



שיעור תלת-ממד בסיסי

מבוא

צורות תלת-מימדיות נקראות גופים.

הגופים עליהם נישאל בבחינה הם תיבה, קובייה, גליל, חרוט, מנסרה ישרה ופירמידה.

בכל פרק תופיע בדרך כלל כשאלה אחת בנושא זה.

השאלות בנושא תלת-מימד יכולות לכלול חישובי נפח, חישובי שטח פנים, חישובי שטחים של צורות דו-ממדיות בתוך הגוף, גוף בתוך גוף, חישובים של גדלים חד ממדיים בתוך גופים תלת ממדיים וכדומה.

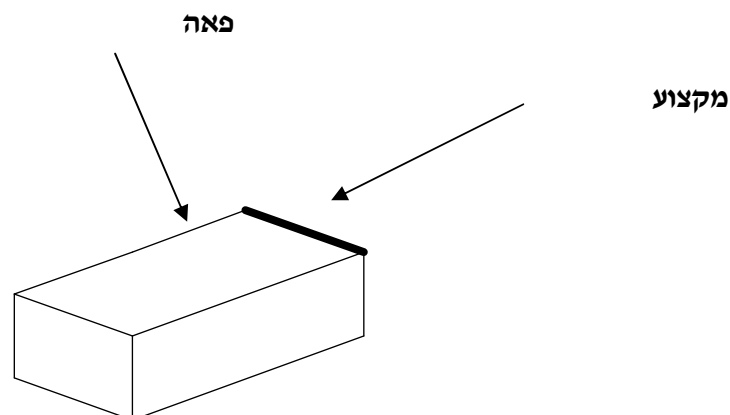
הגדרות

סמ"ק - בתלת ממד, יחידת המידה הנפוצה בבחינה היא סנטימטר מעוקב, או בקיצור סמ"ק. המשמעות: ס"מ לרוחב, לאורך ולעומק (או לגובה).

פאה – פאה היא הדופן של גוף.

מקצוע - מקצוע הוא הקו שנוצר במפגש בין שתי פאות.

שטח מעטפת, שטח פנים – גדלים דו ממדיים, הקיימים בצורות תלת ממדיות, ויוסברו בהמשך לגבי כל אחת מהצורות.





שאלה לדוגמה – מושג הנפח :

ברז מטפטף לתוך תיבה שנפחה 40 סמ"ק בקצב של טיפה לדקה.

נתון כי נפח כל טיפה 1 סמ"ק. כמה דקות יעברו עד שהתיבה תתמלא עד למחצית גובהה?

1. 40

2. 20

3. 15

4. 10

פתרון :

עד למחצית גובהה של התיבה נמצא חצי מנפחה, שהוא 20 סמ"ק. מכיוון שנפח כל טיפה הוא 1 סמ"ק, יש צורך ב- 20 טיפות שיטפטפו לתוך התיבה. מכיוון שלכל טיפה לוקח דקה לטפטף, ידרשו 20 דקות עד שחצי מהתיבה תתמלא.

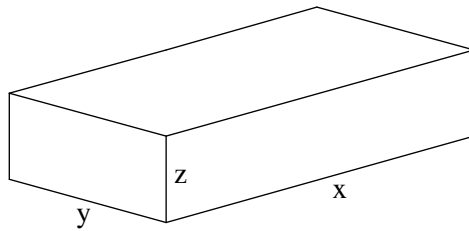
התשובה הנכונה היא (2).



תיבה

הגדרה: תיבה היא גוף תלת-מימדי המורכב משש פאות מלבניות, כאשר מול כל פאה נמצאת פאה זהה לה.

ממדי התיבה הם האורך (x), הרוחב (y) והגובה (z):



לצורך ההסברים הבאים התייחסו לנתונים הבאים: $x=6, y=4, z=2$.

