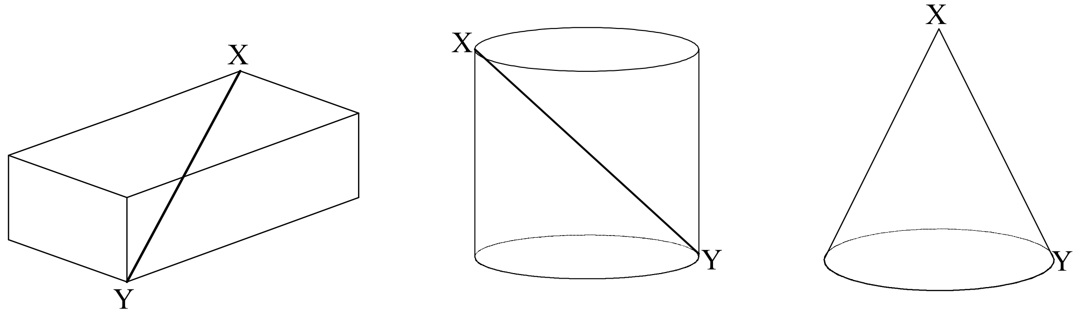
שיעור תלת-ממד מתקדם

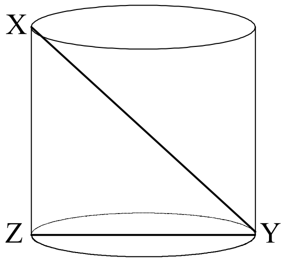
גדלים חד-ממדיים בגופים תלת-ממדיים

סוג אחד של שאלות הניתנות בבחינה עוסק בחישוב של גדלים חד-ממדיים בגופים תלת ממדיים.

דוגמאות אפשריות לכך הן הקטעים XY בגופים הבאים:



בשאלות מסוג זה יש להעביר קווי עזר שאת אורכם אנו יכולים למצוא, ובעזרתם למצוא את הגודל המבוקש. למשל, יצירת משולש ישר זווית, וחישוב אורכו של הקטע באמצעות משפט פיתגורס. בגליל שבדוגמה, אם נעביר קוטר במעגל שיתחבר עם הנקודה Y, נקבל משולש ישר זווית XYZ, שבו הקטע XY הוא היתר:

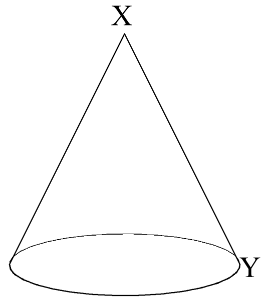


אם ידועים לנו הרדיוס / הקוטר והגובה, או שאנחנו יכולים למצוא את הגדלים הללו, נוכל לחשב את אורך הקטע XY. למשל, אם מצאנו שהקוטר הוא 3 ס"מ והגובה הוא 4 ס"מ, נציב במשפט פיתגורס ונמצא את XY: $3^2+4^2=(XY)^2$, ומכאן $XY=5$.

<u>שאלה לדוגמה</u>

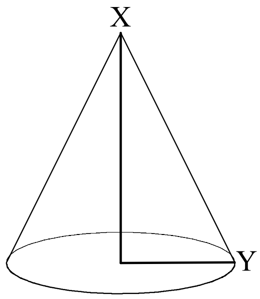
היקף בסיס החרוט שבסרטוט 8π ס"מ. גובה הגליל כפול מרדיוסו. מה אורך הקטע XY (בס"מ)?

1. $\sqrt{60}$
2. $\sqrt{64}$
3. $\sqrt{32}$
4. $\sqrt{80}$



פתרון:

נסרטט את גובה ורדיוס החרוט:



יצרנו משולש ישר זווית שניצביו הם הרדיוס וגובה החרוט, והיתר הוא הקטע XY. כלומר, אם נמצא את הרדיוס ואת הגובה, נוכל לחשב את אורכו של הקטע XY.

