שיעור דו-ממד בסיסי

מבוא

תחום הדו-ממד עוסק בשטחיהן של צורות.

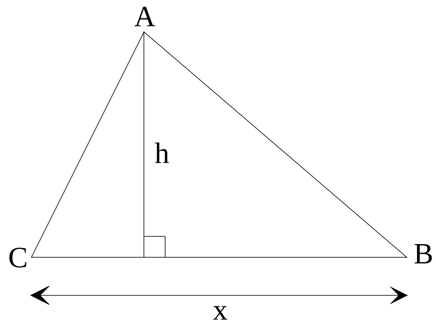
השטחים הנדרשים בבחינה הם שטחים של משולשים, מרובעים (ריבוע, מלבן, מקבילית, טרפז, דלתון ומעוין), מצולעים נוספים כגון מחומשים, משושים וכו', מעגלים, וכן צורות המוגדרות בשאלות עצמן אך אין להן הגדרה גיאומטרית משלהן.

השאלות בנושא דו-ממד יכולות לכלול חישובי שטחים של צורות או של חלקי צורות, יחסי שטחים בין צורות דומות, הפרשי ויחסי שטחים, חישוב שטחים על ידי חלוקה לצורות משנה, מציאת שטחים או היקפים של צורות שאינן מוגדרות שנוצרו מצורות מוגדרות, מציאת גדלים חד ממדיים בתוך צורות דו ממדיות, וכדומה.

א. משולשים

שטח משולש הוא מכפלת אורך צלע אחת שלו בגובה לאותה הצלע, חלקי 2.

במשולש ABC שבסרטוט אורך הצלע BC הוא x ס"מ, ואורך הגובה הוא h ס"מ:

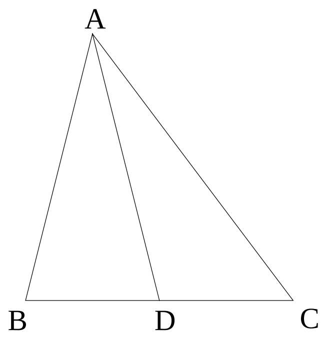


שטח המשולש ABC הוא: $\frac{x \cdot h}{2}$.

למשל, עבור משולש שאורך הצלע BC שלו הוא 4 ס"מ, ואורך הגובה לצלע BC הוא 5 ס"מ, השטח יהיה שווה ל: $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

<u>שאלה לדוגמה</u>:

במשולש ABC שבסרטוט מתקיים: BD=DC. קטע BD שווה ל- 2 ס"מ, ואורך הגובה ל- BD שווה ל- 6 ס"מ. מה שטח המשולש ADC (בסמ"ר)?



(1) 12
(2) 8
(3) 6
(4) 4

<u>פתרון</u>

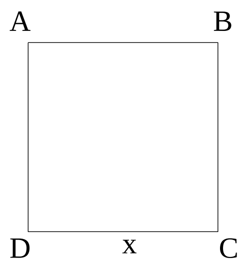
שטח משולש הוא מכפלת אורך צלעו בגובה לאותה הצלע, חלקי 2. לפי הנתון, BD=DC, כלומר למשולשים ADC ו- ABD צלע אחת זהה. מכיוון שהקדקוד שנמצא מול שתי צלעות אלו הוא אותו הקדקוד, הגובה לצלע DC הוא אותו הגובה לצלע BD, ושווה ל- 6 ס"מ. מכאן שטח המשולש ADC הוא $\frac{2\cdot 6}{2}=6$.

התשובה הנכונה היא (3).

ב. מרובעים

<u>ריבוע</u>

שטח ריבוע שווה לאורך צלעו בחזקת 2. בריבוע ABCD שבסרטוט אורך הצלע הוא x ס״מ:



והשטח שלו הוא x^2.

למשל, בריבוע שאורך צלעו 3 ס״מ, השטח יהיה שווה ל- $3^2 = 9$.

<u>שאלה לדוגמה</u>

שטח ריבוע שווה ל- 16 סמ״ר. מה היקפו (בס״מ)?

