גיאומטריה

משולשים

משולשים

לפני שניכנס בעובי הקורה, נזכיר כי השיעור הזה הוא שיעור משולשים מתקדם.
אם אינכם שולטים בבסיס של משולשים, אנו ממליצים לעשות חזרה על נושא זה ביסודות.

שטח משולש

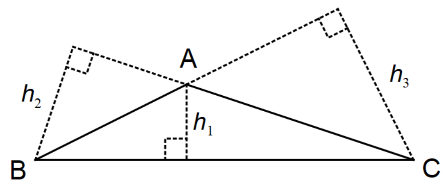
בכל משולש שהוא ניתן למצוא את השטח על ידי כפל הבסיס בגובה לאותו בסיס וחלוקת התוצאה ב-2.

$$\text{שטח משולש} = \frac{\text{אורך הבסיס} \cdot \text{אורך הגובה לאותו בסיס}}{2}$$

ישנם משולשים "מיוחדים" שאת שטחם ניתן לחשב בצורה מעט שונה (משולש שווה צלעות למשל), אולם המקור של החישוב הזה הוא הנוסחה ה"רגילה". לפיכך, את שטחם של המשולשים ה"מיוחדים" ניתן לחשב גם באמצעות הנוסחה שמופיעה לעיל.

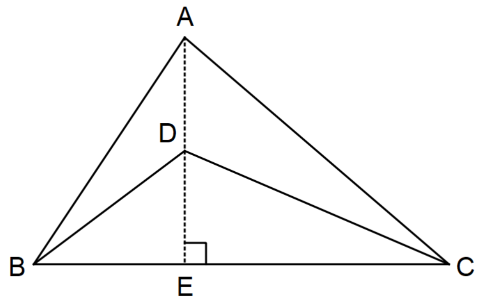
שימו לב כי **אורך הבסיס** בנוסחה יכול להיות כל צלע במשולש, כלומר ניתן למצוא את השטח על ידי כפל של כל אחת מהצלעות בגובה שמתאים לה וחלוקת התוצאה ב-2.

<u>לדוגמה:</u>
נתון משולש ABC ובו מסומן הגובה לכל צלע (באות h).



שטח המשולש ABC $= \frac{AB \cdot h_3}{2} = \frac{AC \cdot h_2}{2} = \frac{BC \cdot h_1}{2}$.

<u>דוגמה נוספת – יחס שטחים בין משולשים בעלי ממד זהה:</u>



כפי שלמדנו, שטח המשולש ABC הוא: $\frac{BC \cdot AE}{2}$.

לו היה נתון כי הנקודה D נמצאת בדיוק באמצע הצלע AE, ניתן היה לקבוע כי שטח המשולש DBC שווה למחצית משטח המשולש ABC.

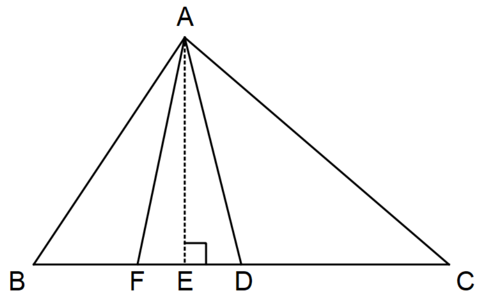
זאת, משום שבסיס המשולשים זהה (BC) והגובה לבסיס במשולש ABC גדול פי 2 מהגובה לבסיס במשולש DBC.

כלומר, שניים מהרכיבים שבנוסחה – הבסיס והחלוקה ב-2 – זהים, והרכיב היחיד שמשתנה הוא הגובה (גדל\קטן פי 2).

באותו אופן, אם היה נתון ש-DE שווה ל-$\frac{2}{3}$ מ-AE, ניתן היה לקבוע כי שטח המשולש DBC שווה ל-$\frac{2}{3}$ משטח המשולש ABC.

מכאן שכאשר יש שינוי מסוים באחד הממדים בלבד – אורך הגובה או אורך הבסיס – השטח משתנה בהתאם.

דוגמה נוספת:



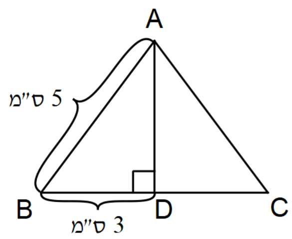
לו היה נתון כי הנקודה D נמצאת על אמצע הצלע BC, ניתן היה לקבוע כי שטח המשולש ADC שווה למחצית משטח המשולש ABC, שהרי הגובה שלהם זהה (AE), ובסיסו של המשולש ADC (DC) שווה למחצית מבסיסו של המשולש ABC (BC).

נוסף על כך, אם היה נתון ש-BF היה שווה ל- $\frac{1}{4}$ מ-BC, ניתן היה לקבוע ששטחו של המשולש ABF קטן פי 4 משטחו של המשולש ABC וקטן פי 2 משטחו של המשולש ADC.

שאלה לדוגמה - שטח משולש

בסרטוט שלפניכם AD הוא תיכון במשולש ABC.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש ABC (בסמ"ר)?



(1) 7
(2) 12
(3) 18
(4) 36

פתרון

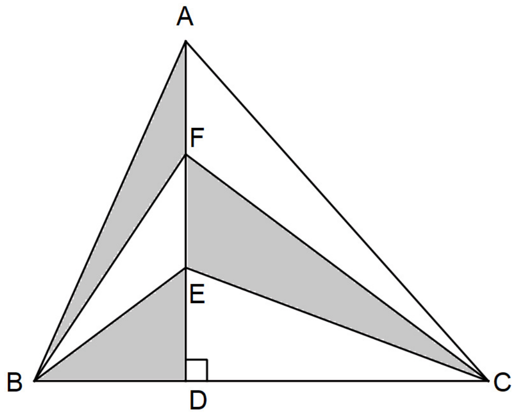
כדי לחשב שטח של משולש, עלינו למצוא את בסיסו ואת גובהו.
נתון כי AD תיכון ל-BC ועל כן: $BD = DC = 3$ ס"מ ומכאן ש-6 ס"מ $= BC$.
לפי הסרטוט, AD מאונך ל-BC, ולכן המשולש ADB ישר זווית.
אם כן, ניתן למצוא את AD באמצעות משפט פיתגורס: $BD^2 + AD^2 = AB^2 \Rightarrow 3^2 + AD^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + AD^2 = 25$.
נעביר אגפים: $AD^2 = 16$. נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $AD = 4$ (שימו לב כי התייחסנו לשורש החיובי בלבד, שהרי אורך של צלע לא יכול להיות שלילי).
לאור האמור לעיל, שטחו של המשולש ABC הוא (בסמ"ר): $\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$.
שימו לב! זכירת השלשה הפיתגורית (3, 4, 5) בעל-פה הייתה מקצרת מעט את זמן הפתרון.
התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - שטח משולש

נתון: שטח המשולש ABC הוא 18 סמ"ר.

$AF = FE = ED$

$DC = 2 \cdot BD$



מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?

(1) 12
(2) 9
(3) 8
(4) 6

__פתרון__

מכיוון שלמשולשים ABD ו-ADC אותו הגובה (AD), ניתן למצוא את יחס השטחים ביניהם לפי היחס בין הבסיסים שלהם.

נתון כי DC גדול פי 2 מ-BD, ולכן שטח המשולש ADC גדול פי 2 משטח המשולש ABD.

נסמן את שטח המשולש ABD ב-x, ומכאן ששטח המשולש ADC שווה ל-2x.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא 18 סמ"ר ולכן: $x + 2x = 18 \Rightarrow 3x = 18$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x = 6$.

אם כן, שטח המשולש ABD הוא 6 סמ"ר ושטח המשולש ADC הוא 12 סמ"ר.

למשולשים ABF, FBE ו-EBD שטח זהה, שהרי נתון כי הבסיסים שלהם שווים ($AF = FE = ED$) והגובה שלהם הוא אותו גובה (BD). על כן, שטח כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$ משטח המשולש ABD (בסמ"ר): $\frac{6}{3} = 2$.

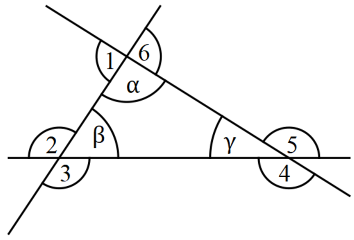
גם למשולשים ACF, FCE ו-ECD שטח זהה, ולכן שטח כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$ משטח המשולש ADC (בסמ"ר): $\frac{12}{3} = 4$.

