גיאומטריה

מצולעים

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

מצולעים

בשיעור הקרוב נעסוק במצולעים בצורה מתקדמת יותר, ולכן אם אינכם זוכרים את התכונות הבסיסיות של המצולעים בבחינה (גודל זווית פנימית, סכום זוויות פנימיות וכדומה), חזרו ליסודות לפני המעבר על השיעור הזה.

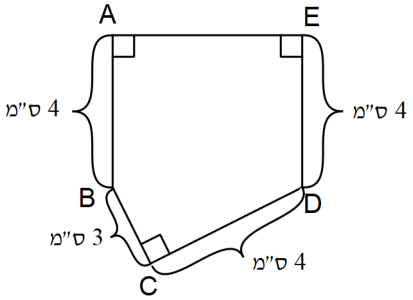
חשוב לציין כי שאלות מצולעים, בהשוואה למשולשים, למרובעים ולמעגלים, נדירות יותר בבחינה, ולרוב הן יכללו את המצולעים ה"רגילים" שעליהם עברנו ביסודות - מחומש, משושה ומתומן.

פירוק והרכבת מצולעים

בחלק הקרוב של השיעור נעסוק באופן שבו צורות אחרות שאנו מכירים באות לידי ביטוי במצולעים, ובאיזה אופן ניתן להיעזר בכך.

<u>לדוגמה:</u>

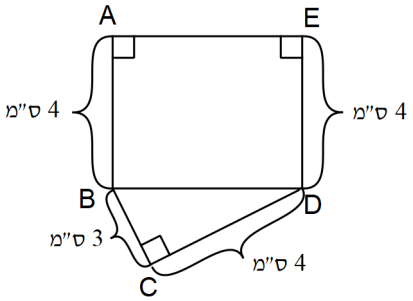
בסרטוט שלפניכם מחומש ABCDE.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

מה ההיקף (בס"מ) ומה השטח של המחומש (בסמ"ר)?

תחילה, נחבר בין הנקודה B לנקודה D כדי ליצור משולש ומלבן (BCD ו-ABDE), צורות אשר מוכרות לנו ושאת שטחן ואת היקפן אנו יודעים למצוא בקלות יחסית.



היקף:

המשולש BCD הוא משולש ישר זווית בעל ניצבים שאורכם 3 ס"מ ו-4 ס"מ. אם כן, אורך היתר שלו הוא 5 ס"מ (לפי השלשה הפיתגורית 3, 4 ו-5). למרובע ABDE זוג צלעות מקבילות ושוות (AB ו-DE), וזאת נוסף על זוויות ישרות.

לפיכך, מדובר במלבן.

במלבן, הצלעות הנגדיות שווה זו לזו ולכן: $AE = BD = 5$ ס"מ.

לאור האמור לעיל, היקף המחומש הוא (בס"מ): $AB + BC + CD + DE + AE = 4 + 3 + 4 + 4 + 5 = 20$.

שטח:

שטח המחומש ABCDE שווה לסכום שטחי הצורות שמרכיבות אותו: המשולש BCD והמלבן ABDE.

נבצע כפל בין ניצבי המשולש BCD, ונחלק את התוצאה ב-2 כדי למצוא את שטחו (בסמ"ר): $\frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

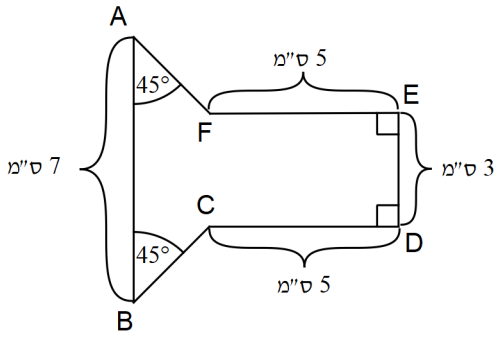
נבצע כפל בין שתי צלעות המלבן ABDE, כדי למצוא את שטחו (בסמ"ר): $AB \cdot BD = 4 \cdot 5 = 20$.

לאור האמור לעיל, שטח המחומש הוא (בסמ"ר): $6 + 20 = 26$.

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

<u>דוגמה נוספת:</u>

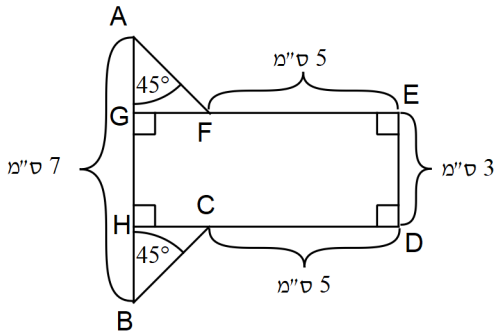
נתון משושה ABCDEF ונתון כי $AB \parallel ED$.



לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,

מה ההיקף (בס"מ) ומה השטח של המשושה (בסמ"ר)?

תחילה, נאריך את הצלעות EF ו-DC לנקודות G ו-H בהתאמה כדי ליצור מלבן (GHDE) ושני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים זהים (AGF ו-HBC. ניתן לחפוף את המשולשים לפי משפט זווית, צלע, זווית: $45°$, $GF = HC$, $90°$).



שטח:

שטח המשושה ABCDEF שווה לסכום שטחי הצורות שמרכיבות אותו: המלבן GHDE והמשולשים AGF ו-HBC.

מאחר ש-GHDE מלבן, הצלע GH שווה לצלע ED (3 ס"מ).

לפיכך, $AG = HB = 2$ ס"מ ($\frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$). כמו כן: $AG = GF = HB = HC = 2$ ס"מ.

שטח המלבן GHDE (בסמ"ר): $GH \cdot GE = 3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 7 = 21$.

שטח כל אחד מהמשולשים AGF ו-HBC (בסמ"ר): $\frac{AG \cdot GF}{2} = \frac{HC \cdot HB}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2}} = 2$.

לאור האמור לעיל, שטח המשושה ABCDEF הוא (בסמ"ר): $21 + 2 + 2 = 25$.

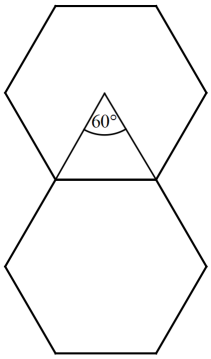
היקף:

בכל אחד מהמשולשים AGF ו-HBC היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצב: $AF = BC = 2\sqrt{2}$.

לפיכך, היקף המשושה הוא (בס"מ): $AF + FE + ED + DC + CB + BA = 2\sqrt{2} + 5 + 3 + 5 + 2\sqrt{2} + 7 = 20 + 4\sqrt{2}$.

בשתי הדוגמאות שלעיל הראינו כיצד ניתן להשתמש בתכונות של צורות שאנו מכירים (משולשים ומרובעים למשל), כדי לחשב את שטחם ואת היקפם של מצולעים אחרים.

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.