(1) 12
(2) 16
(3) 24
(4) 32

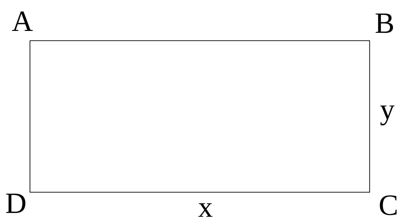
<u>פתרון</u>

אורך צלע ריבוע שווה לשורש שטחו: $\sqrt{16} = 4$, ומכאן היקפו שווה ל- $4 \cdot 4 = 16$.

התשובה הנכונה היא (2).

<u>מלבן</u>

שטח מלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו. אורך המלבן ABCD שווה ל- x ס"מ ורוחבו שווה ל- y ס"מ:



ושטחו שווה ל- $x \cdot y$.

למשל, במלבן שאורכו שווה ל- 5 ס"מ ורוחבו שווה ל- 7 ס"מ, שטחו יהיה שווה ל- $5 \cdot 7 = 35$.

<u>שאלה לדוגמה</u>

אורכו של מלבן כפול מרוחבו. שטח המלבן 32 סמ"ר. מה אורכו (בס"מ)?

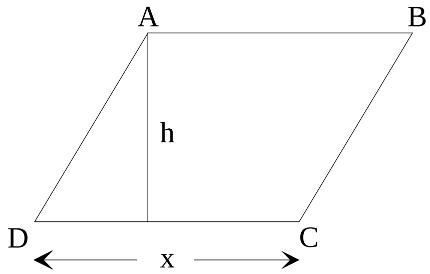
(1) 2
(2) 4
(3) 6
(4) 8

<u>פתרון</u>

נקרא לרוחב המלבן x. לפי הנתון אורכו כפול מרוחבו, ולכן אורכו שווה ל- $2x$ ס"מ. שטח מלבן שווה למכפלת רוחבו באורכו. נציב את הנתון: $2x \cdot x = 32$ ומכאן $x = 4$ והאורך $(2x)$ שווה ל- $2 \cdot 4 = 8$.
התשובה הנכונה היא (4).

מקבילית

שטח מקבילית שווה לאורך צלע אחת שלה כפול הגובה לאותה הצלע. במקבילית ABCD אורך הצלע CD הוא x ס״מ ואורך הגובה לצלע זו הוא h ס״מ:

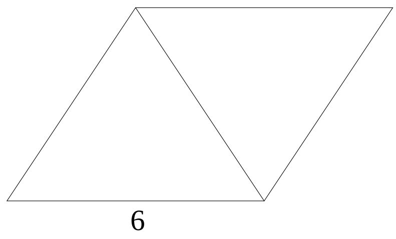


שטח המקבילית שווה ל- $x \cdot h$.

למשל, אם במקבילית ABCD אורך הצלע CD שווה ל- 5 ס״מ ואורך הגובה לצלע זו שווה ל- 3 ס״מ, שטח המקבילית יהיה שווה ל- $5 \cdot 3 = 15$ סמ״ר.

שאלה לדוגמה

שני משולשים שווי צלעות הוצמדו זה לזה בבסיסם כך שנוצרה מקבילית, כמתואר בסרטוט. אורך צלעו של כל אחד מהמשולשים הוא 6 ס״מ. מה שטח המקבילית (בסמ״ר)?



(1) $18\sqrt{3}$

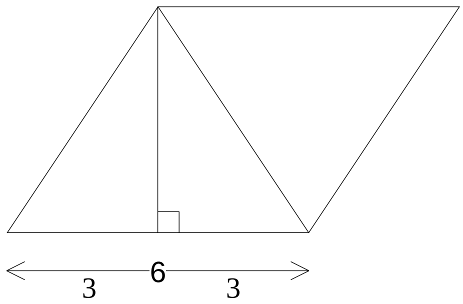
(2) $16\sqrt{2}$

(3) 18

(4) 14

<u>פתרון</u>

שטח מקבילית שווה למכפלת אורך צלעה בגובה לאותה הצלע. נוריד גובה במקבילית.