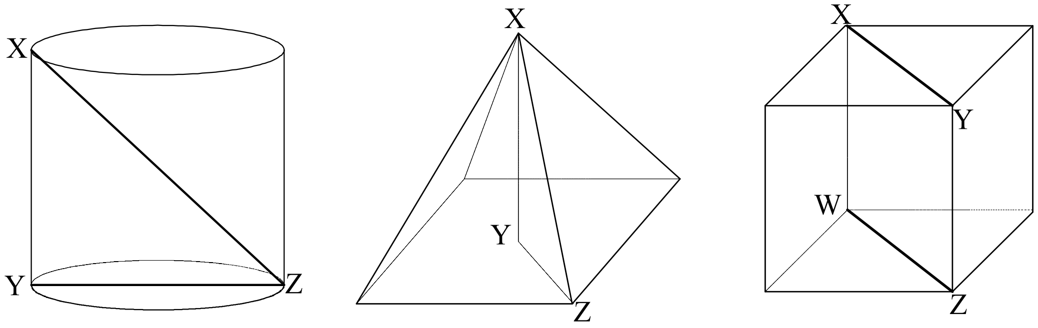
היקף בסיס החרוט הוא היקף מעגל, כלומר $2\pi \cdot r$. נציב את ההיקף הנתון ונמצא את הרדיוס:
$2\pi \cdot r = 8\pi$, ומכאן $r = 4$. לפי הנתון הגובה כפול מהרדיוס, כלומר אורכו 8 ס"מ. כעת נציב במשפט פיתגורס: $4^2 + 8^2 = (XY)^2$, ומכאן $XY = \sqrt{80}$.

התשובה הנכונה היא (4).

גדלים דו-ממדיים בגופים תלת-ממדיים

סוג נוסף של שאלות עוסק בחישוב גדלים דו-ממדיים הנמצאים בתוך גופים תלת-ממדיים.

דוגמאות אפשריות לכך הן המשולשים והמלבן בגופים הבאים:



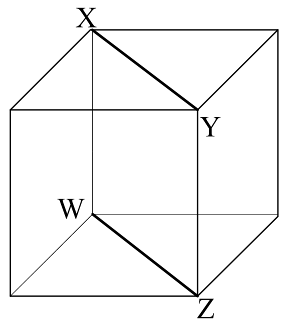
בשאלות מסוג זה עלינו לבדוק אלו גדלים אנו צריכים לדעת על-מנת לחשב את השטח המבוקש, ואם הם לא נתונים לנו, עלינו לחשבם.

למשל, חישוב שטח המשולש XYZ בפירמידה המרובעת שבדוגמה: המשולש XYZ הוא משולש ישר זווית שניצביו הם גובה הפירמידה ומחצית מאלכסון הבסיס, והיתר הוא המקצוע שבין פאות הפירמידה. שטח משולש ישר זווית הוא מכפלת ניצביו חלקי 2, כך שהגדלים הרלוונטיים לנו הם גדלי הניצבים. אם לא נתון לנו הניצב YZ, אבל נתון לנו גודל מקצוע הבסיס, נוכל לחשב את הניצב YZ ע"י חישוב אלכסון הבסיס וחלוקתו ב- 2.

למשל, אם מקצוע הבסיס שווה ל- 2 ס"מ, אלכסון הבסיס, שהוא אלכסון ריבוע במקרה שלנו, הוא אורך המקצוע כפול $\sqrt{2}$, כלומר $2\sqrt{2}$ ס"מ, ומחצית מהאלכסון, שהוא הניצב YZ הוא $\sqrt{2}$ ס"מ. אם הגובה שווה לדוגמה ל- 3 ס"מ נוכל לחשב את שטח המשולש XYZ: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$.

שאלה לדוגמה

נפח הקובייה שבסרטוט 64 סמ"ק. מה שטח המלבן XYZW?



(1) $12\sqrt{2}$

(2) $16\sqrt{2}$

(3) $12\sqrt{3}$

(4) $18\sqrt{3}$

פתרון:

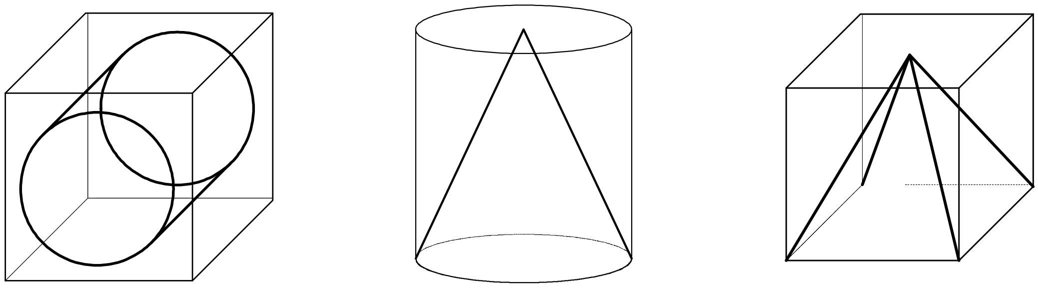
שטח מלבן הוא מכפלת צלעו הקצרה בצלעו הארוכה. צלעו הקצרה של המלבן היא למעשה מקצוע הקובייה, וצלעו הארוכה היא אלכסון פאת הקובייה. מקצוע הקובייה הוא שורש שלישי של נפחה, אשר לפי הנתון שווה ל- 64 סמ"ק, כלומר $\sqrt[3]{64} = 4$. אלכסון פאת הקובייה שווה לאורך מקצועה כפול $\sqrt{2}$, כלומר $4\sqrt{2}$ ס"מ. מכאן שטח המלבן XYZW הוא $4\sqrt{2} \cdot 4 = 16\sqrt{2}$.