דוגמה נוספת:

בסרטוט שלפניכם שני משושים משוכללים זהים שהוצמדו.
היקף הצורה שנוצרה הוא 90 ס"מ.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש (בסמ"ר)?

הצורה שנוצרה מורכבת מ-10 צלעות (שימו לב כי ניתן היה לספור את הצלעות באופן "ידני" או לחסר 2 צלעות - אלו שהוצמדו - מ-12 הצלעות של שני המשושים: $6+6=12$).

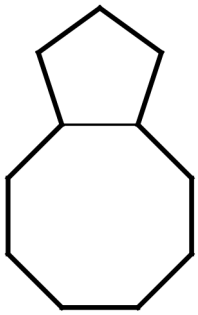
היות שהצורה מורכבת מ-10 צלעות והיות שהיקפה הוא 90 ס"מ, ניתן לקבוע כי אורך כל צלע הוא (בס"מ): $\frac{90}{10}=9$.

למשולש בסרטוט זווית ראש בת $60°$ וזוויות בסיס אשר משלימות זווית של $120°$ (זווית פנימית במשושה משוכלל) ל- $180°$.
לפיכך, שלוש זוויותיו של המשולש שוות ל- $60°$, ולכן מדובר במשולש שווה צלעות שאורך צלעו 9 ס"מ.

לאור האמור לעיל, שטח המשולש הוא (בסמ"ר): $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9^2\sqrt{3}}{4}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$.

שאלה לדוגמה - פירוק והרכבת מצולעים

בסרטוט שלפניכם צורה המורכבת ממחומש משוכלל וממתומן משוכלל בעלי צלע משותפת.
היקף הצורה כולה (הקו המודגש) הוא 77 ס"מ.



מה היקף המתומן המשוכלל (בס"מ)?

(1) 56
(2) 42
(3) 38
(4) 45

פתרון

משום שלמחומש ולמתומן צלע משותפת ומשום שהצורות משוכללות (כל הצלעות במצולע שוות זו לזו), כל צלעותיהם שוות.
היקף הצורה בסרטוט מורכב מ-4 צלעות של המחומש ומ-7 צלעות של המתומן, ולכן הוא מורכב מ-11 צלעות שוות ($4+7$).
כדי למצוא את אורכה של כל צלע (בס"מ), נחלק את היקף הצורה (77) במספר צלעותיה (11): $\frac{77}{11}=7$.

לפיכך, היקף המתומן המשוכלל הוא (בס"מ): $7\cdot 8=56$.

התשובה הנכונה היא (1).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

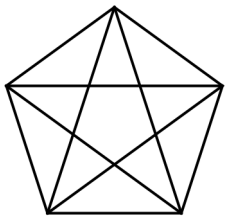
אלכסונים במצולע

בחלק הקרוב של השיעור נראה אילו תכונות מקיימים האלכסונים במחומש משוכלל, במשושה משוכלל ובמתומן משוכלל.

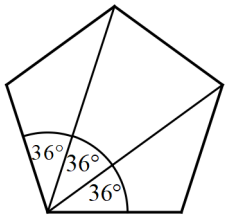
תזכורת לגבי מספר אלכסונים במצולע:
אלכסון הוא קו שמחבר בין שתי נקודות **שאינן** סמוכות זו לזו במצולע. בכל מצולע מספר הקדקודים זהה למספר הצלעות.
לפיכך, מספר האלכסונים שניתן ליצור במצולע הוא מכפלה של מספר הקדקודים (n) במספר הקדקודים פחות הקדקוד עצמו ופחות שני הקדקודים הסמוכים לו ($n-1-2=n-3$) חלקי 2 (עלינו לחלק את התוצאה ב-2 משום שבחישוב המתואר לעיל אנו סופרים כל אחד מהאלכסונים פעמיים).
אם כן, מספר האלכסונים בכל מצולע הוא: $\frac{n(n-3)}{2}$.

<u>מחומש משוכלל</u>

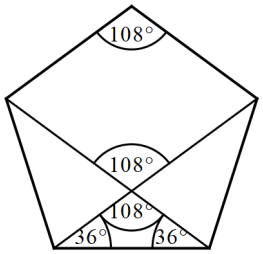
כל האלכסונים במחומש משוכלל ($\frac{n(n-3)}{2}=\frac{5(5-3)}{2}=\frac{5\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}=5$) שווים זה לזה.



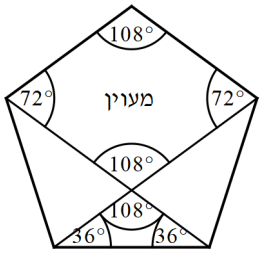
כאשר אנו מוציאים מקדקוד מסוים במצולע משוכלל את כלל האלכסונים האפשריים, אנו למעשה מחלקים את הזווית של אותו קדקוד לזוויות שוות (זווית פנימית במחומש משוכלל שווה ל- $108°$: $\frac{108°}{3}=36°$).



שני אלכסונים במחומש משוכלל עשויים ליצור משולש שווה שוקיים שזוויות הבסיס שלו שוות ל- $36°$ ומכאן שזווית הראש שלו שווה ל- $180°-36°-36°=108°$ (גודל הזווית הפנימית במחומש). הזווית הקדקודית לזווית בת ה- $108°$ שווה לה.



שתי הזוויות הנגדיות במרובע שנוצר שוות ל- $72°$ (הזוויות הללו מורכבות מ-2 זוויות בנות $36°$).
נוסף על כך, במרובע זה שתי צלעות סמוכות אשר שוות זו לזו (צלעות המחומש), ולכן ניתן לקבוע כי מדובר במעוין.

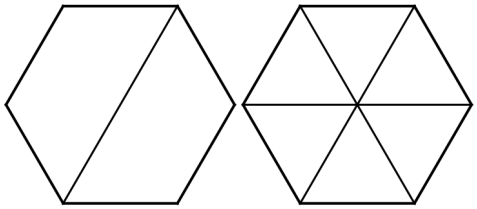


© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

<u>משושה משוכלל</u>

במשושה משוכלל ישנם 9 אלכסונים ($\frac{6\cdot(6-3)}{2}=\frac{6\cdot 3}{2}=\frac{18}{2}=9$) מ-2 סוגים: 3 אלכסונים גדולים ו-6 אלכסונים קטנים.

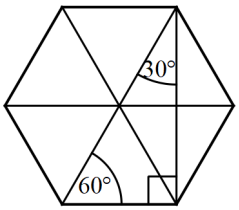
שלושת האלכסונים הגדולים במשושה מחלקים אותו ל-6 משולשים שווי צלעות, וכל אחד מהם בנפרד מחלק אותו ל-2 טרפזים שווי שוקיים:



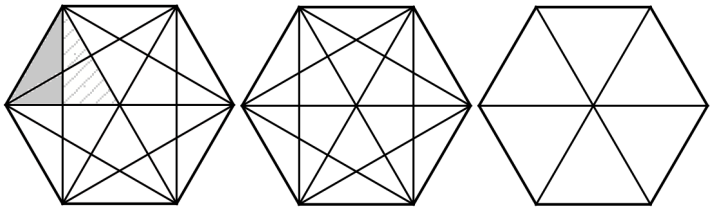
כל אחד מהאלכסונים הגדולים מורכב מ-2 צלעות של משולש, ולכן ערך כל אחד מהם הוא **פעמיים צלע המשושה**.