השטח הכהה כולל שני משולשים קטנים (EBD ו-ABF) ששטח כל אחד מהם 2 סמ"ר, ומשולש אחד גדול יותר FCE ששטחו 4 סמ"ר, ולכן סכום השטחים הכהים הוא (בסמ"ר): $2 + 2 + 4 = 8$.

התשובה הנכונה היא (3).

זווית חיצונית למשולש

לכל משולש ישנן 3 זוויות פנימיות (לדוגמה: α, β ו- γ) ו-6 זוויות חיצוניות (מסומנות במספרים 1 עד 6).

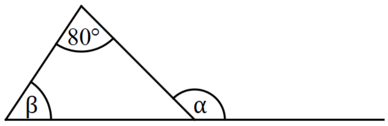


כל אחת מהזוויות החיצוניות שווה לסכום 2 הזוויות **שאינן** צמודות לה: $1=\beta+\gamma$, $3=\gamma+\alpha$, $5=\alpha+\beta$ וכך הלאה.

שימו לב! כשאתם מזהים שבשאלה ישנה זווית חיצונית למשולש, מצאו את שתי הזוויות שאינן צמודות לה ובנו משוואה.

<u>לדוגמה:</u>

נתון: $\alpha<120°$



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

הזווית β יכולה להיות -

הזווית α חיצונית למשולש בשאלה, ועל כן היא שווה לסכום שתי הזוויות שאינן צמודות לה: $80°+\beta=\alpha$.

מהנתון לפיו $\alpha<120°$ ניתן להסיק כי $80°+\beta<120°$. נחסר $80°$ משני אגפי אי-השוויון ונקבל: $\beta<40°$.

ניתן היה להסביר את האמור לעיל גם כך:

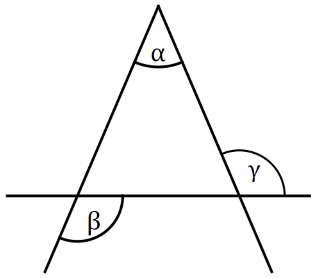
לו הייתה הזווית α שווה ל- $120°$, ניתן היה לקבוע כי: $80°+\beta=\alpha \Rightarrow 80°+\beta=120° \Rightarrow \beta=40°$.

ואולם, נתון כי $\alpha<120°$, ולכן על הזווית β להיות קטנה מ- $40°$.

באותו אופן, לו היה נתון כי $120°<\alpha$, ניתן היה לקבוע כי $40°<\beta$.

שאלה לדוגמה - זווית חיצונית למשולש

על פי נתוני הסרטוט,



$\alpha = ?$

(1) $180° - \beta - \gamma$

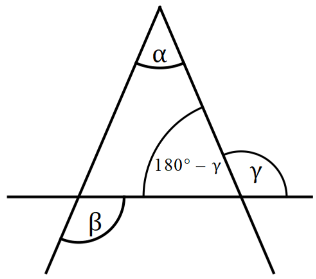
(2) $\beta + \gamma - 180°$

(3) $\frac{\beta + \gamma}{2}$

(4) $\beta + \gamma - 90°$

<u>פתרון</u>

הזווית שצמודה ל- γ שווה ל- $180° - \gamma$ (סכום זוויות על קו ישר הוא $180°$).



הזווית β היא זווית חיצונית למשולש, כאשר הזוויות שאינן צמודות לה הן: α ו- $(180° - \gamma)$.

לפיכך: $\beta = \alpha + 180° - \gamma$. נשאלנו על α ולכן נבודד אותה: $\alpha = \gamma + \beta - 180°$.

<u>דרך פתרון נוספת - הצבת מספרים:</u>

נציב ערכים במקום הזוויות β ו- γ, ונמצא את ערכה של α לפי אותה הצבה:

לפי מראית עין, נציב $\beta = 110°$ ו- $\gamma = 120°$. לפי הצבה זו, הזוויות שצמודות להן הן $70°$ ו- $60°$ בהתאמה.

אם כן, יצרנו משולש שבו הזוויות: $70°$, $60°$ ו- α. סכום זוויות במשולש הוא $180°$ ולפיכך:

$\alpha + 60° + 70° = 180° \Rightarrow \alpha = 50°$. כעת, נציב $\beta = 110°$ ו- $\gamma = 120°$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו $50°$:

תשובה (1): $180° - \beta - \gamma = 180° - 110° - 120° = -50°$. מתקבל ערך שלילי. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\beta + \gamma - 180° = 110° + 120° - 180° = 50°$.

תשובה (3): $\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{110° + 120°}{2} = \frac{230°}{2} = 115°$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\beta + \gamma - 90° = 110° + 120° - 90° = 140°$. התשובה נפסלת.

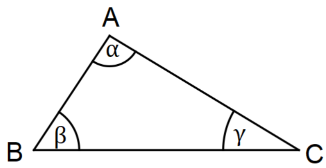
התשובה הנכונה היא (2).

צלע גדולה מול זווית גדולה

במשולשים ישנו קשר בין הזוויות לבין הצלעות שמולן:

מול הזווית הגדולה ביותר במשולש תימצא הצלע הגדולה ביותר, מול הזווית הבינונית הצלע הבינונית ומול הזווית הקטנה ביותר הצלע הקטנה ביותר (המשפט, כמובן, תקף גם הפוך - מול הצלע הגדולה תימצא הזווית הגדולה וכך הלאה).
למען הסר ספק - איננו צריכים לדעת את ערכן של **כל** הצלעות או הזוויות במשולש. אם אנו יודעים, למשל, כי צלע א' גדולה מצלע ב', ניתן לקבוע כי הזווית שמול צלע א' גדולה יותר מזו שנמצאת מול צלע ב' (ולהפך).

<u>לדוגמה:</u>
נתון: $\gamma < \beta < \alpha$

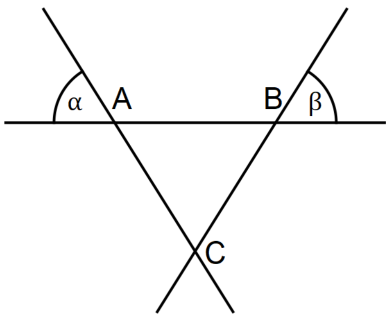


לפי המשפט המודגש, הצלע שמול הזווית הגדולה (BC), גדולה מהצלע שמול הזווית הבינונית (AC) ושתיהן גדולות מהצלע שמול הזווית הקטנה (AB): $AB < AC < BC$.

שימו לב כי **במשולש שווה שוקיים** ישנן 2 זוויות שוות שמולן 2 שוקיים שוות.
נוסף על כך, **במשולש שווה צלעות** ישנן 3 זוויות שוות שמולן 3 צלעות שוות.

שאלה לדוגמה - צלע גדולה מול זווית גדולה

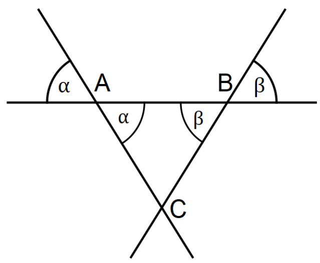
בסרטוט שלפניכם 3 ישרים שנחתכים ויוצרים את המשולש ABC.
נתון: $\beta < \alpha$



איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $AB < AC$
(2) $AC < BC$
(3) $BC < AB$
(4) $AC < AB$

<u>פתרון</u>
הזווית שקדקודית ל- α שווה לה וכך גם באשר לזווית שקדקודית לזווית β.
אם כן, במשולש ABC ישנה זווית שערכה α וישנה זווית שערכה β.



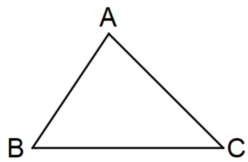
מהנתון לפיו $\beta < \alpha$, ניתן לקבוע כי הצלע שמול הזווית α (BC) גדולה מהצלע שנמצאת מול הזווית β (AC).
כלומר: $AC < BC$.
התשובה הנכונה היא (2).

אי-שוויון המשולש

בכל המשולשים מתקיים: צלע 1 + צלע 2 > צלע 3.

כלומר, **סכומן של כל שתי צלעות במשולש - לא משנה אילו צלעות נבחר - יהיה גדול מהצלע השלישית.**

<u>לדוגמה:</u>



מהמשפט האמור לעיל נובע כי: $BC < AB + AC$.

שימו לב כי אם נחסר את AC משני אגפי אי-השוויון נקבל: $BC - AC < AB$.