נפח תיבה - נפח תיבה הוא מכפלת האורך, הרוחב והגובה שלה: $x \cdot y \cdot z$. למשל, עבור הנתונים שבדוגמא נפח התיבה יהיה $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ סמ"ק.

שטח פאה – שטח פאה הוא למעשה שטח מלבן, כלומר מכפלת האורך ברוחב.

שטח הפאה שאורכי צלעותיה הם x ו- z הוא $x \cdot z$, ובתיבה שבדוגמא: $6 \cdot 2 = 12$

שטח הפאה שאורכי צלעותיה הם y ו- z הוא $y \cdot z$, ובתיבה שבדוגמא: $4 \cdot 2 = 8$

שטח הפאה שאורכי צלעותיה הם x ו- y הוא $x \cdot y$, ובתיבה שבדוגמא: $6 \cdot 4 = 24$

שטח פנים – שטח פנים הוא השטח החיצוני הכולל של גוף תלת ממדי.

עבור תיבה, יהיה שטח הפנים סכום שטחי 6 הפאות של התיבה.

ככלל, עליכם לזכור כי מול כל פאה בתיבה יש פאה זהה ולכן שטח הפנים הוא סכום שטחי הפאות הכולל:

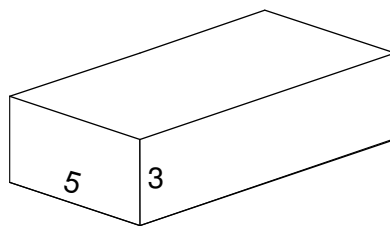
$$2 \cdot xy + 2 \cdot xz + 2 \cdot yz = 88, \text{ ובדוגמא שלפנינו: } 2 \cdot 24 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 88$$



זכרו: בהחלט ייתכן שבמבחן תידרשו לדעת גם את הדרך הפוכה, קרי יינתנו לכם נתונים אודות נפח התיבה או שטח הפנים שלה ואתם תידרשו למצוא את אורכי המקצועות, שטחי הפאות וכדומה ("ללכת אחורה").

שאלה לדוגמה:

נתונה תיבה שאורכי שניים ממקצועותיה הם 3 ס"מ ו-5 ס"מ.
כמו כן נתון כי נפח התיבה הוא 90 סמ"ק.
מהו שטח הפנים של התיבה (בסמ"ר)?



- 1. 63
- 2. 126
- 3. 84
- 4. 36

פתרון:

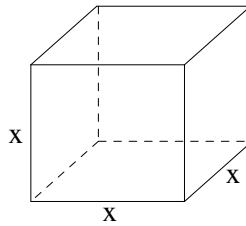
בשאלה זו נתונים לנו אורכי 2 מתוך 3 המקצועות של התיבה, וכן נתון לנו נפח התיבה.
אנו נשאלים מהו שטח הפנים של התיבה.
על מנת למצוא שטח פנים של תיבה, עלינו לדעת תחילה את אורכי 3 מקצועותיה.
מכיוון שנתון לנו הנפח, ונתונים לנו אורכי 2 מקצועות, נוכל למצוא את אורך המקצוע החסר (x):
נפח תיבה הוא מכפלת האורך, הרוחב והגובה. הנפח נתון: 90 סמ"ק, ולכן נוכל להציבו יחד עם נתוני המקצועות האחרים בנוסחת הנפח: $5 \cdot 3 \cdot x = 90$.
יש לפנינו משוואה עם נעלם אחד, נפשטה ונמצא כי $x = 6$.
כעת ידועים לנו אורכי כל המקצועות ונציבם בנוסחת שטח הפנים $(2 \cdot xy + 2 \cdot xz + 2 \cdot yz)$:
 $2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 = 126$.
התשובה הנכונה היא (2).



קובייה

הגדרה: קובייה היא תיבה שבה האורך, הרוחב והגובה שווים.

לכל פאות הקובייה שטח זהה.



לצורך ההסברים הבאים, הניחו כי $x=2$.