אם כן, **אורך האלכסון הגדול במשולש משוכלל שצלעו a הוא 2a**.

כל אחד מהאלכסונים הקטנים במשושה גדול פי $\sqrt{3}$ מצלע המשושה (a), שכן הוא הניצב הגדול במשולש 30; 60; 90.



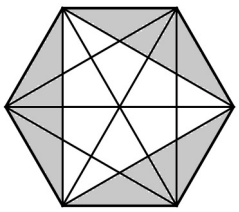
כעת, נעביר את כל תשעת האלכסונים במשושה (שימו לב כי האלכסונים הקטנים מחלקים את המשולשים שווי הצלעות ל-2 חלקים שווים: למשל, המשולש הכהה והמשולש המקווקו):



באמצעות שליטה בתכונות המתקיימות בהעברת האלכסונים אנו יכולים לחסוך זמן יקר.

<u>לדוגמה:</u>

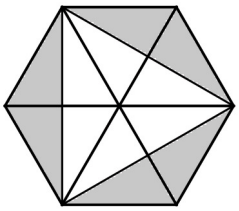
בסרטוט הנתון משושה משוכלל. לפי נתון זה: $\frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח הלבן}}=?$



כאמור, כל אחד מהאלכסונים הקטנים מחלק משולש שווה צלעות במשושה ל-2 חלקים שווים (שטח לבן ושטח אפור).

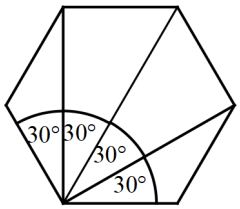
לפיכך: $\frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח הלבן}}=1$.

על הסרטוט הנ"ל ניתן להסתכל גם כך:



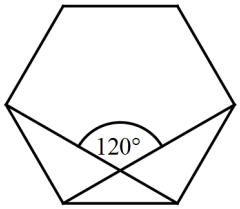
© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

כפי שמתקיים במחומש משוכלל, כאשר אנו מוציאים מקדקוד מסוים במשושה משוכלל את כלל האלכסונים האפשריים, אנו למעשה מחלקים את הזווית של אותו קדקוד לזוויות שוות (זווית פנימית במשושה משוכלל שווה ל- $120°$: $\frac{120°}{4}=30°$).



כמו כן, שני אלכסונים סמוכים במשושה משוכלל יכולים ליצור משולש שווה שוקיים שזוויות הבסיס שלו שוות ל- $30°$ ומכאן שזווית הראש שלו שווה ל- $180°-30°-30°=120°$ (גודל הזווית הפנימית במשושה משוכלל).

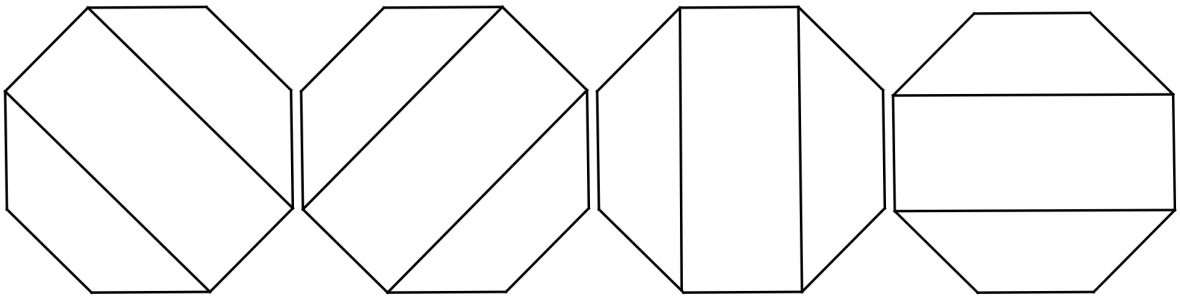
הזווית הקדקודית לזווית בת ה- $120°$ שווה לה (זו שמסומנת בסרטוט).



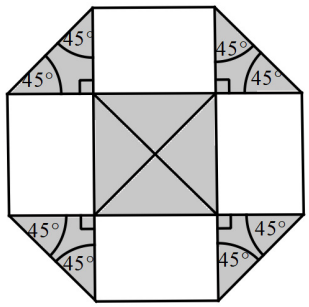
<u>מתומן משוכלל</u>

במתומן משוכלל ישנם 20 אלכסונים ($\frac{8\cdot(8-3)}{2}=\frac{8\cdot 5}{2}=\frac{40}{2}=20$).

זוגות האלכסונים שיוצרים $90°$ עם אחת מצלעות המתומן מחלקים אותו לשני טרפזים שווי שוקיים ולמלבן (סכום שטחם של שני הטרפזים שווה לשטח המלבן, וכפועל יוצא מכך - סכום שטחם של שני הטרפזים שווה למחצית שטח המתומן וכך גם באשר למלבן).

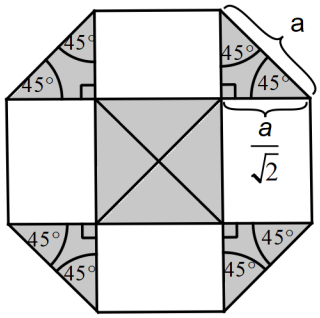


שני זוגות האלכסונים מחלקים את המתומן ל-4 משולשים שווי שוקיים וישרי זווית, 4 מלבנים וריבוע ששטחו שווה לסכום שטחם של ארבעת המשולשים.



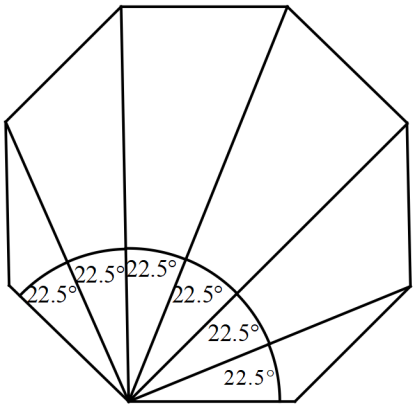
מכיוון שהמשולשים הללו ישרי זווית ושווי שוקיים, ניתן למצוא את גודל הניצב בהם על ידי חלוקת צלע המתומן (היתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים) ב- $\sqrt{2}$. אם כן, במתומן שאורך צלעו a, אורך כל אחד מהניצבים במשולשים הוא $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

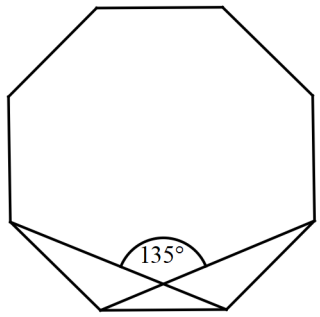


באמצעות הנתון הזה אנו יכולים לחשב את שטחה של כל אחת מהצורות המרכיבות את המתומן וכך את שטחו (ארבעת המשולשים שאת אורך הניצב שלהם אנו יודעים, הריבוע שאורך צלעו כאורך צלע המתומן וארבעת המלבנים שבהם צלע אחת שאורכה a וצלע שנייה שאורכה $\frac{a}{\sqrt{2}}$).