אי-השוויון הנ"ל מוביל אותנו למשפט הבא - **כל צלע במשולש גדולה מההפרש בין שתי הצלעות האחרות (בערך מוחלט).**

כלומר, אם אנו מחסרים צלע אחת מאחרת ומתקבל ערך שלילי, הצלע השלישית גדולה **מהערך המוחלט** של אותו ערך.

כאמור, המשפטים הללו תקפים עבור כל צלע שנבחר, ולכן: $AC < AB + BC$ וגם $AB < BC + AC$.

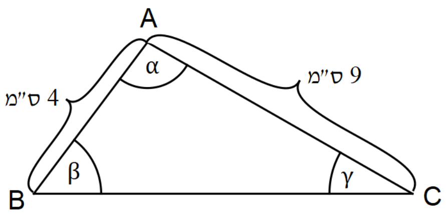
מהמשפטים הללו נובע כי: $|AC - AB| < BC$ וגם $|AB - BC| < AC$.

שאלה לדוגמה - אי-שוויון המשולש

בסרטוט שלפניכם משולש ABC.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

איזו זווית היא הזווית **הקטנה** ביותר במשולש?



(1) α

(2) β

(3) γ

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

<u>**פתרון**</u>

מהנתונים שבסרטוט ניתן לקבוע כי $AB < AC$ ומכאן ש- $\beta < \gamma$ (מול צלע גדולה יותר נמצאת זווית גדולה יותר).

בשלב הזה ניתן לפסול את תשובה (2).

אומנם אין בידינו מספיק נתונים כדי לקבוע את גודלה המדויק של BC, אך אנו יכולים למצוא את התחום שבו היא נמצאת.

סכום של כל שתי צלעות במשולש גדול מהשלישית ולכן: $BC < AB + AC \Rightarrow BC < 4 + 9 \Rightarrow BC < 13$.

נוסף על כך, כל צלע במשולש גדולה מההפרש בין השתיים האחרות ולכן:

$|AB - AC| < BC \Rightarrow |4 - 9| < BC \Rightarrow |-5| < BC \Rightarrow 5 < BC$.

לאור האמור לעיל: $5 < BC < 13$.

אם כן, הצלע BC גדולה מהצלע AB, ועל כן הזווית שמול BC גדולה מהזווית שמול AB: $\gamma < \alpha$.

כעת, אנו יודעים כי הצלע AB היא הקטנה ביותר במשולש ומכאן שהזווית שמולה (γ) היא הקטנה ביותר במשולש.

התשובה הנכונה היא (3).

דמיון משולשים

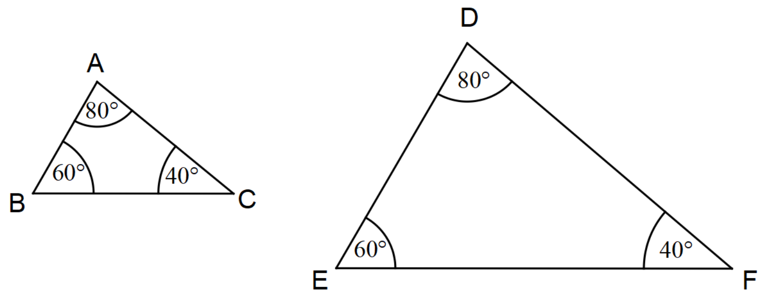
בחלק הקרוב של השיעור הקרוב נעסוק בדמיון בין משולשים.

נזכיר כי משולשים דומים זהים זה לזה מבחינת פרופורציונאלית.
כלומר, אם ניקח משולש ונקטין או נגדיל את צלעותיו בדיוק באותו יחס (פי 2, פי 3, פי 4.5 וכך הלאה) נקבל משולש שדומה לזה המקורי.
שני כללים אשר תקפים בין משולשים דומים:

1. כאמור, היחס בין כל הצלעות המתאימות במשולשים דומים זהה.
2. שלוש הזוויות במשולשים דומים זהות זו לזו.

שימו לב! די לנו באחד הכללים כדי לקבוע שבין משולשים מתקיים דמיון.

<u>לדוגמה:</u>



המשולשים DEF ו-ABC דומים זה לזה משום ששלוש זוויותיהם שוות ($40°$, $80°$ ו- $60°$).
הצלעות שמתאימות זו לזו בין שני המשולשים הן אלו שנמצאות מול אותה הזווית:
AB נמצאת מול הזווית $40°$, ולכן היא מתאימה לצלע DE.
BC נמצאת מול הזווית $80°$, ולכן היא מתאימה לצלע EF.
AC נמצאת מול הזווית $60°$, ולכן היא מתאימה לצלע DF.

אם היה נתון כי DE גדולה פי 2 מ-AB, ניתן היה להסיק ש-EF גדולה פי 2 מ-BC וכי DF גדולה פי 2 מ-AC.
כלומר, **היחס הקווי** בין המשולשים הללו הוא 1 ל-2 ($1:2$) ומתקיים: $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{1}{2}$.

נוסף על כך, **היחס הקווי** שהזכרנו ($1:2$) לא תקף לצלעות המשולש בלבד, כי אם לגבהים, לחוצי הזווית, לתיכון ולהיקף - כל גובה במשולש DEF גדול פי 2 מהגובה המתאים לו במשולש ABC וכך גם באשר לכל תיכון ולכל חוצה זווית.
כמו כן, היקף המשולש DEF גדול פי 2 מהיקף המשולש ABC.

היחס בין שטחי המשולשים **אינו** זהה ליחס הקווי ($1:2$), אלא לריבוע שלו.
כלומר, מכיוון שהיחס הקווי בין המשולש ABC למשולש DEF הוא $1:2$, יחס השטחים ביניהם הוא $(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$.

הסיבה שיחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע נובעת מהאופן שבו מחשבים שטח של משולש: כפל הבסיס בגובה וחלוקת התוצאה ב-2. בסיס המשולש DEF גדול פי 2 מבסיס המשולש ABC וכך גם לגבי הגבהים.
לפיכך, שטח המשולש DEF גדול פי 4 ($2\cdot 2$) משטח המשולש ABC.
אם בסיס המשולש DEF היה גדול פי 3 מבסיס המשולש ABC, הגובה של DEF היה גדול פי 3 גם כן.
אם אכן כך היה, שטח המשולש DEF היה גדול פי 9 ($3\cdot 3$) משטח המשולש ABC.

<u>מקרים נפוצים של דמיון משולשים:</u>

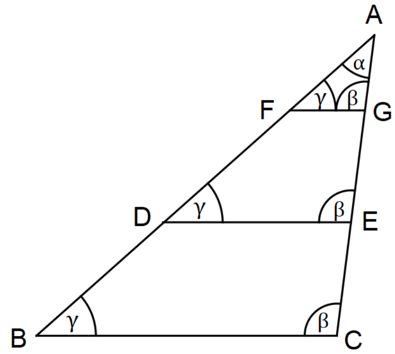
ישנם מקרים נפוצים שמיד עם זיהוים תוכלו לקבוע כי מתקיים דמיון בין משולשים ולחסוך זמן יקר:

1. העברת מקביל לבסיס: בכל משולש שבו נעביר מקביל לבסיס נקבל שני משולשים דומים.

הסיבה לכך היא שבהעברת מקביל לבסיס אנו יוצרים שני משולשים בעלי זווית ראש זהה וזוויות בסיס שוות (זוויות הבסיס שוות משום שהן זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים).

<u>לדוגמה:</u>

כזכור, משולשים ששלוש זוויותיהם שוות הם דומים, כלומר AFG, ADE ו-ABC דומים.



אם היה נתון ש- $BC = 2 \cdot DE$, כלומר שהיחס הקווי בין המשולשים הוא $1:2$, ניתן היה לקבוע כי שטח המשולש ABC גדול פי 4 משטח המשולש ADE ($(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$).

אם היה נתון ש- $BC = 4 \cdot FG$, כלומר שהיחס הקווי בין המשולשים הוא $1:4$, ניתן היה לקבוע כי שטח המשולש ABC גדול פי 16 משטח המשולש AFG ($(1:4)^2 \Rightarrow 1:16$).

סוג שאלות שמופיע לא מעט נוגע ליחס בין צורות בתוך משולשים דומים.

ניתן היה, למשל, לשאול לגבי היחס בין שטח הטרפז FGCB לשטח המשולש AFG.

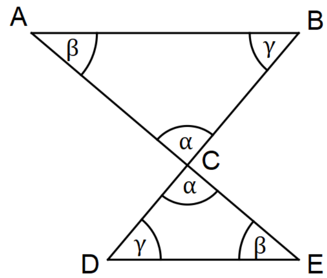
מצאנו כי שטח המשולש AFG (אותו נסמן ב-x) קטן פי 16 משטח המשולש ABC.