התשובה הנכונה היא (2).

גופים בתוך גופים

סוג נוסף של שאלות עוסק בגופים תלת-ממדיים הנמצאים בתוך גופים תלת-ממדיים אחרים.

דוגמאות אפשריות לכך הן הגופים הבאים:



שאלות אפשריות לגבי גופים אלו יכולות להיות מציאת הפרשי הנפחים בין הצורות, יחס הנפחים, מציאת גדלים שונים בגוף אחד על-ידי נתונים מהגוף השני וכד׳.

ניקח כדוגמה את חישוב יחס הנפחים בין הקובייה לפירמידה החסומה בה:

כאשר פירמידה חסומה בקובייה, בסיסה שווה לפאת הקובייה וקדקודה נמצא על הפאה שממול.

נניח שמקצוע הקובייה שווה ל- x. נפח הקובייה שווה למקצועה בשלישית, כלומר ל- x^3. נפח פירמידה הוא שטח בסיסה כפול גובהה, חלקי 3. בסיס הפירמידה הוא למעשה פאת הקובייה. לכן שטחו הוא שטח הפאה. פאת הקובייה היא ריבוע שצלעו x, ולכן שטחה x^2. מכיוון שקדקוד הפירמידה ובסיסה נמצאים על פאות נגדיות, המרחק ביניהם, שהוא למעשה גובה הפירמידה, הוא המרחק בין הפאות הנגדיות, כלומר שווה למקצוע הקובייה. לכן, גובה הפירמידה שווה ל- x. נפח הפירמידה הוא $\frac{x^2 \cdot x}{3} = \frac{x^3}{3}$. היחס בין הקובייה לפירמידה הוא $x^3 : \frac{x^3}{3}$ ולאחר צמצום $3:1$.

ככלל, היחס בין קובייה לבין פירמידה מרובעת החסומה בה הוא 3:1.

באופן דומה ניתן לחשב שהיחס בין גליל לבין חרוט החסום בו שווה גם הוא ל- 3:1.

<u>שאלה לדוגמה</u>

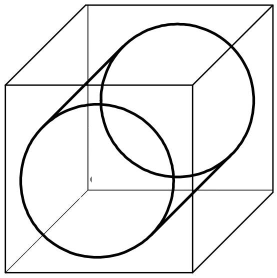
בתוך קובייה שאורך מקצועה 5 ס״מ נמצא גליל שרדיוסו 2 ס״מ, כך שבסיסיו נמצאים על פאות נגדיות של הקובייה, כמתואר בסרטוט. מה ההפרש בין נפחי הגופים (בסמ״ק)?

(1) $120-10\pi$

(2) $100-18\pi$

(3) $125-20\pi$

(4) $25-20\pi$



<u>פתרון</u>

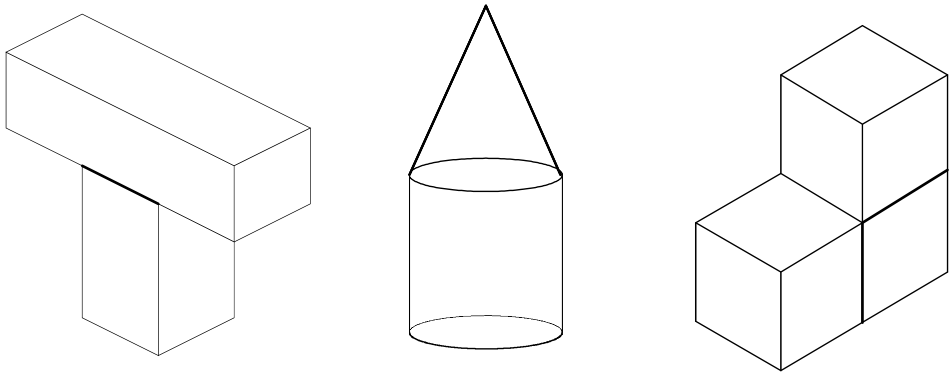
נפח קובייה הוא אורך מקצועה בשלישית, כלומר $125 = 5^3$. נפח גליל הוא מכפלת שטח בסיסו בגובהו ($\pi r^2 \cdot h$). מכיוון שבסיסי הגליל נמצאים על פאות נגדיות של הקובייה, המרחק ביניהם, שהוא למעשה גובה הגליל, שווה למקצוע הקובייה, כלומר ל- 5 ס״מ. רדיוס הגליל נתון ואורכו 2 ס״מ. מכאן נפח הגליל הוא $\pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$. הפרש הנפחים הוא $125-20\pi$.