בדומה למחומש משוכלל ולמשושה משוכלל, כאשר אנו מוציאים מקדקוד מסוים במתומן משוכלל את כלל האלכסונים האפשריים, אנו למעשה מחלקים את הזווית של אותו קדקוד לזוויות שוות (זווית פנימית במתומן משוכלל שווה ל- $135°$:
$\frac{135°}{6} = 22.5°$).



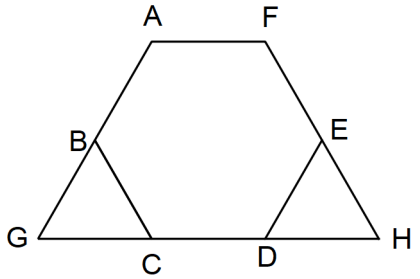
נוסף על כך, שני אלכסונים סמוכים במתומן יכולים ליצור משולש שווה שוקיים שזוויות הבסיס שלו שוות ל- $22.5°$ ומכאן שזווית הראש שלו שווה ל- $180° - 22.5° - 22.5° = 135°$ (גודל הזווית הפנימית במתומן).
הזווית הקדקודית לזווית בת ה- $135°$ שווה לה (זו שמסומנת בסרטוט).



© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה לדוגמה - אלכסונים במצולע

בסרטוט שלפניכם ABCDEF הוא משושה משוכלל.
G ו-H הן נקודות המפגש של המשכי צלעות המשושה.
שטח הטרפז AGHF הוא x סמ"ר.



מה שטח המשושה ABCDEF (בסמ"ר)?

(1) $\frac{5}{6}x$

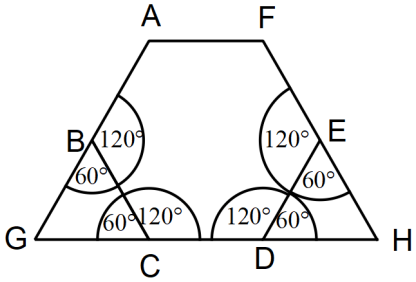
(2) $\frac{2}{3}x$

(3) $\frac{3}{4}x$

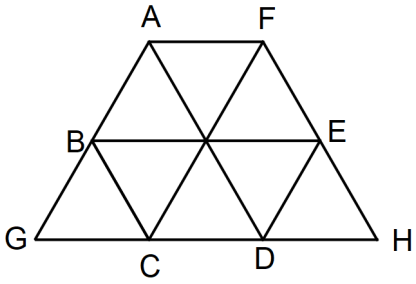
(4) $\frac{4}{5}x$

<u>פתרון</u>

הזוויות הפנימיות במשושה משוכלל הן בנות $120°$. לפיכך, הזוויות שצמודות להן שוות ל- $60°$.



מכיוון שסכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$, הזווית השלישית במשולשים EDH ו-BGC שווה ל- $60°$ גם כן.
אם כן, המשולשים EDH ו-BGC הם משולשים שווי צלעות. היות שלשניהם צלע משותפת עם המשושה, ניתן לקבוע כי המשולשים הללו זהים לששת המשולשים שמרכיבים את המשושה.



אי לכך, הטרפז AGHF מורכב מ-8 משולשים זהים, ולכן שטח כל אחד מהם הוא (בסמ"ר): $\frac{x}{8}$.

המשושה מורכב מ-6 משולשים, ולכן שטחו הוא (בסמ"ר): $6\cdot\frac{x}{8}=\frac{6x}{8}=\frac{3x}{4}$.

שימו לב! ניתן היה להציב מספר נוח במקום x, למצוא את שטח המשושה לפי אותה הצבה ולפסול 3 תשובות.

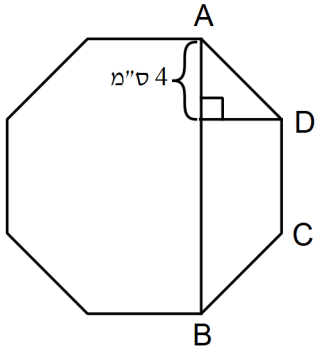
התשובה הנכונה היא (3).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה נוספת - אלכסונים במצולע

בסרטוט שלפניכם מתומן משוכלל.

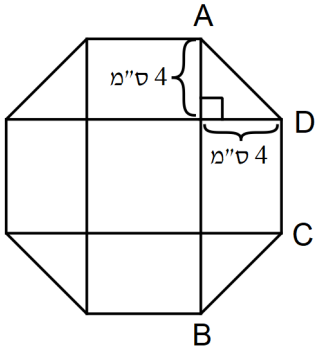
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הטרפז ABCD (בסמ"ר)?



(1) $8+4\sqrt{2}$
(2) $8+16\sqrt{2}$
(3) $16+16\sqrt{2}$
(4) $16+4\sqrt{2}$

<u>פתרון</u>

כפי שלמדנו, האלכסונים האופקיים והאנכיים מחלקים את המתומן ל-4 משולשים שווי שוקיים וישרי זווית, 4 מלבנים וריבוע.

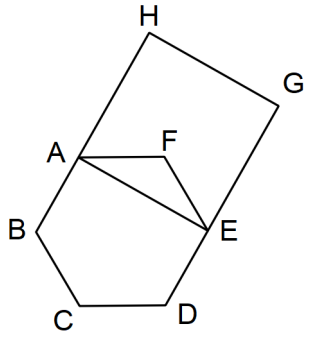


יתר כל אחד מהמשולשים (צלע המתומן) גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב: $4\sqrt{2}$. לפיכך, אורך צלע המתומן הוא $4\sqrt{2}$ ס"מ.
הטרפז שאת שטחו אנו מחפשים מורכב מ-2 משולשים שווי שוקיים וישרי זווית וממלבן.
שטח כל אחד מהמשולשים הוא (בסמ"ר): $\frac{4\cdot 4}{2}=\frac{16}{2}=8$. שטח המלבן הוא (בסמ"ר): $4\cdot 4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$.
לאור האמור לעיל, שטח הטרפז ABCD הוא (בסמ"ר): $8+8+16\sqrt{2}=16+16\sqrt{2}$.
התשובה הנכונה היא (3).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה נוספת - אלכסונים במצולע

בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל ABCDEF ששטחו $24\sqrt{3}$ סמ"ר.



על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הריבוע AEGH (בסמ"ר)?