מכאן ששטח המשולש ABC הוא $16x$. לפיכך, שטח הטרפז FGCB הוא $15x$ ($16x - x$).

אם כן, שטח הטרפז FGCB גדול פי 15 משטח המשולש AFG.

2. שעון חול: שני משולשים שיוצרים צורה של שעון חול ושהבסיסים שלהם **מקבילים** דומים זה לזה (**שימו לב!** מקרה שעון החול תקף רק כאשר הבסיסים מקבילים זה לזה).

הסיבה לכך היא שזוויות הבסיס של המשולשים (β ו- γ) הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ועל כן שוות, וזאת נוסף על כך שזוויות הראש שלהם (α) קדקודיות ושוות.



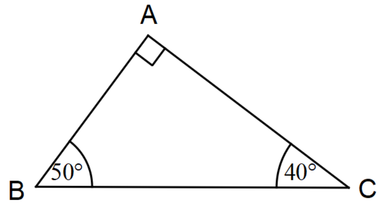
זכרו! הצלעות המתאימות הן אלו שנמצאות מול אותה הזווית: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$.

בהזדמנות זו נזכיר כי היחס בין 2 צלעות באחד המשולשים זהה ליחס שבין 2 הצלעות המתאימות במשולש השני (למשל: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DC}$).

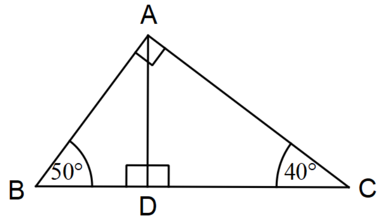
.3 גובה ליתר במשולש ישר זווית: כאשר אנו מורידים גובה ליתר במשולש ישר זווית מתקבלים 3 משולשים דומים.

הסיבה לכך היא שבהורדת הגובה אנו יוצרים 3 משולשים שונים ששלוש הזוויות בהם שוות זו לזו.

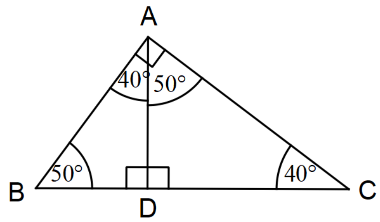
<u>לדוגמה:</u>



נוריד גובה מנקודה A ליתר - BC:



הזווית BAD משלימה ל- 180° במשולש ABD, ועל כן שווה ל- 40° ($90^\circ + 50^\circ + \sphericalangle BAD = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD = 40^\circ$).
הזווית CAD משלימה ל- 180° במשולש ACD, ועל כן שווה ל- 50° ($40^\circ + 90^\circ + \sphericalangle CAD = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAD = 50^\circ$).



אם כן, הזוויות במשולשים ABC, DBA ו-DAC שוות זו לזו, ועל כן שלושתם דומים זה לזה.

שאלה לדוגמה - דמיון משולשים

נתונים שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים: משולש A ומשולש B.
אורכו של היתר במשולש A הוא 5 ס"מ, ואורכו של היתר במשולש B הוא 10 ס"מ.

מה היחס בין שטח המשולש A לשטח המשולש B?

(1) $1:\sqrt{2}$
(2) $1:2$
(3) $1:2\sqrt{2}$
(4) $1:4$

<u>פתרון</u>

כל המשולשים ישרי הזווית ושווי השוקיים דומים זה לזה, שכן בכולם הזוויות: 45°, 45° ו- 90°.
אם כן, משולש A ומשולש B דומים זה לזה.
נתון כי היחס בין יתרי המשולשים, כלומר היחס הקווי ביניהם, הוא: $5:10 \Rightarrow 1:2$.

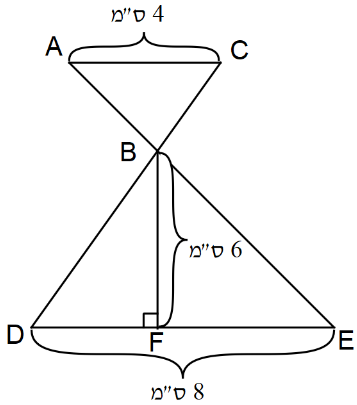
מאחר שיחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע, היחס בין שטח המשולש A לשטח המשולש B הוא: $(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – דמיון משולשים

בסרטוט שלפניכם המשולשים ABC ו-BDE.

נתון: $AC \parallel DE$



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש ABC (בסמ"ר)?

(1) 6
(2) 8
(3) 14
(4) 24

<u>פתרון</u>

מהנתון לפיו $AC \parallel DE$, ניתן לקבוע כי $\measuredangle EDC = \measuredangle ACD$ וכי $\measuredangle AED = \measuredangle CAE$.

כמו כן, הזוויות $\measuredangle DBE$ ו- $\measuredangle ABC$ קדקודיות, ולכן שוות זו לזו. אם כן, המשולשים ABC ו-DBE דומים זה לזה.

מהנתונים שבסרטוט ניתן להסיק כי היחס הקווי בין המשולשים הוא $1:2$, שהרי **בסיס המשולש** DBE הוא 8 ס"מ **ובסיס המשולש** ABC הוא 4 ס"מ ($4:8 \Rightarrow 1:2$).

נזכיר כי היחס הקווי מתקיים גם בין הגבהים, ולכן גובה המשולש ABC שווה ל-3 ס"מ ($\frac{6}{2}$).

נתון כי אורכו של בסיס המשולש ABC שווה ל-4 ס"מ, ולכן שטחו הוא (בסמ"ר): $\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

שימו לב! ניתן היה למצוא את שטח המשולש ABC בדרך נוספת:

שטח המשולש DBE הוא (בסמ"ר): $\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$.

מצאנו כי היחס הקווי בין המשולשים הוא $1:2$, ולכן יחס השטחים ביניהם הוא $(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$.

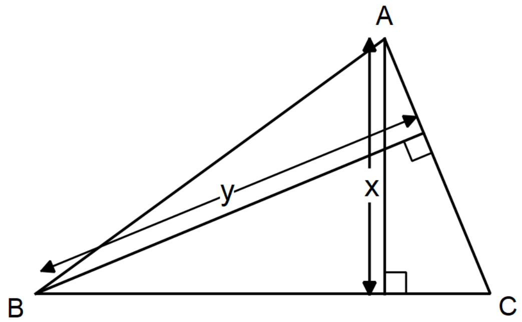
לפיכך, שטח המשולש ABC קטן פי 4 משטח המשולש DBE (בסמ"ר): $\frac{24}{4} = 6$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - דמיון משולשים

בסרטוט שלפניכם, x הוא אורך הגובה לצלע BC, ו-y הוא אורך הגובה לצלע AC.

נתון: $\frac{BC}{AC} = 2$



$\frac{x}{y} = ?$

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{4}$

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - שטח משולש:</u>

את שטח המשולש ABC ניתן לחשב בשתי דרכים:

1. כפל הבסיס AC בגובה לו (y) וחלוקת התוצאה ב-2: $\frac{AC \cdot y}{2}$.

2. כפל הבסיס BC בגובה לו (x) וחלוקת התוצאה ב-2: $\frac{BC \cdot x}{2}$.

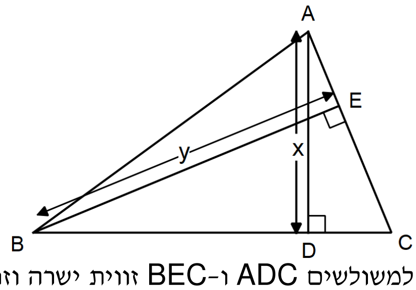
מובן שהדרך שבה אנו מחשבים את שטח המשולש אינה משנה, כלומר השטח הוא אותו שטח ולכן:

$\frac{AC \cdot y}{2} = \frac{BC \cdot x}{2} \Rightarrow AC \cdot y = BC \cdot x$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-AC וב-x ונקבל: $\frac{y}{x} = \frac{BC}{AC}$.

נתון כי $\frac{BC}{AC} = 2$ ולכן $\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$. לפי המשוואה הזו, ניתן לקבוע כי: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

<u>דרך ב' - דמיון בין משולשים:</u>

נסמן את נקודת המפגש של הגובה x עם הבסיס BC ב-D ואת נקודת המפגש של הגובה y עם הצלע AC ב-E.



למשולשים ADC ו-BEC זווית ישרה וזווית משותפת ($\sphericalangle ACB$). אם כן, ניתן לקבוע כי המשולשים דומים.