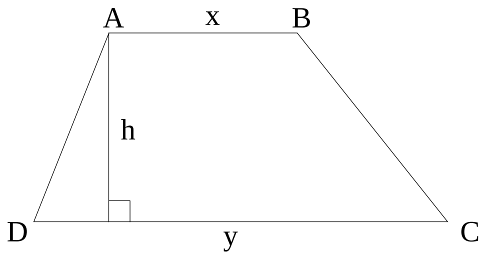


הגובה מחלק את אחד המשולשים לשני משולשים זהים בעלי זוויות $30°$, $60°$, $90°$. במשולש זה הניצב הגדול, שהוא גובה המקבילית, ארוך פי $\sqrt{3}$ מאורך הניצב הקטן, כלומר הוא שווה ל- $3\sqrt{3}$ ס״מ. אורך הצלע שאליה יורד גובה זה נתון לנו והוא שווה ל- 6 ס״מ. מכאן שטח המקבילית שווה ל-
$6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

התשובה הנכונה היא (1).

<u>טרפז</u>

שטח טרפז שווה לסכום בסיסיו כפול גובהו, חלקי 2. בטרפז ABCD אורך הבסיס הקטן של טרפז הוא x ס״מ, אורך הבסיס הגדול y ס״מ והגובה שווה ל- h ס״מ:

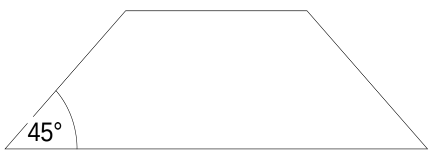


שטח הטרפז שווה ל- $\frac{(x+y)\cdot h}{2}$.

למשל, אם בטרפז מסוים אורך הבסיס הקטן 2 ס״מ, אורך הבסיס הגדול 6 ס״מ ואורך הגובה 5 ס״מ, שטח הטרפז יהיה שווה ל- $20 = \frac{40}{2} = \frac{8\cdot 5}{2} = \frac{(2+6)\cdot 5}{2}$ סמ״ר.

<u>שאלה לדוגמה</u>

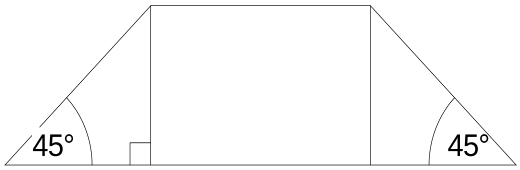
טרפז ABCD שבסרטוט הינו שווה שוקיים. גובה הטרפז שווה באורכו לבסיסו הקטן. שטח הטרפז 2 סמ״ר. לאור נתונים אלו ונתוני הסרטוט, מה אורך בסיסו הקטן (בס״מ)?



(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

<u>פתרון</u>

נוריד גובה בטרפז:



נניח כי אורך הבסיס הקטן הוא x ס"מ. מכיוון שלפי הנתון הבסיס הקטן שווה לגובה, גם הגובה שווה ל- x ס"מ. מכיוון שזווית הבסיס של הטרפז שווה ל- 45°, המשולש AED הינו משולש שווה שוקיים וישר זווית. הצלע AE היא גובה הטרפז ולכן שווה ל- x ס"מ ומכאן שאורך הקטע DE שווה גם הוא ל- x ס"מ. באותה צורה נוכל להסיק כי אורך הקטע CF שווה גם הוא ל- x ס"מ. אורך הקטע EF שווה לאורך הבסיס הקטן = x ס"מ. מכאן, אורך הבסיס הגדול שווה ל- 3x ס"מ.

שטח טרפז שווה לסכום בסיסיו כפול הגובה, חלקי 2.

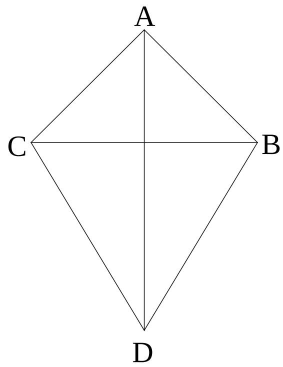
נציב את הנתונים: $2 = \frac{(x+3x)\cdot x}{2}$ ומכאן $4x^2 = 4$ ו- $x = 1$.

התשובה הנכונה היא (1).

<u>דלתון</u>

שטח דלתון שווה למכפלת אלכסוניו חלקי 2.

בדלתון ABCD אורך האלכסון $AD = x$ ס"מ ואורך האלכסון $BC = y$ ס"מ.



