שיעור חד ממד בסיסי

נושא הגיאומטריה מרכיב כשליש מהפרק הכמותי. כללי החד ממד הם הבסיס לפתרון שאלות הגיאומטריה במבחן ככלל, ובנושא החד ממד בפרט.

דף הנוסחאות, הוא הבסיס לשאלות החד ממד, וכן לנושאים מתקדמים כגון דו ממד ותלת ממד, ולכן יש לוודא שינון הכללים שבו, והבנתם, לפני תחילת התרגול.

שיעור זה בא להדגים סוגי שאלות בסגנון המופיע בבחינה, ודרכים לפתרונן. מטבע הדברים, השיעור אינו מקיף את כל סוגי השאלות שיכולות להופיע בנושא החד ממד, שכן מדובר בנושא גדול מאוד, עם זאת, דרך החשיבה היא החשובה, ועל כך יש לשים את הדגש ההבנתי.

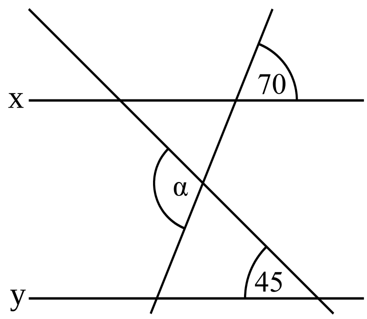
ישרים

הנושאים הדרושים על מנת לפתור שאלות בתחום הישרים הם:

- סוגי זוויות והגדרותיהן (זווית חדה, ישרה, קהה, שטוחה, זוויות צמודות, זוויות קדקודיות)
- כללי היחסים בין ישרים מקבילים הנחתכים על ידי ישרים מסוימים
- סוגי זוויות בין ישרים מקבילים (זוויות מתחלפות ומתאימות)

שאלות לדוגמה

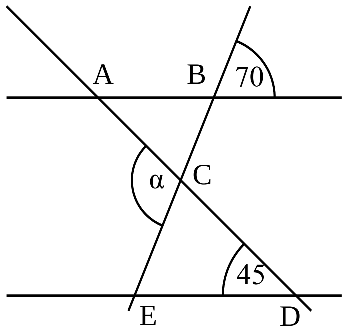
1. הישרים x ו- y שבסרטוט מקבילים זה לזה. על פי נתוני הסרטוט, מה גודלה של זווית α?



(1) 65°
(2) 105°
(3) 115°
(4) 135°

<u>פתרון</u>

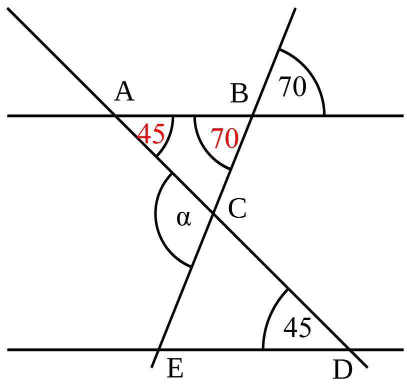
לשם ההסבר נסמן באותיות את נקודות החיתוך בין הישרים:



הזווית ABC היא זווית קדקדית לזווית הנתונה לנו שגודלה $70°$. זוויות קדקדיות שוות זו לזו ולכן זווית ABC שווה גם היא ל- $70°$.

הזוויות BAC ו- CDE (השווה ל- $45°$) הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים. זוויות מתחלפות שוות זו לזו ולכן הזווית BAC שווה גם היא ל- $45°$.

כעת יש לנו שתי זוויות במשולש ABC:



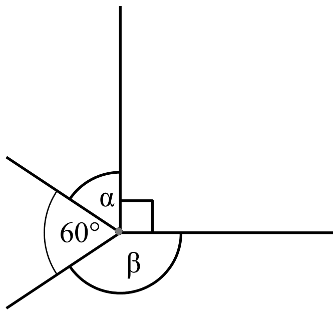
סכום הזוויות במשולש הוא $180°$ ולכן הזווית BCA שווה ל- $180° - 70° - 45° = 65°$.

הזווית α היא זווית צמודה לזווית BCA, כלומר היא משלימה אותה ל- $180°$, ולכן גודלה הוא $180° - 65° = 115°$.

התשובה הנכונה היא (3).

2. בסרטוט שלפניך, הנקודה השחורה היא המפגש של 4 ישרים.