שימו לב! די לנו בשתי זוויות שוות כדי לקבוע שהשלישית שווה גם כן, ולאחר שמצאנו כי שלוש הזוויות של שני משולשים שוות, ניתן לקבוע כי מתקיים ביניהם דמיון. נתון לנו היחס בין הצלעות שנמצאות מול הזוויות הישרות: $\frac{BC}{AC} = 2$.

משום שמתקיים דמיון בין המשולשים, אותו יחס מתקיים גם בין הצלעות שמול הזווית המשותפת $\sphericalangle ACB$: $\frac{y}{x} = 2 = \frac{2}{1}$.

לפי המשוואה הזו, ניתן לקבוע כי: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

התשובה הנכונה היא (2).

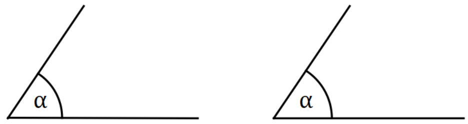
חפיפת משולשים

ראשית, נציין כי הסיכוי להופעת הנושא הזה בבחינה נמוך.
ואולם, בשביל הסיכוי שהוא כן יופיע, נעשה חזרה קצרה על ארבעת משפטי החפיפה ונזכיר מהו קטע אמצעים.
לפני החזרה חשוב להזכיר כי משולשים שחופפים זה לזה הם זהים לגמרי.

<u>המשפטים:</u>

<u>צלע, זווית, צלע:</u>

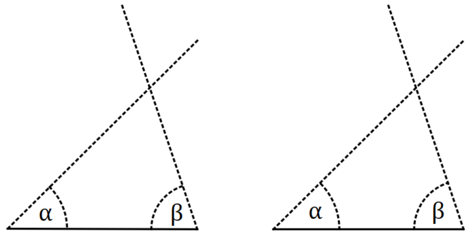
אם זיהיתם כי שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר וכך גם הזווית שביניהן, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.



בציור שמופיע לעיל שני זוגות של צלעות שוות וזווית זהה ביניהן.
ישנה דרך אחת בלבד ליצור משולש מהצורה שנוצרה והיא על ידי חיבור בין קצוות הקטעים.
מאחר שהמפתח הזוויתי בין הצלעות השוות זהה, כלומר הזווית זהה, הקטע בין הנקודות בהכרח יהיה זהה, כך שיווצרו שני משולשים זהים.

<u>זווית, צלע, זווית:</u>

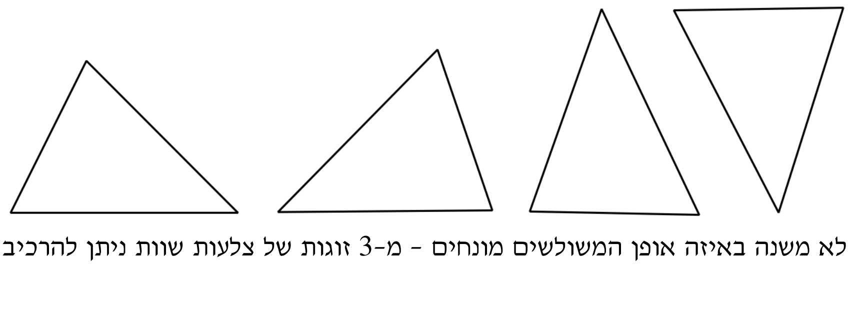
אם זיהיתם כי שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר וכך גם הצלע שביניהן, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.



בציור שמופיע לעיל צלע זהה (זו שאינה מקווקוות) ומהקצוות שלה הוצאנו שני קטעים נוספים (הקטעים המקווקווים) כך שנוצרו שתי זוויות שוות: α ו- β.
מאחר שהזוויות שוות ומאחר שהקטעים יוצאים מאותן נקודות, הם נפגשים באותה נקודה כך שנוצרים שני משולשים זהים.

<u>צלע, צלע, צלע:</u>

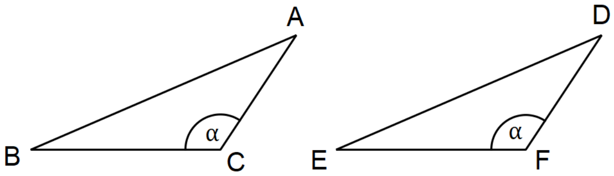
אם זיהיתם כי שלוש צלעות במשולש אחד שוות לשלוש צלעות במשולש אחר, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.



לא משנה באיזה אופן המשולשים מונחים - מ-3 זוגות של צלעות שוות ניתן להרכיב משולש אחד בלבד.

<u>צלע, צלע, זווית:</u>

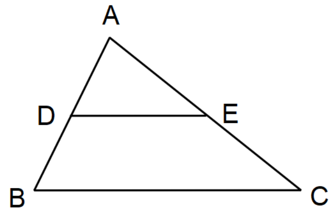
אם זיהיתם כי שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, ומול הצלע הגדולה מבין השתיים (הפרט הזה יהיה נתון או ניתן להסקה מנתונים אחרים) נמצאת זווית אשר שווה לזווית המתאימה במשולש השני, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.



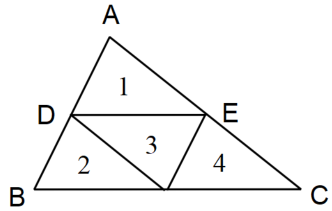
אם היה נתון: $BC = EF$, $AB = DE$ ו- $BC < AB$ ניתן היה לקבוע כי המשולשים ABC ו-DEF חופפים.

<u>קטע אמצעים במשולש:</u>

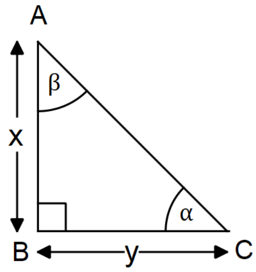
קטע אמצעים הוא קטע שמחבר בין אמצעי 2 צלעות. קטע האמצעים (DE) שווה למחצית מבסיס המשולש (BC) ומקביל לו.



אם נחבר את הנקודות E ו-D לאמצע הצלע BC, נקבל 4 משולשים חופפים:



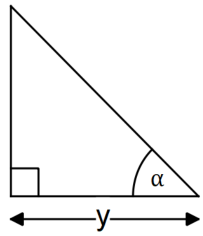
שאלה לדוגמה - חפיפת משולשים



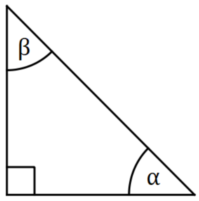
בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC.

איזה מן המשולשים הבאים **אינו** בהכרח חופף למשולש ABC?

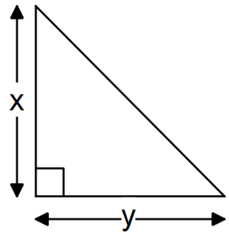
(1)



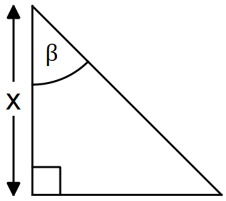
(2)



(3)



(4)



<u>**פתרון**</u>

נבדוק כל אחת מהתשובות, ונסמן את התשובה שבה משולש שאינו חופף בהכרח למשולש ABC:

תשובה (1): במשולש זה שתי זוויות אשר שוות לשתי זוויות במשולש ABC (α ו- 90°) והצלע שביניהן (y) שווה אף היא.

אם כן, המשולשים חופפים (**זווית, צלע, זווית**). התשובה נפסלת.

תשובה (2): במשולש זה שלוש הזוויות שוות לשלוש הזוויות במשולש ABC, ולכן ניתן לקבוע כי המשולשים דומים.

הם אומנם יכולים להיות חופפים זה לזה, אך אין הכרח כזה משום שאיננו יודעים את גודלן של הצלעות.

זו התשובה הנכונה ובשלב הזה ניתן לסמנה, אולם נבדוק את יתר התשובות לטובת שלמות ההסבר.

תשובה (3): במשולש זה שתי צלעות אשר שוות לשתי צלעות במשולש ABC (x ו-y) והזווית שביניהן (90°) שווה אף היא.

אם כן, המשולשים חופפים (**צלע, זווית, צלע**). התשובה נפסלת.

תשובה (4): במשולש זה שתי זוויות אשר שוות לשתי זוויות במשולש ABC (β ו- 90°) והצלע שביניהן (x) שווה אף היא.

אם כן, המשולשים חופפים (**זווית, צלע, זווית**). התשובה נפסלת.