שטח הדלתון הוא: $\frac{x \cdot y}{2}$.

למשל, אם אורכי האלכסונים בדלתון הם 6 ס"מ ו- 4 ס"מ, אז שטח הדלתון הוא $12 = \frac{24}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2}$ סמ"ר.

<u>שאלה לדוגמה</u>

סכום אורכי אלכסוני דלתון שווה ל- 6 ס"מ. אלכסון אחד של הדלתון כפול באורכו מהאלכסון השני. מה שטח הדלתון (בסמ"ר)?

(1) 2
(2) 4
(3) 6
(4) 8

<u>פתרון</u>

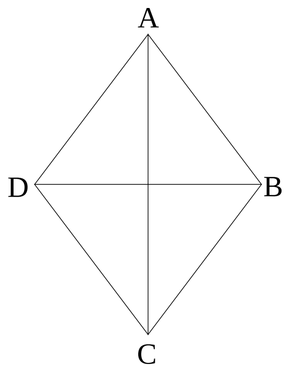
נניח כי אורך האלכסון הקצר שווה ל- x ס"מ. מכיוון שהאלכסון השני כפול באורכו, אורכו יהיה 2x ס"מ.

סכומם שווה ל- 6 ס"מ: $x + 2x = 6$ ומכאן $x = 2$ ו- $2x = 4$. שטח הדלתון הוא מכפלת האלכסונים חלקי 2: $4 = \frac{2 \cdot 4}{2}$ סמ"ר.

התשובה הנכונה היא (2).

מעוין

שטח מעוין שווה למכפלת אלכסוניו חלקי 2. במעוין ABCD אורך האלכסון AC הוא x ואורך האלכסון BD הוא y :

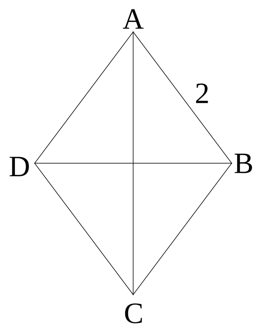


שטח המעוין שווה ל- $\frac{x \cdot y}{2}$.

למשל, אם אורכי האלכסונים במעוין הם 8 ס"מ ו-6 ס"מ, שטח המעוין יהיה שווה ל- $24 = \frac{48}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2}$ סמ"ר.

שאלה לדוגמה

זווית הראש של מעוין ABCD היא $60°$. צלע המעוין שווה ל- 2 ס"מ. מה שטח המעוין (בסמ"ר)?



(1) 2
(2) $2\sqrt{2}$
(3) 3
(4) $2\sqrt{3}$

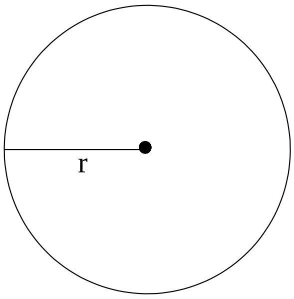
<u>פתרון</u>

שטח מעוין שווה למכפלת אלכסוניו חלקי 2, כלומר עלינו למצוא את אורכי האלכסונים. מכיוון שאלכסוני מעוין חוצים את זוויותיו, ומכיוון שזווית הראש שווה ל- $60°$, מחצית מזווית זו תהיה שווה ל- $30°$.

אלכסוני המעוין גם מאונכים זה לזה, ולכן בנקודת מפגש האלכסונים נוצרות זוויות של $90°$. למעשה נוצרים משולשים בעלי זוויות $30°$, $60°$, $90°$, שהיתר שלהם, שהוא צלע המעוין, שווה ל- 2 ס״מ. במשולש מסוג זה הניצב הקטן שווה למחצית היתר, כלומר ל- 1 ס״מ, והניצב הגדול שווה לניצב הקטן פי $\sqrt{3}$, כלומר ל- $\sqrt{3}$ ס״מ. האלכסון הקטן שווה לפעמיים הניצב הקטן, כלומר ל- 2 ס״מ, והאלכסון הגדול שווה לפעמיים הניצב הגדול, כלומר ל- $2\sqrt{3}$ ס״מ. מכאן שטח המעוין שווה ל- $\frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ סמ״ר.

התשובה הנכונה היא (4).