לפי נתוני הסרטוט, $\alpha = ?$



(1) $30° - \beta$

(2) $210° - \beta$

(3) $270° - \beta$

(4) $360° - \beta$

<u>פתרון:</u>

סכום כל הזוויות סביב הנקודה המודגשת הוא $360°$. נשים לב שהסימון: , משמעותו זווית של 90 מעלות. לכן, הזווית α שווה ל- 360 פחות כל שאר הזוויות: $\alpha = 360 - 90 - 60 - \beta = 210° - \beta$.

התשובה הנכונה היא (2).

משולשים

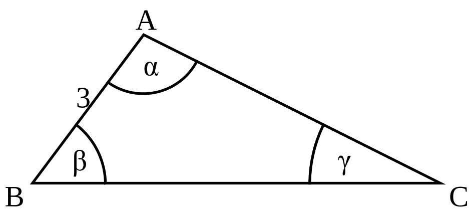
על מנת לפתור את שאלות המשולשים עליכם לדעת ולהבין את הנושאים הבאים :

- חוקים הנוגעים לזוויות המשולש (סכום הזוויות, זווית חיצונית)
- חוקים הנוגעים לצלעות המשולש
- קטעים במשולש (גובה, תיכון, חוצה זווית)
- חפיפה ודמיון בין משולשים
- סוגי משולשים ותכונותיהם (חד זווית, קהה זווית, ישר זווית, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות)

<u>שאלות לדוגמה</u>

1. ABC הוא משולש שזוויותיו α, β ו- γ. נתון כי $\gamma > \beta > \alpha$, ו- AB=3.

על פי נתונים אלה, מה יכולים להיות אורכי הצלעות AC ו- BC (בס"מ)?



(1) AC=8, BC=6

(2) AC=5, BC=9

(3) AC=5, BC=7

(4) כל התשובות נכונות

<u>פתרון</u>

על מנת לפתור שאלה זו עלינו לזכור שני כללים חשובים :

1. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
2. מול זווית גדולה יותר במשולש, נמצאת צלע ארוכה יותר.

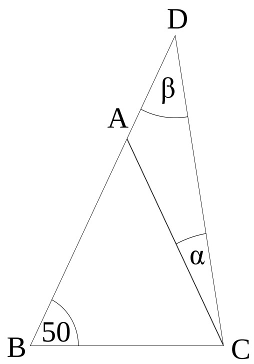
תשובה מספר 1 מקיימת את הכלל הראשון אך אינה מקיימת את הכלל השני, שכן לפי הנתון $\alpha > \beta$ ולכן הצלע BC אמורה להיות גדולה מהצלע AC.

תשובה מספר 2 מקיימת את הכלל השני אך אינה מקיימת את הכלל הראשון, שכן סכום AB ו- AC אמור להיות גדול מ- BC.

תשובה מספר 3 מקיימת את שני התנאים ולכן זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (3).

2. משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB=AC).
הקטע AD הוא המשך הצלע AB.
על פי נתון זה ונתוני הסרטוט, $\alpha+\beta=?$



(1) 80°
(2) 100°
(3) 60°
(4) 50°

<u>פתרון</u>

נתון שמשולש ABC הוא שווה שוקיים. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו, כלומר זווית ABC שווה לזווית ACB, ולכן זווית ACB שווה ל- 50°. סכום הזוויות במשולש הוא 180°, ולכן זווית BAC שווה ל- $180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$. הזווית BAC היא זווית חיצונית למשולש ADC. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה. שתי הזוויות הללו במשולש ADC הן הזוויות α ו- β, ולכן סכומן שווה לזווית BAC, כלומר ל- 80°.

התשובה הנכונה היא (1).

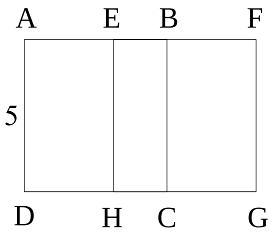
מרובעים

על מנת לפתור שאלות בתחום המרובעים יש לדעת עבור כל סוג מרובע (ריבוע, מלבן, טרפז, מקבילית, מעוין ודלתון) את ההגדרה שלו ואת התכונות המאפיינות אותו (זוויות, צלעות, אלכסונים, גבהים).

<u>שאלות לדוגמה</u>

1. ABCD ו- EFGH הם ריבועים. E ו- H הן נקודות על הצלעות AB ו- CD בהתאמה, וכן $AD \| EH$.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה ההיקף המקסימלי האפשרי של המלבן AFGD (בס״מ)?