נפח – מכיוון שקובייה היא סוג של תיבה, נפחה שווה למכפלת האורך, הרוחב והגובה שלה, אך מכיוון

שבקובייה שלושת הערכים הללו זהים, נפח הקובייה הוא אורך מקצועה בשלישית: x^3 , ובקובייה

$$\text{שבדוגמא: } 2^3 = 8$$

שטח פאה – שטח פאה בקובייה הוא למעשה שטח ריבוע, שצלעו היא מקצוע הקובייה. מכיוון שכל המקצועות זהים, כל הפאות זהות גם הן ושטח כל אחת מהן הוא מקצוע הקובייה בריבוע: x^2 , ובקובייה

$$\text{שבדוגמא: } 2^2 = 4$$

שטח פנים – שטח פנים הוא השטח החיצוני הכולל של הגוף. עבור קובייה, יהיה שטח הפנים סכום שטחי 6 הפאות שלה.

שטח כל פאה הוא x^2 . מכאן שטח הפנים של הקובייה הוא $6x^2$, ובקובייה שבדוגמא: $6 \cdot 2^2 = 24$.



שאלה לדוגמה

נתונה קובייה ששטח הפנים שלה 96 סמ"ר. מהו נפח הקובייה (בסמ"ק)?

64 (1)

32 (2)

16 (3)

8 (4)

פתרון:

שטח פנים של קובייה שמקצועה x הוא $6x^2$. נציב את שטח הפנים הנתון על מנת למצוא את x :

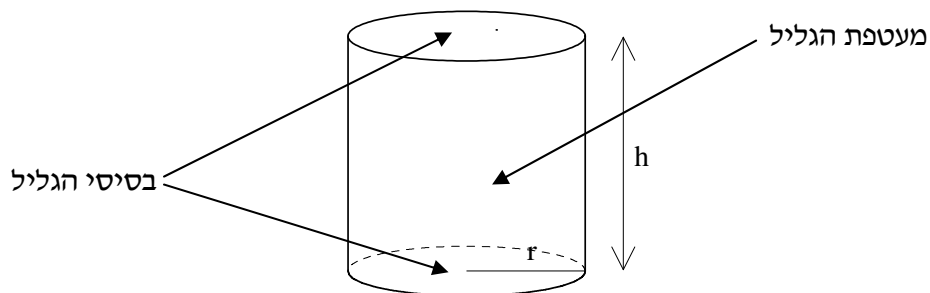
$6x^2 = 96$, מכאן $x^2 = 16$ ו- $x=4$. נפח קובייה הוא x^3 , ובשאלה שלפנינו $4^3 = 64$.

התשובה הנכונה היא (1).



גליל

הגדרה: גליל הוא גוף תלת-ממדי בעל שני בסיסים, שהם עיגולים חופפים המקבילים זה לזה. נהוג לסמן את רדיוס הבסיס באות r ואת גובה הגליל באות h .



לצורך ההסברים הבאים התייחסו לנתונים הבאים: $r = 2, h = 3$

שטח מעטפת – שטח מעטפת של גליל הוא השטח המקיף את הגליל, ללא הבסיסים, קרי העטיפה שלמעשה מגולגלת סביב הגליל.

שטח המעטפת של גליל שרדיוס בסיסו r וגובהו h הוא מכפלת היקף הבסיס בגובה הגליל: $2\pi r \cdot h$.

שטח פנים - שטח הפנים של גליל הוא השטח החיצוני הכולל שלו, כלומר סכום שטחי הבסיסים ושטח

המעטפת. שטח כל בסיס הוא למעשה שטח מעגל: $\pi \cdot r^2$, ומכיוון שקיימים שני בסיסים לגליל סכום

הבסיסים הוא $2\pi \cdot r^2$. שטח הפנים הוא $2\pi \cdot r(h + r) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$, ובגליל שבדוגמא:

$$2\pi \cdot 2(3 + 2) = 20\pi$$

נפח - נפח גליל הוא מכפלת שטח אחד הבסיסים בגובה הגליל: $\pi \cdot r^2 \cdot h$, ובגליל שבדוגמא:

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$$



שאלה לדוגמה

שטח הבסיס של גליל הוא 9π סמ"ר. נפח הגליל 54π סמ"ק. מהו שטח המעטפת של הגליל (בסמ"ר)?