(1) 64
(2) 24
(3) 36
(4) 48

פתרון

משושה משוכלל מורכב מ-6 משולשים שווי צלעות, ולכן אם נחלק את השטח הנתון ($24\sqrt{3}$) ב-6 נקבל את השטח של כל משולש: $\frac{24\sqrt{3}}{6}=4\sqrt{3}$. נשווה את שטח אחד המשולשים לנוסחה לחישוב שטח משולש שווה צלעות, כדי למצוא את אורך הצלע בו: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב- $\sqrt{3}$, נכפול אותם ב-4 ונקבל: $a^2=16$.

נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $a=4$ (נתעלם מהערך השלילי מכיוון שאורך לא יכול להיות שלילי).

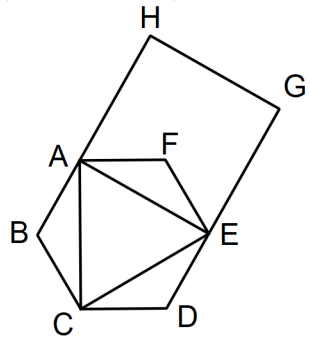
אם כן, אורך כל אחת מצלעות המשושה הוא 4 ס"מ.

כפי שלמדנו בשיעור, האלכסון הקטן במשושה גדול פי $\sqrt{3}$ מהצלע, ולכן אורכו של AE הוא $4\sqrt{3}$ ס"מ.

AE היא צלע בריבוע AEGH ובאמצעותה ניתן לחשב את שטחו: $AE^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2=4^2\cdot\sqrt{3}^2=16\cdot 3=48$.

דרך פתרון נוספת:

נחבר את הנקודות A ו-E לנקודה C.



כפי שלמדנו בשיעור, משולש שמורכב מ-3 אלכסונים קטנים (AE, EC ו-AC) בתוך משושה (ACE) שווה למחצית משטחו, ולכן שטחו של ACE שווה ל- $\frac{24\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$. ACE הוא משולש שווה צלעות, ולכן ניתן להשוות את שטחו לנוסחה למציאת שטח של משולש שווה צלעות ($\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$) כדי למצוא את אורך צלעו: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}$.

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-4, נחלק אותם ב- $\sqrt{3}$ ונקבל: $a^2=12\cdot 4=48$.

למעשה, הביטוי a^2 מייצג את מכפלת צלע הריבוע (AE) בעצמה, ומכפלה זו שווה לשטח הריבוע AEGH.

לאור האמור לעיל, שטח הריבוע AEGH הוא 48 סמ"ר.

התשובה הנכונה היא (4).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

סוגי זוויות במצולעים

בחלק הקרוב של השיעור נעסוק בזוויות שבמצולעים ובתכונות שניתן להסיק מהן.

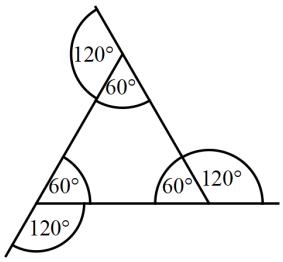
תזכורת קצרה לגבי גודלה של הזווית הפנימית בכל אחד מהמצולעים המשוכללים בבחינה:
במשולש - $60°$; בריבוע - $90°$; במחומש - $108°$; במשושה - $120°$; במתומן - $135°$.

<u>זוויות חיצונית למצולעים</u>

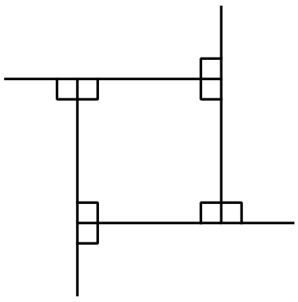
לכל אחת מהזוויות הפנימיות של כל אחד מהמצולעים שהוזכרו לעיל ישנן 2 זוויות חיצוניות (משלימות את הזוויות הפנימיות ל- $180°$) אשר שוות זו לזו (בסרטוט נציג את אחת מהזוויות בלבד).

בכל המצולעים מתקיים: **מכפלת אחת מהזוויות החיצוניות במספר הצלעות במצולע שווה ל-** $360°$.

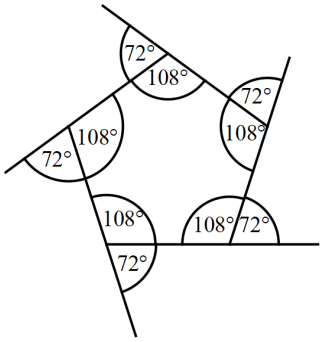
במשולש: $3\cdot 120° = 360°$.



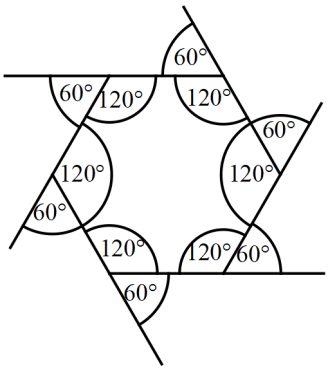
במרובע: $4\cdot 90° = 360°$.



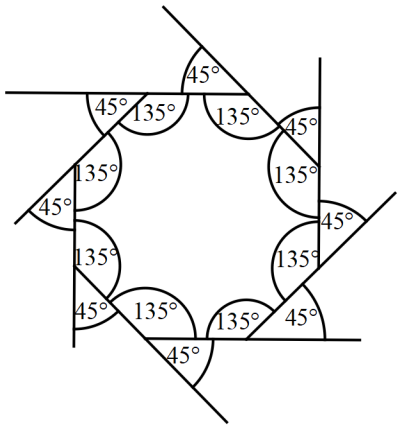
במחומש: $5\cdot 72° = 360°$.



במשושה: $6\cdot 60° = 360°$.



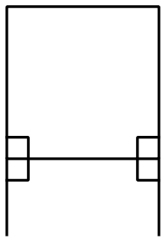
במתומן: $8\cdot 45° = 360°$.



© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

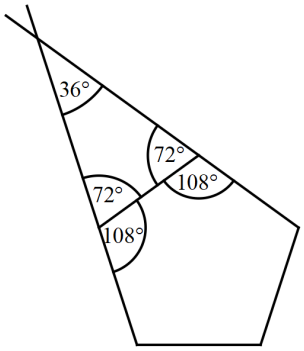
<u>משולשים שנוצרים מהמשך צלעות של מצולע</u>

צלעותיו של ריבוע מקבילות זו לזו, ולכן לא משנה באיזו מידה נמשיך אותן - הן לא ייפגשו לעולם (קווים מקבילים לעולם לא נפגשים):

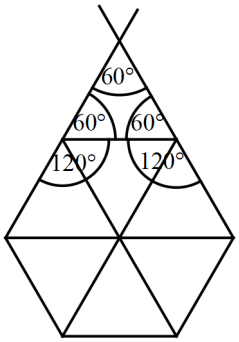


לעומת ריבוע, בכל מצולע שמספר הצלעות שלו גדול מ-4 שבו נמשיך את הצלעות, הן ייפגשו בנקודה כלשהי ויצרו משולש.