(1) 20

(2) 30

(3) 40

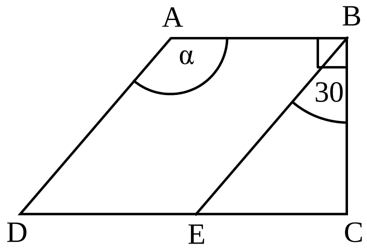
(4) 60

<u>פתרון</u>

ההיקף מקסימלי מתקבל כאשר הצלע EH מתלכדת עם הצלע BC. במקרה זה יש לנו שני ריבועים זהים צמודים, והיקף המלבן שנוצר מורכב מ- 6 צלעות שלהם. כלומר, ההיקף המקסימלי האפשרי הוא $6 \cdot 5 = 30$.

התשובה הנכונה היא (2).

2. ABCD הוא טרפז ישר זווית ו- ABED היא מקבילית.
על פי נתוני הסרטוט, מה גודלה של הזווית α?



(1) $60°$

(2) $90°$

(3) $120°$

(4) $150°$

<u>פתרון</u>

מכיוון שהזווית ABC היא זווית ישרה והזווית EBC שווה ל- $30°$ על פי נתוני הסרטוט, הזווית ABE שווה $90° - 30° = 60°$. הזווית α והזווית ABE הן זוויות סמוכות במקבילית. סכום כל שתי זוויות סמוכות במקבילית שווה ל- $180°$, ולכן הזווית α שווה ל- $180° - 60° = 120°$.

התשובה הנכונה היא (3).

מצולעים

שתי נוסחאות רלוונטיות למצולעים הן נוסחה למציאת סכום הזוויות במצולע ונוסחה למציאת מספר האלכסונים במצולע.

סכום הזוויות במצולע שמספר צלעותיו n: $(n-2)\cdot 180^\circ$

מספר האלכסונים במצולע שמספר צלעותיו n: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

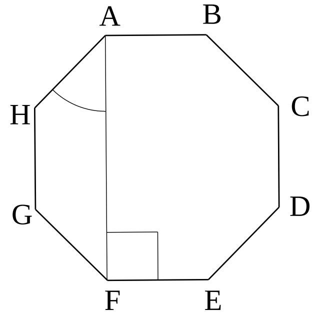
מצולע משוכלל

בשאלות המערבות מצולעים משוכללים עלינו לזכור כי ביכולתנו לדעת את גודלה של כל אחת מזוויות המצולע אם ידוע לנו מספר הצלעות (שכן מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות).

עבור מספר צלעות n, גודלה של זווית המצולע m יהיה $m = (180^\circ - \frac{360}{n})$.

שאלה לדוגמה

נתון מתומן משוכלל ABCDEFGH. הקטע AF הוא גובה במתומן. למה שווה הזווית α?



(1) 30°
(2) 45°
(3) 50°
(4) 60°

פתרון

למתומן יש 8 צלעות. כל זווית פנימית במתומן משוכלל שווה ל-

$m = (180^\circ - \frac{360}{8}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

הגובה במתומן יוצר
שתי זוויות ישרות: FAB ו-
AFE. מכיוון שהזווית HAB שווה ל- 135°, הזווית α שווה ל- $135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

התשובה הנכונה היא (2).

כדאי לדעת בעל-פה את גודלן של הזוויות הפנימיות במצולעים המשוכללים הבאים:

משולש שווה צלעות - 60°

ריבוע - 90°

מחומש משוכלל - 108°

משושה משוכלל - 120°

מתומן משוכלל - 135°

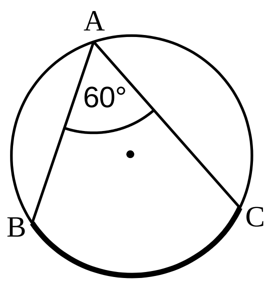
מעגלים

על מנת לפתור שאלות העוסקות במעגלים יש לדעת את הנושאים הבאים:

- קטעים רלוונטים למעגלים (רדיוס, קוטר, מיתר, משיק)
- גדלים רלוונטים למעגלים (היקף, קשת, גזרה)
- זוויות במעגל והכללים הנוגעים אליהן (זוויות היקפיות, זוויות מרכזיות)
- צורות חסומות במעגל או חוסמות מעגל

<u>שאלות לדוגמה</u>

1. הנקודות A, B ו- C נמצאות על היקף המעגל שבסרטוט. רדיוס המעגל שווה ל- 12 ס"מ.
על פי נתוני הסרטוט, מה אורכה של הקשת המודגשת BC (בס"מ)?



