



שיעור דו-ממד מתקדם

יחסי שטחים בין צורות דומות

צורות דומות הן צורות שגדלי הזוויות בהן שווים זה לזה.

צורות משוכללות מאותו סוג, יהיו תמיד דומות זו לזו (שני מעגלים, שני ריבועים, שני משושים משוכללים וכדומה).

כאשר שתי צורות הינן צורות דומות, יחס השטחים ביניהן שווה ליחס הגדלים החד-ממדיים ביניהן, בחזקת 2.

למשל, אם יחס הגבהים בין שני משולשים דומים הוא 1:2, אזי יחס השטחים ביניהם יהיה $(1:2)^2 = 1:4$.

שאלה לדוגמה

יחס השטחים בין שני ריבועים הוא 1:9. שטח הריבוע הגדול שווה ל-36 סמ"ר. מה אורך הצלע של הריבוע הקטן (בס"מ)?

- 1 (1)
- 2 (2)
- 3 (3)
- 4 (4)

פתרון

ריבועים בגדלים שונים הינם צורות דומות. יחס הקווים בין צורות דומות שווה לשורש יחס השטחים ביניהן, ובמקרה זה, יחס הקווים בין שני הריבועים יהיה $\sqrt{1:9} = 1:3$. אורך צלע הריבוע הגדול שווה לשורש השטח שלו: $\sqrt{36} = 6$. לפי היחס הקווי ניתן לראות כי אורך צלע הריבוע הקטן שווה לשליש מאורך צלע הריבוע הגדול, כלומר אורך צלע הריבוע הקטן שווה

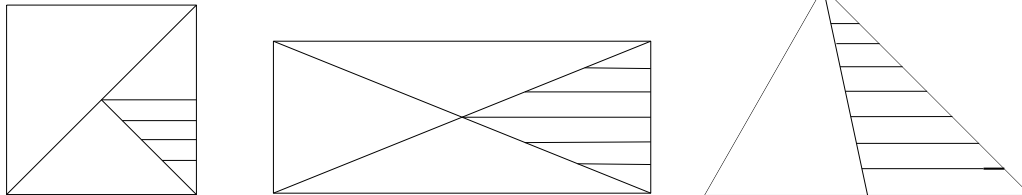
$$\text{ל- } \frac{6}{3} = 2 \text{ ס"מ.}$$

התשובה הנכונה היא (2).



מציאת שטחים חלקיים מתוך צורות

בסוג נוסף של שאלות נידרש למצוא שטחים חלקיים מתוך צורות. לדוגמה, מציאת השטחים המקווקים בצורות הבאות:

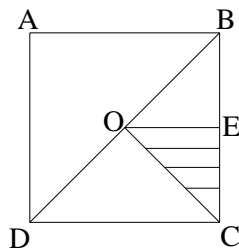


בשאלות אלה נמצא את הגדלים הרלוונטיים לשטח המבוקש מתוך הנתונים הקיימים לגבי הצורה. למשל, אם עבור המלבן נתונים לנו אורכי הצלעות, נוכל לחשב בקלות את הגדלים הרלוונטיים לשטח המקווקו. השטח המקווקו שווה לשטח משולש (בסיס כפול גובה חלקי 2).

בסיס המשולש היא למעשה רוחב המלבן (הנתון לנו - A), והגובה לצלע זו הוא מחצית מאורך המלבן (הנתון לנו אף הוא).

שאלה לדוגמא

אורך צלעו של הריבוע ABCD שבסרטוט 4 ס"מ. O היא נקודת מפגש האלכסונים. הקטע OE מאונך לצלע הריבוע BC. מה גודלו של השטח המקווקו (בסמ"ר)?



- (1) 2
- (2) 4
- (3) 8
- (4) 12



פתרון

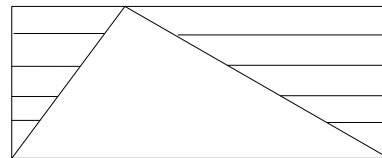
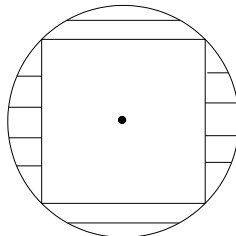
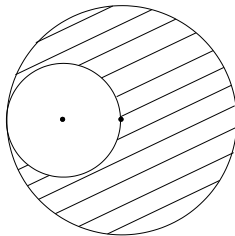
אלכסוני ריבוע מחלקים אותו ל-4 משולשים זהים ששטח כל אחד מהם שווה לרבע משטח הריבוע ומכאן כי שטח המשולש BOC שווה לרבע משטח הריבוע. מכיוון שמשולש זה הינו שווה שוקיים ($BO=OC$), ומכיוון שהקטע OE הוא הגובה לצלע BC, המשולש OEC (השטח המבוקש) שווה למחצית מהמשולש BOC, ולכן שטחו שווה לשמינית משטח הריבוע. שטח הריבוע שווה לאורך צלעו בחזקת 2: $4^2 = 16$,

$$\text{ומכאן גודל השטח המקווקו שווה } 2 = \frac{16}{8}.$$

התשובה הנכונה היא (1).