ג. מעגלים



שטח מעגל שרדיוסו r שווה ל- πr^2.

למשל, אם רדיוס מעגל שווה ל- 3 ס"מ, שטחו יהיה שווה ל- $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$ סמ"ר.

<u>שאלה לדוגמה</u>

שטח מעגל שווה ל- 25π סמ"ר. מה היקף המעגל (בס"מ)?

(1) 10π

(2) 5π

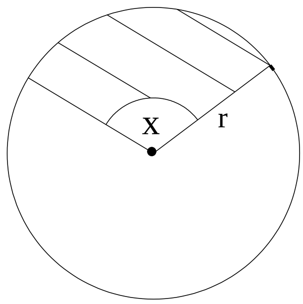
(3) 2π

(4) π

<u>פתרון</u>

שטח מעגל שרדיוסו r הוא πr^2. נציב את השטח הנתון ונמצא את r: $\pi r^2 = 25\pi$ ומכאן $r = 5$. היקף מעגל שווה ל- $2\pi r$, ועבור רדיוס השווה ל- 5 ס"מ: $2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$.
התשובה הנכונה היא (1).

שטח גזרת מעגל



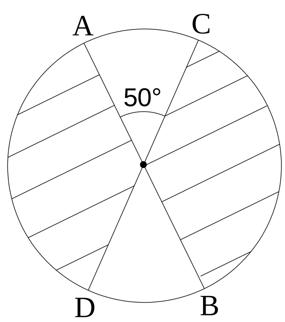
גזרה היא חלק ממעגל (השטח המקווקו שבסרטוט).

במעגל שרדיוסו r, והזווית המרכזית של הגזרה שווה ל- x, שטח הגזרה יהיה שווה ל- $\pi r^2 \cdot \frac{x}{360}$.

למשל, אם אורך רדיוס במעגל שווה ל- 3 ס"מ, והזווית המרכזית של הגזרה שאת שטחה אנו מתבקשים למצוא שווה ל- $120°$, שטח הגזרה יהיה שווה ל- $\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{120}{360} = \pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 3\pi$.

שאלה לדוגמה

רדיוס המעגל שבסרטוט 6 ס"מ. AB ו- CD קטרים במעגל. לפי נתון זה ונתוני הסרטוט, מה גודלו של השטח המקווקו (בסמ"ר)?



(1) 13π

(2) 23π

(3) 26π

(4) 32π

פתרון

השטח המקווקו מורכב משתי גזרות שהזווית המרכזית שלהן שווה בגודלה (הזוויות המרכזיות שלהן קדקדיות, ולפי הכלל – זוויות קדקדיות שוות זו לזו). לכן, נוכל לחשב את שטחה של אחת הגזרות ולכפול אותה ב- 2. הזווית המרכזית של כל אחת מהגזרות הינה זווית צמודה לזווית הנתונה של $50°$, כלומר היא שווה ל- $180-50=130°$ (סכום זוויות צמודות שווה ל- $180°$).

שטח גזרה שהזווית המרכזית שלה שווה ל- $130°$, כאשר הרדיוס שווה ל- 6 ס"מ, יהיה:

$\pi\cdot 6^2\cdot\frac{130}{360}=\pi\cdot 36\cdot\frac{13}{36}=13\pi$. מכאן, השטח המקווקו גודלו כפול: $2\cdot 13\pi=26\pi$.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

על מנת לענות על כל סוגי השאלות בנושא דו-ממד עלינו לדעת בראש ובראשונה כיצד מחשבים את שטחן של כל סוגי הצורות הבסיסיות. לכן, חשוב לזכור את הנוסחאות של שטחי הצורות הללו (משולש, ריבוע, מלבן, מקבילית, טרפז, דלתון, מעוין, מעגל וגזרת מעגל).

לאחר שקראתם שאלה, רשמו את הנוסחה הרלוונטית. בדקו אלו נתונים מתוך השאלה אתם יכולים להציב בנוסחה, או כיצד אתם יכולים למצוא נתונים הדרושים לנוסחה מתוך הנתונים הקיימים בשאלה.

שליטה בחישובי השטחים הבסיסיים תאפשר לנו לפתור שאלות מורכבות יותר בנושא זה.