(1) 8π

(2) 4π

(3) 6π

(4) 16π

<u>פתרון</u>

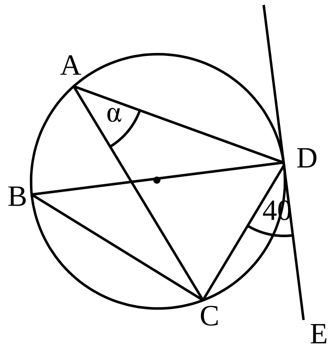
אורך קשת מחושב לפי הכפלת היקף המעגל בזווית המרכזית הנשענת על הקשת, חלקי $360°$ ($2\pi r \cdot \frac{x}{360}$), כלומר, עלינו לדעת מה היקף המעגל ואת גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת.

הכלל הראשון הנחוץ לפתרון השאלה הוא שזווית מרכזית כפולה בגודלה מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת. הזווית ההיקפית הנשענת על קשת BC שווה ל- $60°$, כלומר, הזווית המרכזית הנשענת על הקשת הקטנה BC שווה ל- $60° \cdot 2 = 120°$. היקף מעגל שרדיוסו r שווה ל- $2\pi r$, ובמקרה שלנו שווה ל- $2\pi \cdot 12 = 24\pi$. כעת נוכל לחשב את אורך הקשת על ידי הצבה:

$$2\pi r \cdot \frac{x}{360} = 24\pi \cdot \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \cdot 24\pi = 8\pi.$$

התשובה הנכונה היא (1).

2. הנקודות A, B, C ו- D נמצאות על היקף המעגל שבסרטוט. BD הוא קוטר במעגל, והנקודה D היא נקודת ההשקה בין המעגל לבין משיק למעגל. על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה גודלה של הזווית α?



(1) $30°$

(2) $40°$

(3) $50°$

(4) $60°$

<u>פתרון</u>

הכלל הראשון אשר ישמש אותנו בפתרון השאלה הוא שהזווית בין משיק למעגל לבין רדיוס המעגל (ולכן גם משיק לבין הקוטר) היא זווית ישרה. כלומר, הזווית BDE שווה ל- $90°$ ומכאן הזווית BDC שווה ל- $90° - 40° = 50°$.

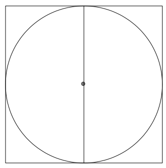
הכלל השני הוא שזווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$. כלומר, הזווית BCD שווה ל- $90°$.
במשולש, סכום הזוויות הוא $180°$ ולכן הזווית השלישית במשולש BDC, זווית DBC שווה ל- $180° - 90° - 50° = 40°$.

הכלל השלישי הוא שכל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו, ולכן הזווית α, הנשענת על הקשת CD שווה לזווית DBC הנשענת גם היא על קשת CD, ומכאן שווה ל- $40°$.
התשובה הנכונה היא (2).

שאלות מעורבות

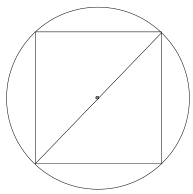
שאלות מעורבות הן שאלות שבהן יש שילוב של כמה צורות. שאלות מעורבות רבות עוסקות בצורות חסומות וחוסמות צורות אחרות. שימוש נפוץ מאוד הוא בצורות החסומות הבאות:

ריבוע חוסם מעגל



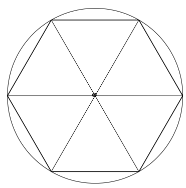
במקרה זה צלע הריבוע שווה לקוטר המעגל. למשל אם רדיוס המעגל שווה ל- r, אז צלע הריבוע החוסם מעגל שווה ל- 2r (מכיוון שקוטר שווה לפעמיים הרדיוס).

ריבוע חסום במעגל



במקרה זה אלכסון הריבוע שווה לקוטר המעגל. כלומר, אם רדיוס המעגל שווה ל- r, אז אלכסון הריבוע החסום במעגל שווה ל- 2r.

משושה משוכלל חסום במעגל

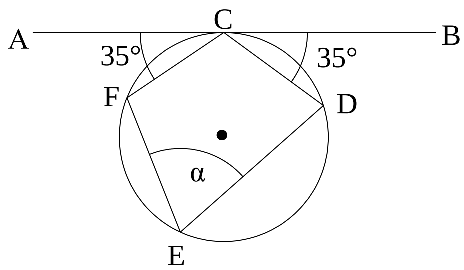


כלל חשוב שחוזר על עצמו רבות הוא שכאשר משושה חסום במעגל, צלעו שווה לרדיוס המעגל.