הפרשי יחסי שטחים

שאלות מסוימות ידרשו מאיתנו לחשב את גודלם של שני שטחים או יותר, ומתוך זה להסיק את גודלם של שטחים מסוימים, או את יחסי השטחים. למשל, חישוב גודל השטח המקווקו בצורות הבאות:



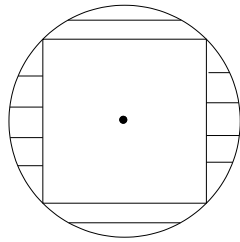
על מנת לפתור שאלות מסוג זה, תחילה עלינו ליצור משוואה שתתאר את השטח המקווקו.

למשל, עבור המעגל השמאלי, גודל השטח המקווקו שווה לשטח המעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן. אם למשל נתון לנו רדיוס המעגל הגדול, ונתון גם כי רדיוס המעגל הגדול הוא קוטר במעגל הקטן, נחסיר את שטח המעגל הקטן משטח המעגל הגדול, ונמצא את השטח המקווקו. לאחר חישובים אלו נוכל לחשב גם את היחס בין השטח הלבן לשטח המקווקו.



שאלה לדוגמה

ריבוע חסום בתוך מעגל שרדיוסו 4 ס"מ. מה גודלו של השטח המקווקו (בסמ"ר)?



(1) $8\pi - 16$

(2) $16\pi - 32$

(3) $16\pi - 16$

(4) $32\pi - 16$

פתרון

השטח המקווקו שווה לשטח המעגל פחות שטח הריבוע. כאשר ריבוע חסום בתוך מעגל אלכסונו של הריבוע שווה לקוטר המעגל, ומכיוון שאלכסון הריבוע יוצר משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים, צלע הריבוע שווה לאורך אלכסון הריבוע חלקי $\sqrt{2}$. במקרה שלנו, רדיוס המעגל שווה ל-4 ס"מ ולכן קוטרו יהיה שווה לאורך זה כפול 2 = 8 ס"מ, ואורך צלע הריבוע יהיה שווה ל- $\frac{8}{\sqrt{2}}$. שטח המעגל שווה ל-

$$16\pi = \pi \cdot 4^2 = \pi x^2. \text{ שטח הריבוע שווה לאורך צלעו בחזקת 2: } \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{64}{2} = 32. \text{ מכאן, גודלו של}$$

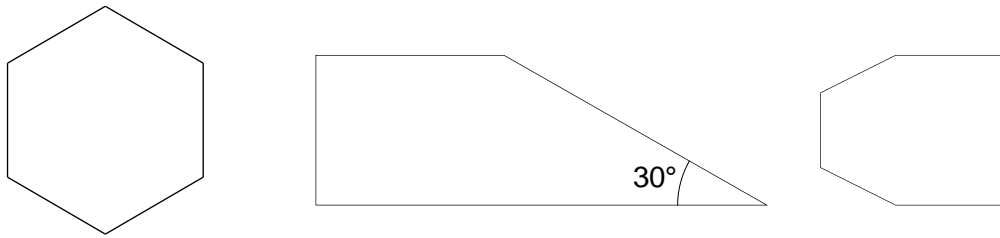
השטח המקווקו שווה ל- $16\pi - 32$ סמ"ר.

התשובה הנכונה היא (2).



חישוב שטח על ידי חלוקה לצורות משנה

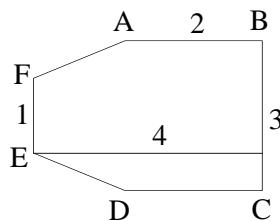
לעיתים אין באפשרותנו לחשב ישירות את השטח המבוקש ועלינו להעביר קווי עזר על מנת למצוא את הגדלים הדרושים לחישוב השטח, או ליצור צורות משנה, לחשב את שטחן ולחבר את השטחים. דוגמאות לכך הן הצורות הבאות:



אם למשל נתונים לנו רק גובה הטרפז ובסיסו הקטן, נוכל להעביר קו עזר שיחלק את הטרפז למשולש ומלבן, ולפי נתונים נוספים כגון זוויות נוכל למצוא את גודל הבסיס הגדול ולחשב את שטח הטרפז. את המשושה נוכל לחלק למלבן ולשני משולשים שווים שוקיים, ועל ידי הנתונים שבשאלה למצוא את שטחיהם ולבסוף לחברם לקבלת שטח המשושה.

שאלה לדוגמא

ABCDEF הוא משושה. לפי נתוני הסרטוט, מה שטחו (בסמ"ר)?