(1) 42π

(2) 18π

(3) 72π

(4) 36π

פתרון:

שטח מעטפת של גליל הוא $2\pi \cdot r \cdot h$. על מנת לחשבו עלינו למצוא את רדיוס הגליל ואת גובהו. שטח בסיס הגליל ($\pi \cdot r^2$) נתון בשאלה - 9π סמ"ר, ומכאן שרדיוס הגליל הוא 3 ס"מ.

נפח הגליל ($\pi \cdot r^2 \cdot h$) נתון בשאלה - 54π סמ"ק.

נציב את הרדיוס שמצאנו ואת הנפח בנוסחת הנפח על מנת למצוא את הגובה:

$$\pi \cdot 3^2 \cdot h = 54\pi \quad \text{ומכאן } h = 6$$

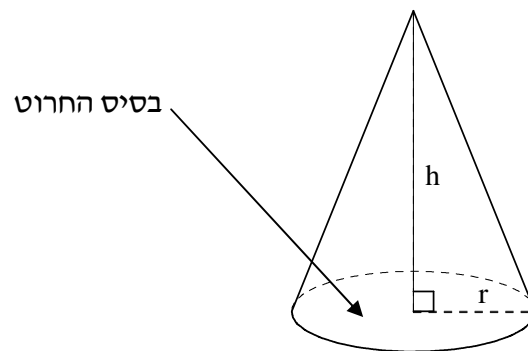
$$2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi \quad \text{כעת נציב בנוסחת שטח המעטפת:}$$

התשובה הנכונה היא (4).



חרוט

הגדרה: חרוט הוא גוף הנוצר מחיבור כל הנקודות על היקף מעגל עם נקודה אחת מחוץ למישור המעגל.
רדיוס הבסיס מסומן באות r וגובה החרוט מסומן באות h :



נפח - נפח חרוט שרדיוס בסיסו r וגובהו h הוא $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$. למשל, אם אורך הרדיוס 2 ס"מ והגובה הוא 3

ס"מ, נפח החרוט הוא $4\pi = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 3}{3}$ סמ"ק.

שאלה לדוגמה

היקף בסיסו של חרוט הוא 6π ס"מ. גובה החרוט שווה לקוטר בסיסו. מה נפח החרוט (בסמ"ק)?

(1) 18π

(2) 54π

(3) 36π

(4) 9π

פתרון

בסיס החרוט הוא מעגל ולכן היקף הבסיס הוא $2\pi \cdot r$. נציב את הערך הנתון על מנת למצוא את הרדיוס:
 $2\pi \cdot r = 6\pi$ ומכאן $r = 3$. גובה החרוט שווה לקוטר הבסיס, כלומר לפעמיים הרדיוס: $h = 6$. נפח



$$\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

החרוט הוא

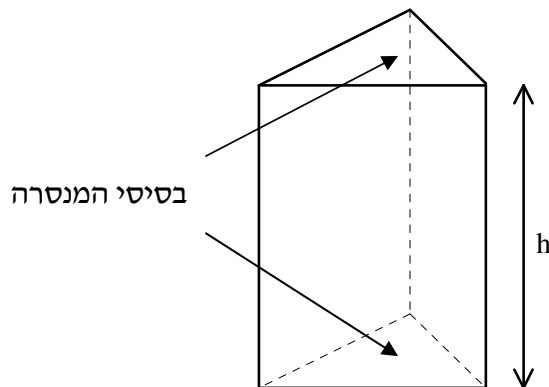
$$\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} = 18\pi$$

ומכאן התשובה הנכונה היא (1).