מה שקורה כאשר חוסמים משושה משוכלל במעגל הוא שעל ידי העברת אלכסונים, מתקבלים 6 משולשים שווי צלעות, שאורך צלעם שווה לרדיוס המעגל. כלומר, כל הזוויות המרכזיות שנוצרות הן בנות 60°.

<u>שאלות לדוגמה</u>

1. הקטע AB משיק למעגל שבסרטוט בנקודה C.
D, E ו- F הן נקודות על היקף המעגל.
זווית BCD וזווית ACF שווה כל אחת ל- $35°$. על פי נתונים אלה, מה גודלה של זווית α?



(1) $70°$

(2) $90°$

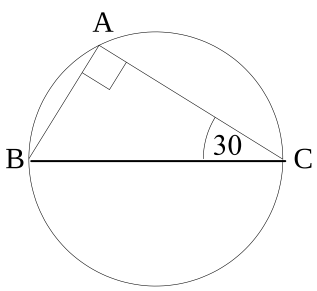
(3) $110°$

(4) $140°$

<u>פתרון</u>

סכום הזוויות ACF, FCD ו- BCD הוא $180°$ (הם יוצרים יחד זווית שטוחה) ולכן הזווית FCD שווה ל- $180°-35°-35°=110°$. CDEF הוא מרובע החסום במעגל. הכלל הוא שכאשר מרובע חסום במעגל סכום כל זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180°$, כלומר סכום הזוויות FCD ו- FED (שהיא הזווית α) שווה ל- $180°$. מצאנו כי הזווית FCD שווה ל- $110°$, ומכאן הזווית α שווה ל- $180°-110°=70°$.
התשובה הנכונה היא (1).

2. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 3 ס״מ.
על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה היקף המשולש (בס״מ)?



(1) $6+3\sqrt{2}$

(2) $12+2\sqrt{3}$

(3) $9+3\sqrt{2}$

(4) $9+3\sqrt{3}$

<u>פתרון</u>

זווית היקפית במעגל השווה ל- $90°$ נשענת על קוטר המעגל. מכאן, צלע המשולש BC היא קוטר המעגל. קוטר מעגל כפול באורכו מהרדיוס, ולכן $BC = 2 \cdot 3 = 6$.

סכום הזוויות במשולש הוא $180°$, ולכן הזווית ACB שווה ל- $180° - 90° - 30° = 60°$. כלומר, המשולש ABC הוא משולש שזוויותיו הן $30°$, $60°$, $90°$. במשולש שאלו זוויותיו, מתקיים היחס $1 : \sqrt{3} : 2$ בין צלעותיו, כאשר ה- 1 מתייחס לניצב הקטן, $\sqrt{3}$ מתייחס לניצב הגדול ו- 2 מתייחס ליתר המשולש.

BC הוא יתר המשולש ומצאנו כי הוא שווה ל- 6 ס"מ, ומכאן הניצב הקטן שווה לאורך זה חלקי 2, כלומר ל- 3 ס"מ, והניצב הגדול שווה לאורך הניצב הקטן כפול $\sqrt{3}$, כלומר ל- $3\sqrt{3}$ ס"מ.

סך היקף המשולש ABC הוא $3 + 3\sqrt{3} + 6 = 9 + 3\sqrt{3}$ ס"מ.
התשובה הנכונה היא (4).

<u>סיכום</u>

כללי הבסיס בגיאומטריה חשובים ביותר לפתרון שאלות החד ממד וכן לשאלות מתקדמות יותר בדו ממד ותלת ממד. על כן חשוב לוודא שליטה מוחלטת בדף הנוסחאות, זאת בטרם ניגשים לפיתרון השאלות עצמן.

בבואכם לפתור שאלת חד ממד, בדקו לפי הנתונים המופיעים בשאלה מהם הנתונים החסרים לפתרונה, מהו הכלל הרלוונטי לשאלה וכיצד ניתן להשתמש בו על מנת לפתור אותה.

בשאלות בהן יש סרטוט, מומלץ לכתוב עליו את כל הנתונים ואת כל הגדלים אותם ניתן לחלץ מן הנתונים.
בשאלות בהן אין סרטוט, ניתן ורצוי לסרטטו בעצמכם ולרשום עליו את הנתונים.