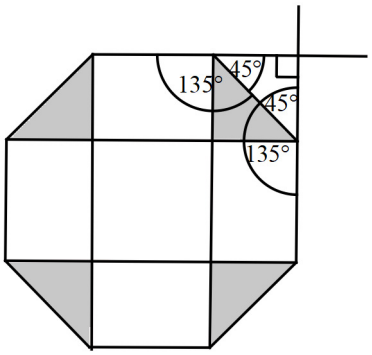
במחומש, אם נמשיך שתיים מצלעותיו יתקבל משולש שווה שוקיים (זוויות הבסיס של המשולש ישלימו ל- $180°$ את הזוויות הפנימיות במחומש. משולש שזוויות הבסיס שלו שוות הוא משולש שווה שוקיים):



במשושה, אם נמשיך שתיים מצלעותיו יתקבל משולש שווה צלעות אשר זהה לכל אחד מ-6 המשולשים המרכיבים אותו:



במתומן, אם נמשיך שתיים מצלעותיו יתקבל משולש ישר זווית ושווה שוקיים (45; 45; 90) אשר זהה לארבעת המשולשים שנמצאים בתוכו (אלו שמסומנים באפור):



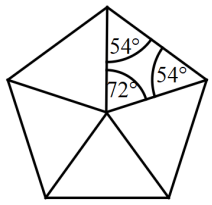
© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

חלוקת המצולעים למשולשים

חיבור המרכז של מצולע משוכלל, שהוא גם מרכז המעגל החסום והחוסם (על כך בהרחבה בשיעור מעגלים), לכל אחד מהקדקודים שלו יחלק את אותו מצולע למספר משולשים שווי שוקיים זהים.

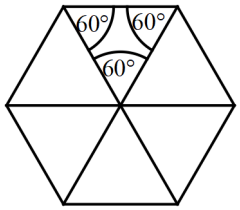
מכיוון שסכום הזוויות סביב נקודה הוא $360°$, זווית הראש בכל אחד מהמשולשים תהיה שווה ל- $360°$ חלקי מספר המשולשים.

במחומש: $\frac{360°}{5}=72°$. מכיוון שהמשולשים שווי שוקיים, גודל כל אחת מזוויות הבסיס הוא: $\frac{180°-72°}{2}=\frac{108°}{2}=54°$.

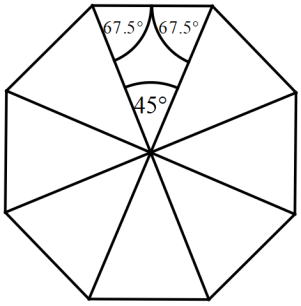


אותו הסבר כמובן מתקיים במשושה ובמתומן, אך גודל הזוויות בהם שונה.

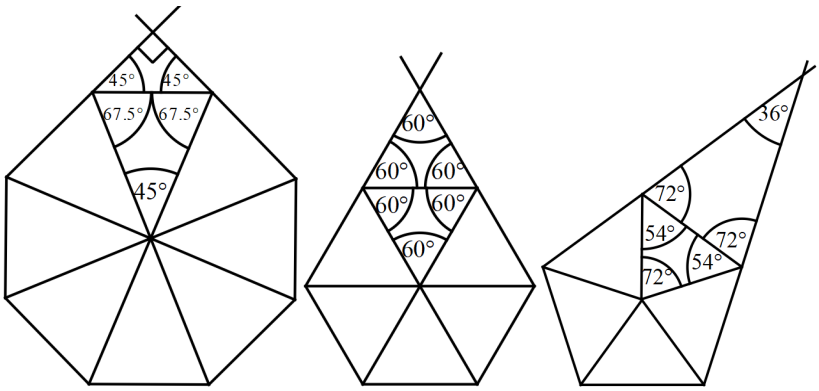
במשושה:



במתומן:



כאמור, כאשר אנו ממשיכים שתיים מהצלעות הסמוכות של מחומש משוכלל, משושה משוכלל ומתומן משוכלל מתקבל משולש. במשושה, המשולש המתקבל זהה לכל אחד מ-6 המשולשים המרכיבים אותו, ואילו במחומש ובמתומן מתקבלים משולשים **שאינם** זהים לכל אחד מהמשולשים המרכיבים אותם:



לפיכך, במחומש ובמתומן נוצר דלתון (שני משולשים שווי שוקיים שאינם זהים זה לזה שהוצמדו בבסיסם), ובמשושה נוצר מעוין (שני משולשים שווי שוקיים זהים שהוצמדו בבסיסם).

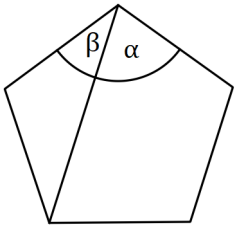
© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה לדוגמה - סוגי זוויות במצולעים

בסרטוט שלפניכם מחומש משוכלל.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$\frac{\beta}{\alpha} = ?$



(1) $\frac{1}{2}$

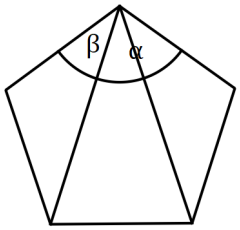
(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{4}$

<u>פתרון</u>

כזכור, אם מוציאים מקדקוד מסוים במצולע משוכלל את כל האלכסונים האפשריים, הזווית שממנו הם יוצאים מתחלקת לחלקים שווים (במקרה הזה שלושה חלקים זהים).



הזווית α היא 2 חלקים מתוך 3 חלקים שווים, והזווית β היא חלק מתוך 3 חלקים שווים.

לפיכך: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{חלק אחד}}{\text{שני חלקים}} = \frac{1}{2}$.

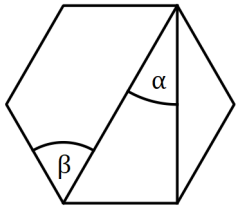
התשובה הנכונה היא (1).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה נוספת - סוגי זוויות במצולעים

בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל.

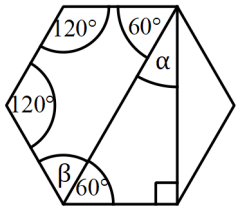
לפני נתון זה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha+\beta=?$



(1) $180°$
(2) $160°$
(3) $120°$
(4) $90°$

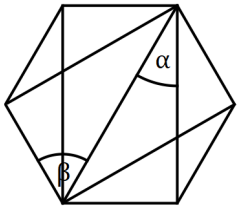
פתרון

האלכסון הגדול במשושה מחלק אותו לשני טרפזים שווי שוקיים זהים, שבהם זוויות הבסיס שוות ל- $60°$ וזוויות הראש ל- $120°$. אם כן, הזווית β שווה ל- $60°$. האלכסון הגדול והאלכסון הקטן במשושה יוצרים משולש 30; 60; 90 ולכן: $\alpha=30°$. לפיכך: $\alpha+\beta=30°+60°=90°$.



דרך פתרון נוספת:

אם מוציאים מקדקוד מסוים במצולע משוכלל את כל האלכסונים האפשריים, הזווית שממנו הם יוצאים מתחלקת לחלקים שווים.