התשובה הנכונה היא (3).

גופים תלת ממדיים שאינם מוגדרים

הסוג הבא של שאלות עוסק בגופים תלת-ממדיים שנוצרו על-ידי חיבור הגופים הבסיסיים בצורות שונות.

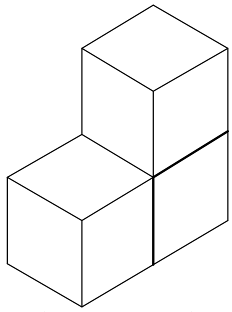
דוגמאות אפשריות לכך הן הגופים הבאים:



שאלות מסוג זה יכולות לעסוק בשטח הפנים של הגוף החדש, נפח הגוף ועוד.

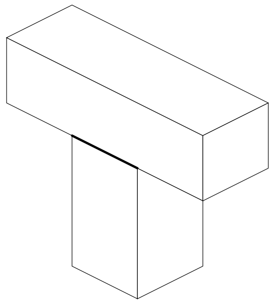
שאלות שטח פנים של צורה שנוצרה מחיבור שני גופים או יותר, ניתן לפתור בשתי דרכים.

דרך אחת היא פשוט לחשב מכל גוף בנפרד את השטחים שעדיין נמצאים בחלק החיצוני של הגוף החדש (פאות/שטחי מעטפת וכו') ולסכום אותם. למשל, הגוף הבא מורכב משלוש קוביות זהות:



בגוף החדש יש 14 פאות חיצוניות. אם נתון לנו שמקצוע כל קובייה 2 ס״מ, אזי שטח כל פאה הוא המקצוע בריבוע, כלומר 4 ס״מ, ושטח הפנים הכולל הוא 14 פעמים שטח זה: $56 = 14 \cdot 4$ סמ״ר.

הגוף הבא מורכב משתי תיבות שהוצמדו בדרך הבאה, וניאלץ להשתמש בדרך אחרת:



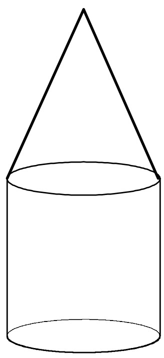
נסתכל על הגוף החדש. השטח שבו הוצמדו שתי התיבות הוא שטח שאינו נמצא יותר בחלק החיצוני של הגוף. כלומר, שטח הפנים של כל אחת מהתיבות לאחר הצמדתן הוא שטח הפנים המקורי של כל אחת מהן, פחות השטח החופף.

לכן, בשיטה זו, נחשב תחילה את סכום שטחי הפנים של שני הגופים לפני שחיברו ביניהם ליצירת הגוף החדש, וממספר זה נפחית פעמיים את השטח החופף בין שני הגופים, פעם אחת עבור כל גוף.

למשל, אם שטח הפנים של התיבה העליונה לפני יצירת הגוף החדש הוא 20 סמ"ר, שטח הפנים המקורי של התיבה השניה הוא 15 סמ"ר, והשטח החופף ביניהם לאחר חיבורן הוא 5 סמ"ר, שטח הפנים של הגוף החדש הוא: $20+15-2\cdot 5 = 25$ סמ"ר.

שאלה לדוגמה

חרוט הונח על גליל, כמתואר בסרטוט. שטח הפנים של החרוט 10 סמ"ר. שטח הפנים של הגליל 30 סמ"ר. בסיס החרוט זהה לבסיס הגליל, ורדיוסם שווה ל- 2 ס"מ. מה שטח הפנים של הגוף שנוצר (בסמ"ר)?



(1) $60-10\pi$

(2) $30-6\pi$

(3) $40-8\pi$

(4) $50-4\pi$

פתרון

שטח הגוף החדש הוא סכום שטחי הפנים של שני הגופים, פחות פעמיים השטח החופף ביניהם שהוא למעשה בסיס הגליל/החרוט. בסיס הגליל הוא מעגל שאורך רדיוסו 2 ס"מ, ומכאן שטח בסיס הגליל הוא $\pi\cdot 2^2 = 4\pi$. לאחר החסרתו פעמיים נקבל: $30+10-2\cdot 4\pi = 40-8\pi$.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>סיכום</u>

כאשר נתונה לנו שאלה בסגנון השאלות שראינו, תחילה עלינו לבנות את הנוסחה המבטאת את הגודל המבוקש (סכום שטחי הפנים פחות פעמיים השטח החופף, הפרש נפחים וכדומה). לאחר בניית הנוסחה, שלבי הפתרון זהים לשלבי בפתרון שתוארו בשיעור תלת-ממד הבסיסי. לאחר מציאת כל הגדלים הנחוצים לנוסחה שבנינו, נציבם ונמצא את התשובה.