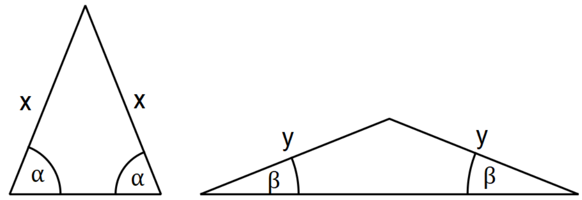
התשובה הנכונה היא (2).

משולשים מיוחדים

בחלק הזה של השיעור נעסוק במשולשים המיוחדים ובתכונותיהם: משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית ושווה שוקיים (45; 45; 90), משולש 30; 60; 90 ומשולש שווה צלעות.

<u>שווה שוקיים:</u>

כידוע, משולש שווה שוקיים הוא משולש בעל בסיס ושתי שוקיים שוות ובו זוויות הבסיס שוות זו לזו.
משולש שווה שוקיים יכול להיות קהה זווית, הן חד זווית או ישר זווית (על משולש ישר זווית ושווה שוקיים - בהמשך).



די לנו באחד הנתונים שציינו לעיל - שתי שוקיים שוות או שתי זוויות בסיס שוות - כדי לקבוע שמשולש הוא שווה שוקיים.
כמו כן, מספיק לנו גודל של זווית אחת בלבד במשולש שווה שוקיים כדי למצוא את גודלן של שלוש הזוויות במשולש.

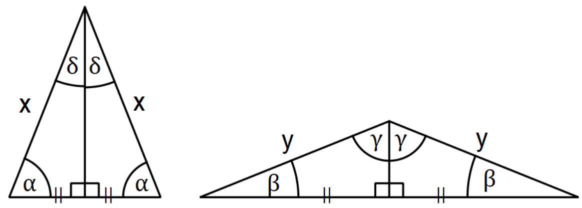
<u>לדוגמה:</u>

אם אנו יודעים כי גודלה של זווית בסיס הוא $20°$, אזי גודלה של זווית הבסיס השנייה הוא $20°$ גם כן (זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שוות) וגודלה של השלישית הוא: $180° - 20° - 20° = 140°$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

אם אנו יודעים כי גודלה של זווית הראש הוא $40°$, אזי גודל כל אחת מזוויות הבסיס הוא: $\frac{180° - 40°}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$.

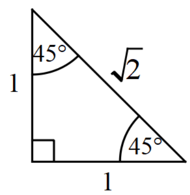
תכונה נוספת של משולש שווה שוקיים היא שהגובה לבסיס הוא גם תיכון וגם חוצה זווית.



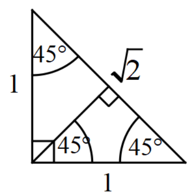
שימו לב כי הורדת הגובה במשולש שווה שוקיים יוצרת שני משולשים ישרי זווית חופפים.

<u>משולש ישר זווית ושווה שוקיים (45; 45; 90):</u>

במשולש זה ישנו יחס קבוע בין הצלעות: $1 : 1 : \sqrt{2}$ (היתר הוא $\sqrt{2}$ ואילו הניצבים הם 1).
שימו לב כי היחס הזה נובע ממשפט פיתגורס (סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר) אשר תקף לכל משולש ישר זווית.



מאחר שבמשולש שווה שוקיים הגובה הוא גם תיכון וחוצה זווית, בהורדת גובה במשולש שווה שוקיים וישר זווית אנו מקבלים שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים:



כדי למצוא את אורך היתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים, עלינו לכפול את אורך הניצב ב- $\sqrt{2}$.

למשל, אם נתון כי אורכו של הניצב הוא 8 ס"מ, אזי אורכו של היתר הוא $8\sqrt{2}$ סמ"ר.

כדי למצוא את גודל אחד הניצבים במשולש ישר זווית ושווה שוקיים, עלינו לחלק את גודל היתר ב- $\sqrt{2}$.

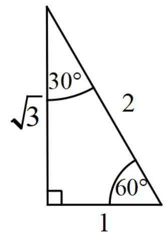
למשל, אם נתון כי אורכו של היתר הוא 10 ס"מ, אזי אורכו של כל ניצב הוא (בסמ"ר): $5\sqrt{2} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$.

בהזדמנות זו נזכיר כי $\sqrt{2} = 1.414...$, כלומר $\sqrt{2}$ שווה בקירוב ל-1.5.

כך, אם הצלחתם למצוא שאורכה של צלע מסוימת הוא $5\sqrt{2}$, וערך זה אינו מופיע בתשובות, זכרו כי ערכה שווה בקירוב ל-7.5 ($5\sqrt{2} \approx 5 \cdot 1.5 \approx 7.5$).

<u>משולש 30; 60; 90:</u>

במשולש זה ישנו יחס קבוע בין הצלעות גם כן: $2 : \sqrt{3} : 1$ (היתר הוא 2, הניצב הגדול $\sqrt{3}$ והניצב הקטן 1).



שימו לב כי מספיק לנו גודל של צלע אחת כדי לדעת את גודלן של שלוש הצלעות.

כדי לבצע מעבר מהניצב הקטן לניצב הגדול עלינו לכפול את הניצב הקטן ב- $\sqrt{3}$, וכדי לבצע מעבר ליתר עלינו לכפול אותו ב-2.

למשל, אם נתון כי אורך הניצב הקטן הוא 3 ס"מ, אזי אורך הניצב הגדול הוא $3\sqrt{3}$ ס"מ ואורך היתר הוא (בס"מ) $2 \cdot 3 = 6$.

גם במקרה הזה, נזכיר כי $\sqrt{3} = 1.73...$, כלומר $\sqrt{3}$ שווה בקירוב ל-1.7.

כדי לבצע מעבר מהניצב הגדול לניצב הקטן עלינו לחלק את הניצב הגדול ב- $\sqrt{3}$.

למשל, אם היה נתון כי אורך הניצב הגדול הוא 4 ס"מ, אורך הניצב הקטן היה $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ס"מ ואורך היתר היה (בס"מ)

$\frac{8}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$.

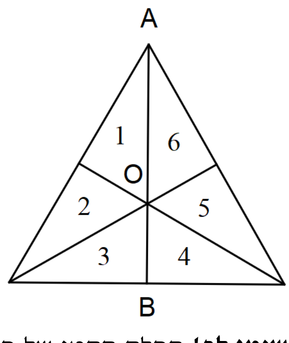
כדי לבצע מעבר מהיתר לניצב הקטן עלינו לחלק את היתר ב-2.

למשל, אם היה נתון כי אורך היתר הוא 10 ס"מ, אורך הניצב הקטן היה $5 = \frac{10}{2}$ ס"מ ואורך הניצב הגדול היה (בס"מ) $5\sqrt{3}$.

<u>משולש שווה צלעות:</u>

משולש שווה צלעות הוא צורה משוכללת, כלומר כל צלעותיו שוות זו לזו וכך גם לגבי כל זוויותיו (כולן שוות $60°$).

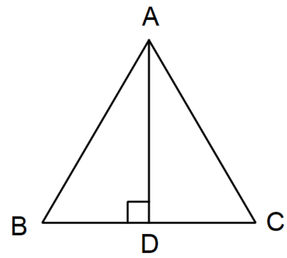
העברת 3 חוצי זווית (שהם גם תיכונים וגם גבהים) במשולש שווה צלעות מניבה 6 משולשים 30; 60; 90 חופפים:



שימו לב! החלק הקטן של חוצי הזווית (BO למשל) הוא ניצב קטן במשולש 30; 60; 90, ואילו החלק הגדול (AO למשל) הוא יתר במשולש זה. כפי שלמדנו, במשולש 30; 60; 90 היתר גדול פי 2 מהניצב.

אם כן, מפגש חוצי הזווית מחלק אותם ביחס: $2 : 1$. המשפט הזה יהיה לנו לעזר בנושאים הבאים.

שטח של משולש שווה צלעות:



ABC הוא משולש שווה צלעות. נתון: 5 ס"מ = AB.

מה שטח המשולש ABC (בסמ"ר)?

גובה במשולש שווה צלעות מחלק אותו לשני משולשים 30; 60; 90 חופפים. אם כן, ניתן למצוא את הניצב הקטן (BD) על ידי חלוקת היתר (AB) ב-2: $\frac{5}{2}$. כדי למצוא את גובה המשולש (AD) נכפול את הניצב הקטן ב- $\sqrt{3}$: $\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

המשולש ABC שווה צלעות ולכן: 5 ס"מ = AB = BC.

כעת, נכפול את בסיס המשולש בגובה, ונחלק את התוצאה ב-2: $\frac{5\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{5\cdot5\sqrt{3}}{2\cdot2}=\frac{5^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.