הזווית α היא חלק אחד מתוך 4 חלקים שווים ($\frac{120°}{4}=30°$), והזווית β היא 2 חלקים מתוך 4 חלקים שווים ($2\cdot 30°=60°$). לפיכך: $\alpha+\beta=30°+60°=90°$.

התשובה הנכונה היא (4).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

דמיון מצולעים

עד כה ראינו כי צורות לא מוכרחות להיות משוכללות כדי שיתקיים ביניהן דמיון.
ראינו משולשים דומים שאינם שווי צלעות ומרובעים שדומים זה לזה שאינם ריבועים (מלבנים, מעוינים וכן הלאה).

הסיכוי שנצטרך לעסוק בדמיון בין מצולעים (מחומש, משושה ומתומן) שאינם משוכללים הוא אפסי, ולכן נעסוק בחלק הקרוב של השיעור בדמיון בין מחומשים, משושים ומתומנים משוכללים בלבד.

שימו לב! כל הצורות המשוכללות מאותה משפחה דומות זו לזו:
כל המחומשים המשוכללים דומים זה לזה, כל המשושים המשוכללים דומים זה לזה אף הם וכך גם באשר למתומנים.

מה שלמדנו עד כה לגבי יחס קווי ויחס בין שטחים תקף גם לגבי מצולעים:
יחס השטחים בין מצולעים דומים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע.

<u>לדוגמה:</u>
אם אנו יודעים כי צלע של מחומש משוכלל א' גדולה פי 2 מצלעו של מחומש משוכלל ב', ניתן להסיק כי שטח המחומש א' גדול פי 4 משטח המחומש ב' ($(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$).

שימו לב כי היחס, כמובן, תקף גם הפוך - אם אנו יודעים ששטח משושה משוכלל א' גדול פי 4 משטח משושה משוכלל ב', ניתן להסיק כי היחס הקווי ביניהם הוא: $\sqrt{1}:\sqrt{4} \Rightarrow 1:2$.

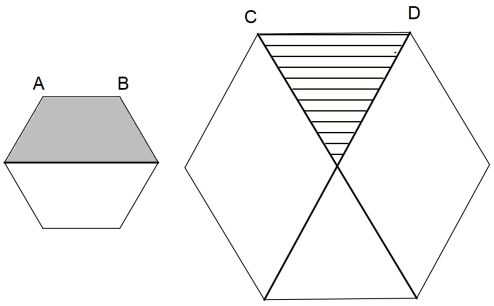
אגב יחס קווי - ראוי להזכיר כי יחס קווי יכול להיות היחס בין הצלעות, בין ההיקפים ובין האלכסונים (שימו לב כי האלכסונים צריכים להיות אותם אלכסונים. לדוגמה: אלכסון קטן במשושה לעומת אלכסון קטן במשושה אחר).

שאלה לדוגמה - דמיון מצולעים

בסרטוט שלפניכם שני משושים משוכללים. נתון: $CD = 3 \cdot AB$

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$$? = \frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח המקווקו}}$$



(1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

<u>פתרון</u>
כאמור, כל הצורות המשוכללות מאותה משפחה דומות זו לזו, ולכן המשושים בסרטוט המצורף דומים זה לזה.
נתון לנו שהצלע במשושה הימני גדולה פי 3 מהצלע בזה השמאלי. אם כן, היחס הקווי בין הצורות הוא: $3:1$.
כזכור, יחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע, ולכן שטח המשושה הימני גדול משטח השמאלי פי 9 ($(3:1)^2 \Rightarrow 9:1$).
מכיוון שמשושה משוכלל מורכב מ-6 משולשים זהים, נסמן את שטחו של המשושה הקטן ב-6x, ומכאן ששטח כל משולש שמרכיב אותו הוא x ($\frac{6x}{6} = x$). השטח האפור מורכב מ-3 משולשים זהים, ולכן שטחו הוא 3x. כאמור, שטח המשושה הימני גדול פי 9 משטח השמאלי, ולכן שטחו הוא 54x ($6x \cdot 9$). השטח המקווקו הוא משולש אחד מתוך 6 משולשים זהים,
ולכן שטחו הוא: $\frac{54x}{6} = 9x$. לאור האמור לעיל: $\frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח המקווקו}} = \frac{3x}{9x} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
שימו לב! ניתן היה להציב מספר (עבור השטח או אחת הצלעות), למצוא את היחס בין השטחים בהתאם ולפסול 3 תשובות.
התשובה הנכונה היא (3).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

יעילות המצולע

בשיעורים הקודמים של גיאומטריה נגענו, על קצה המזלג, ביעילות של מצולעים. הראינו שעבור היקף נתון וזהה, שטח של ריבוע משוכלל גדול משטח של משולש שווה צלעות. בחלק הקרוב של השיעור נעמיק בכך מעט יותר.

האמור לעיל תקף עבור כל המצולעים:

עבור היקף נתון וזהה, שטחה של צורה יהיה גדול יותר ככל שהיא תהיה משוכללת יותר, כלומר ככל שהיא תהיה קרובה בצורתה למעגל.

עבור אותו **היקף**:

שטח מעגל > שטח מתומן משוכלל > שטח משושה משוכלל > שטח מחומש משוכלל > שטח ריבוע > שטח משולש שווה צלעות

<u>לדוגמה:</u>

נתונים משולש שווה צלעות וריבוע שהיקפם 12 סמ"ר.

שטחה של איזו צורה מבין השתיים גדול יותר?

משולש שווה צלעות: מאחר שכל צלעותיו שוות, אורך כל אחת מהצלעות הוא (בס"מ): $\frac{12}{3}=4$.

שטחו (בסמ"ר): $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{4^{\cancel{2}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}}=4\sqrt{3}$. היות ש- $\sqrt{3}\approx1.7$, שטח המשולש גדול מעט מ-6 אך קטן מ-8.

ריבוע: מאחר שכל צלעותיו שוות, אורך כל אחת מהצלעות הוא (בס"מ): $\frac{12}{4}=3$.

שטחו (בסמ"ר): $3\cdot3=9$.

נזכיר כי האמור לעיל תקף גם בין צורות מאותה משפחה: עבור היקף נתון וזהה, משולש שווה צלעות יהיה גדול מכל משולש אחר וכך גם לגבי מרובעים - שטח של ריבוע יהיה גדול משטח של כל מרובע אחר בעל אותו היקף.

כל האמור לעיל תקף גם הפוך - עבור אותו **שטח**:

היקף משולש שווה צלעות > היקף ריבוע > היקף מחומש משוכלל > היקף משושה משוכלל > היקף מתומן משוכלל > היקף מעגל

שאלה לדוגמה - יעילות המצולע

נתונים מחומש משוכלל ומשושה משוכלל השווים בשטחם.

צלע המחומש _____ מצלע המשושה, והיקף המחומש _____ מהיקף המשושה.