מנסרה ישרה

הגדרה: מנסרה ישרה היא גוף תלת-ממדי בעל שני בסיסים שהם מצולעים חופפים ומקבילים זה לזה, ופאותיו הצדדיות הן מלבנים.

שמה של כל מנסרה נקבע לפי מספר הצלעות של בסיסה. למשל, מנסרה שבבסיסה הם משולשים נקראת מנסרה משולשת.



לצורך ההסברים הבאים התייחסו לנתונים הבאים: שטח כל אחד מהבסיסים הוא 4 סמ"ר, היקף כל אחד מהבסיסים 10 ס"מ, גובה המנסרה 3 ס"מ.

גובה – גובה המנסרה הוא המרחק בין הבסיסים. הגובה מסומן באות h.

שטח המעטפת – שטח המעטפת של מנסרה הוא סכום שטחי הפאות הצדדיות. הוא שווה להיקף הבסיס כפול גובה המנסרה. למשל, עבור הנתונים שבדוגמא שטח המעטפת הוא $30 = 10 \cdot 3$ סמ"ר.

שטח פנים – שטח הפנים של מנסרה הוא סכום שטחי הבסיסים ושטח המעטפת. שטח הפנים של המנסרה שבדוגמא: $38 = 4 + 4 + 30$ סמ"ר.



ניב רווח פסיכומטרי 1-800-750-760
psychometry.co.il
כי מה שחשוב זה הציון.

מנסרה שווה

נפח – נפח

לשטח אחד הבסיסים כפול גובה המנסרה. נפח המנסרה שבדוגמא: $12 = 4 \cdot 3$ סמ"ק.



שאלה לדוגמה

שטח הפנים של מנסרה משולשת הוא 10 סמ"ר. שטח המעטפת של המנסרה הוא 6 סמ"ר. גובה המנסרה 3 ס"מ. מה נפח המנסרה (בסמ"ק)?

4 (1)

12 (2)

6 (3)

16 (4)

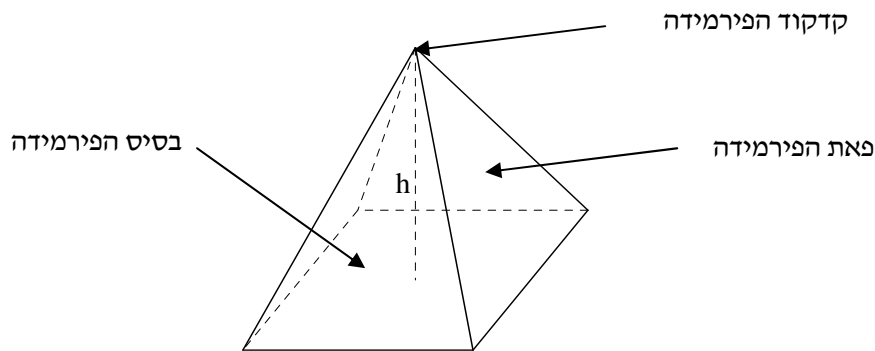
פתרון

נפח מנסרה הוא מכפלת שטח אחד הבסיסים בגובה המנסרה. גובה המנסרה נתון לנו ואורכו 3 ס"מ. נותר לנו למצוא את שטח אחד הבסיסים. ההפרש בין שטח פנים לשטח מעטפת, הוא שטחם של שני הבסיסים (שטח מעטפת אינו כולל בסיסים, שטח פנים כן כולל). שטח הפנים ושטח המעטפת נתונים לנו ולכן נוכל למצוא את סכום שטחי הבסיסים: $10 - 6 = 4$. שני הבסיסים זהים, לכן שטח כל אחד מהם הוא מחצית מסכום השטחים שלהם, כלומר 2 סמ"ר. נציב בנוסחת נפח המנסרה: $2 \cdot 3 = 6$.
התשובה הנכונה היא (3).