שימו לב! הראינו את הדרך המלאה לחישוב שטח משולש שווה צלעות, אולם אין בה צורך בעת הבחינה.

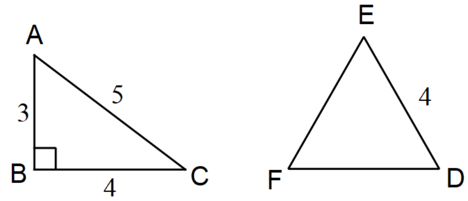
שטח משולש שווה צלעות שווה תמיד ל- $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ כאשר אורך צלע המשולש הוא a.

למשל, אם נתון לנו משולש שווה צלעות שאורך צלעו 2 ס"מ, שטחו הוא (בסמ"ר): $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}}=\sqrt{3}$.

ההמלצה שלנו היא לזכור את הנוסחה לחישוב שטח משולש שווה צלעות בעל-פה.

יעילות של משולש שווה צלעות:

נתון משולש ישר זווית ABC ומשולש שווה צלעות EFD.



שטחו של איזה משולש גדול יותר?

שטח המשולש ABC הוא: $6=\frac{12}{2}=\frac{4\cdot3}{2}$.

לפי הנוסחה שלמדנו, שטח המשולש EFD הוא: $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$ (1.7 בקירוב) גדול מ-1.5, ולכן $4\sqrt{3}$ גדול מ-6 אשר שווה ל- $4\cdot1.5$.

לפיכך, שטח המשולש EFD גדול משטח המשולש ABC.

למעשה, לא היה צורך לחשב את שטחי המשולשים.

היקף המשולש ABC הוא 12 ($3+4+5$) וכך גם היקף המשולש EFD ($4+4+4$).

כאשר לצורות מאותה "משפחה" (משולשים, מרובעים וכו') היקף זהה, שטח הצורה יהיה גדול יותר ככל שהצורה תהיה משוכללת יותר. לפיכך, ניתן היה להסיק כי שטח המשולש EFD גדול יותר משטח המשולש ABC משום שהיקפם זהה.

שימו לב כי הכלל תקף גם הפוך - אם נתונות שתי צורות ששטחן זהה מאותה "משפחה", ניתן להסיק כי היקף הצורה המשוכללת **קטן** יותר.

רמז לבאות: ככל שצורה תהיה קרובה בצורתה למעגל, כלומר משוכללת יותר, שטחה יהיה גדול יותר עבור היקף זהה. ניתן, למשל, להסיק ששטח מעגל שהיקפו 12 ס"מ גדול משטח ריבוע שהיקפו 12 ס"מ גם כן.

שאלה לדוגמה - משולשים מיוחדים

נתון משולש שאחת הזוויות בו גודלה x, השנייה 2x והשלישית 3x.

אורכי שלוש הצלעות של המשולש יכולים להיות -

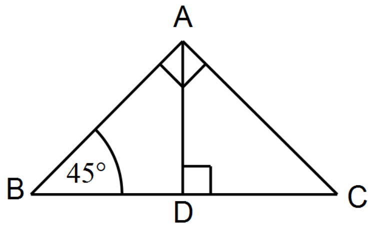
(1) 1 ס"מ, 2 ס"מ, 3 ס"מ
(2) 2 ס"מ, $2\sqrt{2}$ ס"מ, $2\sqrt{2}$ ס"מ
(3) 3 ס"מ, 4 ס"מ, 5 ס"מ
(4) 3 ס"מ, $3\sqrt{3}$ ס"מ, 6 ס"מ

<u>פתרון</u>

מאחר שסכום הזוויות במשולש שווה ל-$180°$, ניתן לקבוע כי: $x+2x+3x=180° \Rightarrow 6x=180°$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-6 ונקבל: $x=30°$.
אם כן, המשולש הנתון הוא משולש 30; 60; 90. כפי שלמדנו, במשולש זה ישנו יחס קבוע בין הצלעות: $2 : \sqrt{3} : 1$.
התשובה היחידה שבין צלעותיה מתקיים יחס כזה היא (4) - 3 ס"מ, $3\sqrt{3}$ ס"מ, 6 ס"מ.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - משולשים מיוחדים

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ששטחו 8 סמ"ר.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$AD = ?$

(1) $4\sqrt{2}$ ס"מ
(2) 2 ס"מ
(3) $2\sqrt{2}$ ס"מ
(4) 4 ס"מ

<u>פתרון</u>

כיוון שסכום הזוויות במשולש הוא $180°$, הזווית ACB שווה ל- $45°$ ($45° + 90° + \sphericalangle ACB = 180° \Rightarrow \sphericalangle ACB = 45°$).

מכאן שהמשולשים ADC ו-ADB ישרי זווית ושווי שוקיים. נסמן את הצלע AD ב-x. לפי סימון זה: $AD = BD = DC = x$.

נוסף על כך: $BC = BD + DC = x + x = 2x$.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא 8 סמ"ר ולכן: $\frac{BC \cdot AD}{2} = 8 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x \cdot x}{\cancel{2}} = 8 \Rightarrow x^2 = 8$.

נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $x = \sqrt{8}$. משום שאין תשובה כזו, נפרק את $\sqrt{8}$: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

<u>דרך פתרון נוספת:</u>

כאמור, המשולש ABC ישר זווית ושווה שוקיים ולכן $AB = AC$. לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש:

$\frac{AC^2}{2} = 8 \Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{2} = 8$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $AC^2 = 16$.

נוציא שורש לשני אגפי המשוואה: $AC = 4$. הראינו קודם כי המשולש ADC הוא ישר זווית ושווה שוקיים גם כן.

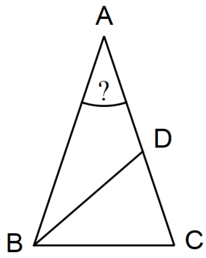
לפיכך, ניתן לחלק את היתר שלו (AC) ב- $\sqrt{2}$ כדי למצוא את אורך הניצב (AD): $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - משולשים מיוחדים

בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC ‏($AB = AC$).

נתון: $AD = BD = BC$.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$\measuredangle BAC = ?$

(1) $36°$
(2) $45°$
(3) $30°$
(4) $60°$

<u>פתרון</u>

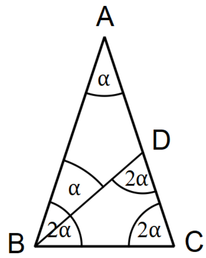
לפי הנתון $AD = BD = BC$, המשולש ADB שווה שוקיים ומכאן שזוויות הבסיס שלו שוות ($\measuredangle BAD = \measuredangle DBA$).

נסמן את הזוויות $\measuredangle BAD$ ו- $\measuredangle DBA$ ב- α .

הזווית $\measuredangle BDC$ חיצונית למשולש ABD, ועל כן שווה ל- $\alpha + \alpha = 2\alpha$.

מהנתון לפיו $AD = BD = BC$, ניתן להסיק כי המשולש BDC שווה שוקיים גם כן ולכן: $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = 2\alpha$.

נתון כי המשולש ABC שווה שוקיים ולכן: $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = 2\alpha$.



סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$ ולכן במשולש ABC מתקיים:

$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180° \Rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow 5\alpha = 180°$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-5 ונקבל: $\alpha = 36° = \measuredangle BAC$.

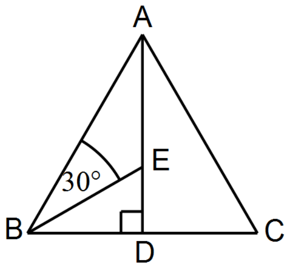
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – משולשים מיוחדים

בסרטוט שלפניכם משולש שווה צלעות ABC.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$$\frac{\text{שטח המשולש ABC}}{\text{שטח המשולש BDE}} = ?$$



(1) 5
(2) 6
(3) 8
(4) 4

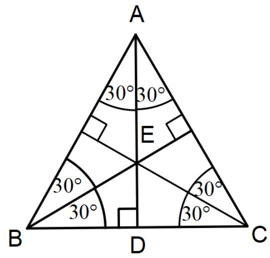
<u>פתרון</u>

AD הוא גובה במשולש שווה צלעות, ועל כן הוא גם תיכון וחוצה זווית.

המשולש ABC שווה צלעות, ולכן זוויות הבסיס שלו שוות ל- $60°$. אם כן: $\sphericalangle EBD = 60° - 30° = 30°$.

מכאן שהצלע BE חוצה זווית, ומכיוון שהיא חוצה זווית במשולש שווה צלעות, היא גם תיכון וגובה (לו הייתה ממשיכה עד לצלע AC כמובן).