(1) ארוכה ; גדול
(2) קצרה ; קטן
(3) ארוכה ; קטן
(4) קצרה ; גדול

<u>**פתרון**</u>

למדנו בשיעור כי כאשר נתונות לנו צורות משוכללות השוות בשטחן, ניתן להסיק כי לצורה המשוכללת פחות, כלומר זו שקרובה פחות בצורתה למעגל (המחומש) יהיה היקף גדול יותר. מכאן שלמחומש הנתון היקף גדול מההיקף של המשושה הנתון.

ניתן לפסול את התשובות (2) ו-(3) כבר בשלב הזה. לו היה למשושה ולמחומש היקף זהה (לצורך הדוגמה, נניח שההיקף היה 30 ס"מ), אורך הצלע במחומש היה $\frac{30}{5}=6$ ואורך הצלע במשושה היה $\frac{30}{6}=5$, כלומר עבור היקף זהה - אורך צלע המחומש היה גדול מאורך צלע המשושה. מצאנו כי היקפו של המחומש גדול יותר, ולכן אורך צלעו בוודאי גדול יותר מאורך צלע המשושה.

התשובה הנכונה היא (1).

© **כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.**

שאלה נוספת - יעילות המצולע

נתונים 3 מעוינים שאורך צלעם זהה: מעוין בעל זווית של $30°$, מעוין בעל זווית של $45°$ ומעוין בעל זווית של $60°$.

מה מהבאים נכון בהכרח?

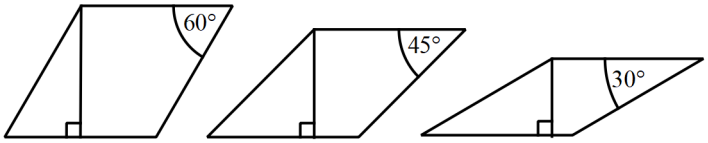
(1) שטחו של המעוין בעל הזווית $30°$ גדול משטח שני המעוינים האחרים
(2) שטחו של המעוין בעל הזווית $45°$ גדול משטח שני המעוינים האחרים
(3) שטחו של המעוין בעל הזווית $60°$ גדול משטח שני המעוינים האחרים
(4) שטחם של שלושת המעוינים זהה

פתרון

במעוין, ארבע הצלעות שוות זו לזו. נתון כי הצלעות של המעוינים הנתונים זהות, ולכן ניתן לקבוע כי היקפם זהה.
כפי שלמדנו בשיעור, כשלצורות מאותה משפחה (מרובעים למשל) היקף זהה, שטח הצורה יהיה גדול יותר ככל שהצורה תהיה משוכללת יותר. מבין המעוינים הנתונים, זה בעל הזווית $60°$ הוא הקרוב ביותר לריבוע (המרובע המשוכלל).
לפיכך, שטחו הוא הגדול ביותר מבין שלושתם.

דרך פתרון נוספת:

מעוין הוא סוג של מקבילית, ולכן ניתן לחשב את שטחו על ידי הכפלת אחת מצלעותיו בגובה לאותה צלע.
נתון כי הצלעות של המעוינים זהות, ולכן למעוין שגובהו יהיה הגדול ביותר, יהיה גם את השטח הגדול ביותר.
הגובה הגדול ביותר יהיה במעוין בעל הזווית הגדולה ביותר (ראו סרטוט מצורף):



התשובה הנכונה היא (3).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

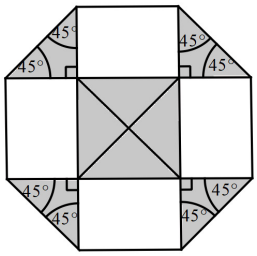
סיכום

1. **פירוק והרכבת מצולעים:**

לעתים, נוכל לעשות שימוש בתכונות ובנוסחאות של מצולעים מסוימים (משולשים ומרובעים למשל) כדי למצוא נתונים על אודות מצולעים אחרים (מחומשים, משושים ומתומנים).

2. **אלכסונים במצולע:**

- ניתן למצוא את מספר האלכסונים במצולעים לפי הנוסחה $\frac{n(n-3)}{2}$, כאשר n הוא מספר הצלעות.
- במצולע משוכלל, כלל האלכסונים שיוצאים מקדקוד מסוים מחלקים את הזווית שלו לחלקים שווים.
  בריבוע: 2 זוויות בנות $45°$; **במחומש**: 3 זוויות בנות $36°$; **במשושה**: 4 זוויות בנות $30°$;
  במתומן: 6 זוויות בנות $22.5°$.
- במשושה משוכלל שאורך צלעו a, אורך האלכסון הגדול הוא 2a ואורך האלכסון הקטן הוא $a\sqrt{3}$.
- האלכסונים האופקיים והאנכיים במתומן מחלקים אותו ל-4 משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים, ריבוע ששטחו שווה לשטח ארבעת המשולשים ו-4 מלבנים.



3. **סוגי זוויות:**

- מכפלת הזווית החיצונית למצולע במספר צלעותיו שווה ל- $360°$.
  לדוגמה: הזווית החיצונית למשושה שווה ל- $60°$ ובמשושה 6 צלעות: $60° \cdot 6 = 360°$.
- **במחומש**, אם נמשיך שתיים מצלעותיו יתקבל משולש שווה שוקיים שזווית הראש שלו שווה ל- $36°$ וזוויות הבסיס ל- $72°$. משולש זה שונה מכל חמשת המשולשים המרכיבים את המחומש (משולשים שווי שוקיים בעלי זווית ראש בת $72°$ וזוויות בסיס בנות $54°$).
- **במשושה**, אם נמשיך שתיים מצלעותיו יתקבל משולש שווה צלעות אשר זהה לכל אחד מששת המשולשים המרכיבים את המשושה.
- **במתומן**, אם נמשיך שתיים מצלעותיו, יתקבל משולש ישר זוויות ושווה שוקיים (45; 45; 90) הזהה לכל אחד מארבעת המשולשים הנוצרים במתומן בחלוקתו ל-4 משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים, ריבוע ששטחו שווה לשטח ארבעת המשולשים ו-4 מלבנים.

4. **דמיון מצולעים:**

- כל הצורות המשוכללות דומות זו לזו: כל המשולשים שווי הצלעות דומים זה לזה, כל הריבועים דומים זה לזה וכך גם באשר למחומשים המשוכללים, למשושים המשוכללים ולמתומנים המשוכללים.
- כפי שמתקיים במשולשים ובמרובעים, יחס השטחים בין מצולעים דומים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע.

5. **יעילות המצולע:**

- עבור **היקף** זהה:

שטח מעגל > שטח מתומן משוכלל > שטח משושה משוכלל > שטח מחומש משוכלל > שטח ריבוע > שטח משולש שווה צלעות

- עבור **שטח** זהה:

היקף משולש שווה צלעות > היקף ריבוע > היקף מחומש משוכלל > היקף משושה משוכלל > היקף מתומן משוכלל > היקף מעגל

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.