו פי $\sqrt{2}$, ולכן, מכיוון שצלעו של הריבוע שווה ל- 2 ס"מ, אורך האלכסון הוא $2\sqrt{2}$ ס"מ.

כלל נוסף הדרוש לפתרון השאלה הוא שאלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה. לכן, הקטעים AO, DO, CO ו- BO שווים זה לזה, ושווים כל אחד למחצית מהאלכסון, כלומר $\sqrt{2}$ ס"מ. מכאן, היקף המשולש AOD הוא $2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$ ס"מ.

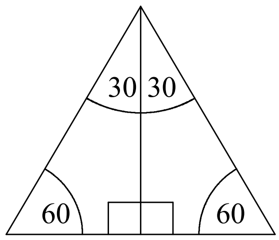
התשובה הנכונה היא (2).

2. משולש ישר זווית שזוויותיו $30°,60°,90°$:



יחס הצלעות במשולש מסוג זה הוא $1:\sqrt{3}:2$ (הניצב הקטן, שנמצא מול זווית של $30°$, הוא בעל יחידת יחס 1, הניצב הגדול, שנמצא מול זווית של $60°$, הוא בעל $\sqrt{3}$ יחידות יחס והיתר הוא בעל 2 יחידות יחס).

משולש מסוג זה מהווה בדיוק מחצית ממשולש שווה צלעות (כל משולש שווה צלעות ניתן לחצות על ידי העברת גובה ולקבל שני משולשים מסוג זה:



<u>שאלה לדוגמה</u>

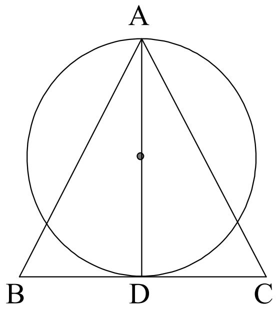
ABC הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו 4 ס"מ. הקטע AD הוא גובה במשולש ABC והוא גם קוטר במעגל (ראו סרטוט). מה היקף המעגל?

(1) $\sqrt{3}\,\pi$

(2) $2\sqrt{3}\,\pi$

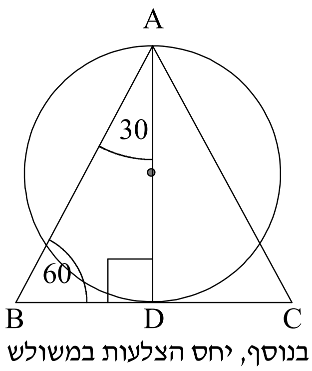
(3) $4\sqrt{3}\,\pi$

(4) $8\sqrt{3}\,\pi$



<u>פתרון</u>

מכיוון שגובה במשולש שווה צלעות הוא גם תיכון, אז BD=DC וכל אחד מהם שווה ל- 2 ס"מ. כפי שראינו, המשולשים ABD ו- ADC זהים וכל אחד מהם הוא משולש שזוויותיו $30°,60°,90°$. נסתכל על משולש ABD:



כפי שחישבנו, BD שווה ל- 2 ס"מ. בנוסף, יחס הצלעות במשולש שזוויותיו $30°,60°,90°$ הוא $2:\sqrt{3}:1$

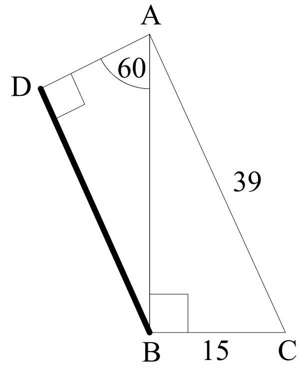
ולכן הקטע AD שווה ל- BD כפול $\sqrt{3}$, שהם $2\sqrt{3}$ ס"מ. מכיוון ש- AD הוא קוטר, הוא שווה ל- 2r

(קוטר שווה לפעמיים הרדיוס). היקף מעגל שווה ל- $2\pi r$, ומכאן הוא שווה ל- $2\pi r = 2r\cdot\pi = 2\sqrt{3}\,\pi$.

התשובה הנכונה היא (2).

<u>דוגמה נוספת למשפט פיתגורס</u>

נתונים שני משולשים ישרי זווית ABC ו- ABD. לפי נתוני הסרטוט, מה אורכו של הקו המודגש?



(1) 18

(2) $36\sqrt{3}$

(3) $18\sqrt{3}$

(4) $18\sqrt{2}$

<u>פתרון</u>

אם נחלק את 15 ואת 39 ב- 3 נקבל 5 לאחד הניצבים ו- 13 ליתר. כלומר, הדבר מתאים ליחסי הצלעות 5:12:13 במשולש ישר זווית, ולכן הניצב השני – AB – שווה ל- 12 כפול 3, כלומר ל- 36 ס"מ. (שימו לב שאם היחס היה 5:13 בין שני ניצבים, לא היה ניתן למצוא את הצלע השלישית לפי השלשה 5:12:13, היות ובשלשה זו ה- 13 הוא היתר ולא הניצב).

במשולש ABD יש לנו זווית ישרה וזווית בת $60°$, ומכיוון שסכום הזוויות במשולש הוא $180°$, הזווית השלישית שווה ל- $180°-90°-60°=30°$, כלומר המשולש הוא משולש בעל זוויות $30°,60°,90°$.
במשולש זה, הניצב הקטן שווה למחצית היתר, ומכיוון שהיתר הוא הצלע AB שאורכה 36 ס"מ, הניצב AD (שהוא הניצב הקטן כיוון שהוא נמצא מול הזווית של $30°$) שווה ל- $\frac{36}{2}=18$ ס"מ. הניצב הגדול במשולש, שהוא הצלע BD, שווה לאורך הניצב הקטן כפול $\sqrt{3}$, כלומר ל- $18\sqrt{3}$ ס"מ.
התשובה הנכונה היא (3).

<u>סיכום</u>

נושאי הדמיון ומשפט פיתגורס הם פעמים רבות הבסיס לפתרון שאלות בגיאומטריה, הן בתחום החד ממד והן בתחומי הדו ממד והתלת ממד ועל כן חשוב להבינם טוב ולתרגל אותם הרבה. בשיעורים הבאים נראה איך נושאים אלו משתלבים בשאלות מתקדמות יותר.