לפיכך, הנקודה E היא מפגש חוצי הזווית במשולש שווה צלעות, ואם נמשיך את הצלע BE עד לצלע AC ונחבר את הנקודה C עם הצלע AB, נקבל 6 משולשים 30; 60; 90 חופפים (כפי שלמדנו בשיעור).



לאור האמור לעיל: $6 = \frac{6}{1} = \frac{\text{שטח המשולש ABC}}{\text{שטח המשולש BDE}}$.

<u>דרך פתרון נוספת:</u>

מאחר שנשאלנו על היחס שבין המשולשים, ניתן להציב מספר נוח במקום אחת הצלעות ולמצוא את שטחי המשולשים לפי אותה הצבה. כאמור, זוויות הבסיס של המשולש ABC שוות ל- $60°$ ולכן: $\sphericalangle EBD = 60° - 30° = 30°$.

נקבע $AB = 2$ ומכאן ש- $BD = 1$ ו- $AD = \sqrt{3}$ (לפי יחס צלעות במשולש 30; 60; 90 - $1 : \sqrt{3} : 2$).

לפי הצבה זו, שטח המשולש ABC הוא: $\sqrt{3} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{BC \cdot AD}{2}$.

המשולש BDE הוא משולש 30; 60; 90 גם כן, ולכן הניצב הקטן בו (DE) קטן פי $\sqrt{3}$ מהניצב הגדול (BD):

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{\sqrt{3}} = DE$. אם כן, שטח המשולש BDE הוא: $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{BD \cdot DE}{2}$.

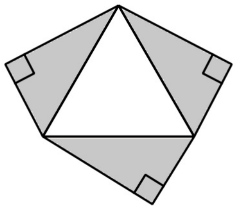
נציב את השטחים שמצאנו בביטוי המבוקש: $2 \cdot 3 = 6 = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{\text{שטח המשולש ABC}}{\text{שטח המשולש BDE}}$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - משולשים מיוחדים

על צלעותיו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו x ס"מ נבנו 3 משולשים ישרי-זווית שהיחס בין הזוויות בהם הוא: $1:2:3$.

מה סכום שטחי המשולשים הכהים (בסמ"ר)?



(1) $x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$

(3) $x^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(4) $x^2 \cdot \frac{3}{8}$

<u>פתרון</u>

נסמן את הזווית הקטנה באחד המשולשים האפורים ב- α. מכאן שהזווית הבינונית היא 2α והגדולה היא 3α.
סכום הזוויות במשולש הוא $180°$ ולכן: $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow 6\alpha = 180°$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-6 ונקבל: $\alpha = 30°$. לפיכך, המשולשים האפורים הם משולשים 30; 60; 90.
נוסף על כך, הם חופפים לפי המשפט זווית, צלע, זווית. היחס בין הצלעות במשולש 30; 60; 90 הוא $2 : \sqrt{3} : 1$.
היתר במשולשים הכהים הוא x (נתון), ולכן הניצב הקטן שלהם הוא $\frac{x}{2}$ והניצב הגדול שלהם הוא $\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}$.
אם כן, השטח של כל אחד מהם הוא: $\frac{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$.
לאור האמור לעיל, סכום השטחים של שלושת המשולשים הכהים הוא: $3 \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{8} = x^2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}$.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. שטח משולש:

- $\text{שטח משולש} = \dfrac{\text{אורך הבסיס} \cdot \text{הגובה לאותו בסיס}}{2}$
- אם במשולש ישנו שינוי בממד אחד בלבד - גובה או בסיס - השטח משתנה בהתאם.

2. זווית חיצונית במשולש:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות **שאינן** צמודות לה.

3. צלע גדולה מול זווית גדולה:

מול הזווית הגדולה ביותר במשולש תימצא הצלע הגדולה ביותר, מול הזווית הבינונית הצלע הבינונית ומול הזווית הקטנה ביותר הצלע הקטנה ביותר (המשפט, כמובן, תקף גם הפוך - מול הצלע הגדולה תימצא הזווית הגדולה וכך הלאה).

4. אי-שוויון המשולש:

- סכומן של כל שתי צלעות במשולש - לא משנה אילו צלעות נבחר - יהיה גדול מהצלע השלישית.
- כל צלע במשולש גדולה מההפרש (בערך מוחלט) בין שתי הצלעות האחרות.

5. דמיון משולשים:

- בין משולשים דומים מתקיים יחס זהה בין הצלעות (בין צלעות דומות בתוך משולש ובין צלעות מתאימות בשני המשולשים). נוסף על כך, שלוש הזוויות בין משולשים דומים זהות (שימו לב כי מספיק למצוא שתי זוויות שוות בין משולשים כדי לקבוע שהשלישית שווה גם כן).
- יחס השטחים בין משולשים דומים שווה ליחס בין הצלעות בריבוע.

לדוגמה: אם צלע במשולש א' גדולה פי 3 מהצלע המתאימה במשולש ב' ובין המשולשים מתקיים דמיון, שטח משולש א' גדול פי 9 משטח משולש ב' ($(1:3)^2 \Rightarrow 1:9$).

- זכרו את המקרים הנפוצים שעליהם פירטנו בשיעור (העברת מקביל לבסיס, שעון החול וגובה במשולש ישר זווית) בעל-פה, שכן כך ייחסך לכם זמן רב בבחינה.

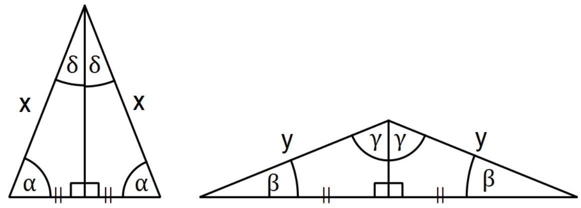
6. חפיפת משולשים:

- **צלע, זווית, צלע** - אם זיהיתם כי שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר וכך גם הזווית שביניהן, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.
- **זווית, צלע, זווית** - אם זיהיתם כי שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר וכך גם הצלע שביניהן, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.
- **צלע, צלע, צלע** - אם זיהיתם כי שלוש צלעות במשולש אחד שוות לשלוש צלעות במשולש אחר, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.
- **צלע, צלע, זווית** - אם זיהיתם כי שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, ומול הצלע הגדולה מבין השתיים (הפרט הזה יהיה נתון או ניתן להסקה מנתונים אחרים) נמצאת זווית אשר שווה לזווית המתאימה במשולש השני, ניתן לקבוע כי המשולשים חופפים.
- **קטע אמצעים** - קטע אמצעים במשולש יוצא מאמצעי 2 צלעות. קטע האמצעים שווה למחצית הבסיס ומקביל לו. חיבור הקצוות של קטעי האמצעים לאמצע הבסיס יוצר 4 משולשים חופפים.

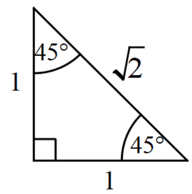
7. <u>משולשים מיוחדים:</u>

- **משולש שווה שוקיים** - גובה במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון וחוצה זווית. הורדת גובה במשולש שווה שוקיים יוצרת שני משולשים ישרי זווית חופפים.

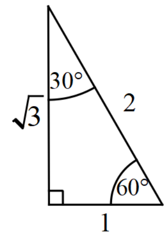
  זכרו כי מספיק לנו גודל של זווית אחת בלבד במשולש שווה שוקיים כדי למצוא את גודלן של שלוש הזוויות במשולש.



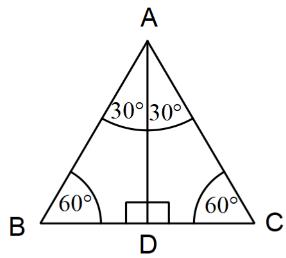
- **משולש שווה שוקיים וישר זווית (45; 45; 90)** - במשולש שווה שוקיים וישר זווית ישנו יחס קבוע בין הצלעות (ניצבים ליתר): $1:1:\sqrt{2}$.



- **משולש 30; 60; 90** - במשולש זה ישנו יחס קבוע בין הצלעות גם כן (ניצב קטן, ניצב גדול, יתר): $1:\sqrt{3}:2$.



- **משולש שווה צלעות** - שטח משולש שווה צלעות שווה תמיד ל- $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ כאשר אורך צלע המשולש הוא a.



- **זכרו!** כשלצורות היקף זהה, שטח הצורה יהיה גדול יותר ככל שהצורה תהיה משוכללת יותר.

<u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>