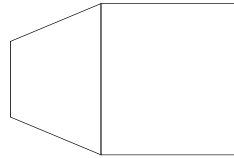


- 6 (1)
- 9 (2)
- 10 (3)
- 12 (4)



פתרון

נוכל לחלק את המשושה למלבן ולטרפז באופן הבא:



שטח המלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו (הנתונים לנו): $2 \cdot 3 = 6$. שטח טרפז שווה למכפלת סכום בסיסיו בגובהו, חלקי 2. בסיסו הקטן נתון לנו ושווה ל-1 ס"מ, ובסיסו הגדול שווה לרוחב המלבן ABCD ולכן נתון לנו גם הוא (ושווה ל-3 ס"מ). גובהו שווה ל-4 פחות רוחב המלבן – 2 – כלומר ל-2 ס"מ, ושטח הטרפז מכאן הוא $4 = \frac{(3+1) \cdot 2}{2}$ סמ"ר. שטח המשושה שווה לסכום שטח המלבן והטרפז: $6 + 4 = 10$

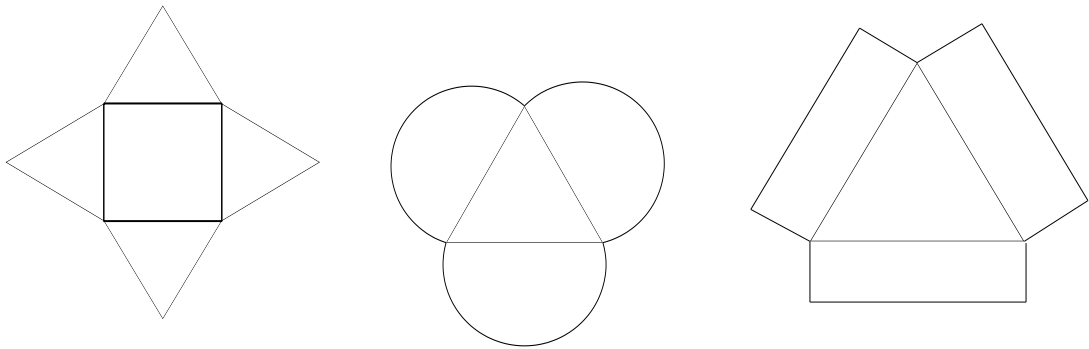
סמ"ר.

התשובה הנכונה היא (3).



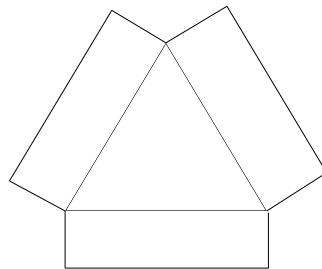
בניית צורות על צלעותיהן של צורות אחרות

בסוג אחר של שאלות נבנות צורות או חלקי צורות על צלעות של צורות אחרות, ועלינו לחשב את שטחן, או להסיק לגבי גדלים אחרים. למשל:



שאלה לדוגמא

על צלעותיו של משולש שווה צלעות בנו 3 מלבנים זהים, כמתואר בסרטוט. שטח המשולש שווה ל- $\sqrt{3}$ סמ"ר והיקף הצורה שנוצרה הוא 9 ס"מ. מהו סכום שטחי המלבנים (בסמ"ר)?



- (1) 3
- (2) 5
- (3) 6
- (4) 8

פתרון

רוחב המלבן שווה לצלע המשולש. את צלע המשולש נוכל למצוא על ידי הצבת שטח המשולש הנתון לנו בנוסחת השטח של משולש שווה צלעות: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ ומכאן $a^2 = 4$ ו- $a = 2$. היקף הצורה שנוצרה שווה ל- 3 פעמים רוחב המלבנים ועוד 6 פעמים אורכם. נניח כי אורך כל אחד מהמלבנים הוא x ס"מ. את רוחב המלבנים מצאנו והוא 2 ס"מ. כעת נבנה משוואה ונציב את ההיקף הנתון לנו בשאלה:

$$3 \cdot 2 + 6x = 9$$

מכאן $6x = 3$ ו- $x = 0.5$. שטח כל אחד מהמלבנים שווה למכפלת אורכם ברוחבם:

$$2 \cdot 0.5 = 1$$

וסכום שטחי המלבנים יהיה שווה לשלוש פעמים שטח זה, כלומר ל- 3 ס"מ.

התשובה הנכונה היא (1).



סיכום

על מנת לפתור שאלות מהסוג שראינו, עלינו לבנות נוסחה אשר תתאר את הגודל המבוקש (הפרשי שטחים, סכום צורות המשנה המרכיבות צורה וכדומה). לאחר מכן, שלבי הפתרון זהים לאלה שתוארו בשיעור דו-ממד הבסיסי – מציאת הגדלים הרלוונטים לנוסחה, הצבתם בנוסחה ומציאת הגודל המבוקש.