פירמידה

הגדרה: פירמידה היא הגוף שנוצר מחיבור קדקודי מצולע עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור המצולע. נקודה זו נקראת קדקוד הפירמידה, והמצולע נקרא בסיס הפירמידה. בפירמידה, הפאות הצדדיות הן משולשים. שמה של כל פירמידה נקבע לפי מספר הצלעות בבסיסה. למשל, פירמידה שבבסיסה הוא ריבוע נקראת פירמידה מרובעת.



גובה – גובה הפירמידה הוא אורך הקטע המחבר בין קדקוד הפירמידה לבין בסיסה, ומאונך למישור הבסיס שלה. הגובה בסרטוט מסומן באות h .

$$\frac{\text{שטח הבסיס} \times h}{3}$$

נפח – נפח הפירמידה הוא מכפלת שטח בסיסה בגובהה, חלקי 3:

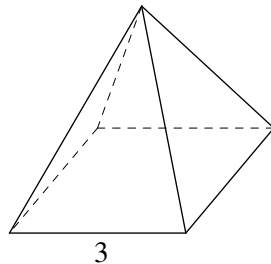
למשל, אם בפירמידה שטח הבסיס הוא 5 סמ"ר, וגובהה 6 סמ"ר, נפח הפירמידה הוא:

$$10 \text{ סמ"ק} = \frac{5 \cdot 6}{3}$$



שאלה לדוגמה

בסיסה של הפירמידה שבסרטוט הוא ריבוע שאורך צלעו 3 ס"מ. גובהה שווה להיקף בסיסה. מה נפח הפירמידה (בסמ"ק)?



18 (1)

36 (2)

12 (3)

108 (4)

פתרון

נפח פירמידה הוא מכפלת שטח בסיסה בגובהה, חלקי 3. בסיס הפירמידה הוא ריבוע, ולכן שטחו הוא צלעו בריבוע: $3^2 = 9$. גובה הפירמידה שווה להיקף הבסיס, ומכיוון שהבסיס הוא ריבוע, ההיקף הוא

$$4 \cdot 3 = 12. \text{ מכאן נפח הפירמידה הוא: } \frac{9 \cdot 12}{3} = 36$$

התשובה הנכונה היא (2).

סיכום

על מנת לפתור את שאלות התלת-ממד בבחינה עלינו להבין היטב את המושגים הבסיסיים אותם למדנו בשיעור זה: נפח, שטח פנים, ושטח מעטפת כאשר הוא קיים (זכרו ששטח מעטפת קיים רק בגליל ובמנסרה).

לאחר שקראתם שאלה כתבו את הנוסחה הרלוונטית לפיה תוכלו למצוא את הגודל המבוקש. בדקו האם נתונים בגוף השאלה חלק מהגדלים הנדרשים בנוסחה. לאחר מכן בדקו מהם הגדלים החסרים והשתמשו בנתונים שבשאלה ובנוסחאות נוספות הידועות לכם על-מנת למצוא אותם (למשל, אם יש לנו צורך ברדיוס על-מנת לחשב נפח גליל, והרדיוס אינו נתון לנו, אבל נתון לנו היקף הגליל, נוכל למצוא את הרדיוס על-ידי הצבת היקף הגליל בנוסחת היקף. לדוגמה: אם ההיקף הוא 12π , נציב: $2\pi r = 12\pi$ ומכאן $r = 6$). לאחר שמצאתם את כל הגדלים הנחוצים על-מנת לחשב את הגודל שעליו נשאלתם, הציבו אותם בנוסחה הרלוונטית ומצאו את התשובה.

לאחר שהבנו את המושגים הבסיסיים, נוכל להתקדם ולפתור שאלות מורכבות יותר, עליהן יוסבר בשיעור תלת-ממד מתקדם.