אלגברה

חזקות ושורשים

חזקות ושורשים

שימו לב כי בשיעור הזה נעסוק בדוגמאות שרמתן תואמת את הרמה בבחינה. לפיכך, אם אינכם בטוחים בשליטה שלכם בבסיס של חזקות ושורשים, אנו ממליצים לעשות חזרה על הנושא הזה ביסודות טרם המעבר על השיעור הזה.
כמו כן, את החזקות הבאות אנו ממליצים לזכור בעל-פה:

חזקות של המספר 2:

$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$
$2^7=128$	$2^6=64$	$2^5=32$
$2^{10}=1024$	$2^9=512$	$2^8=256$

חזקות של המספר 3:

$3^4=81$	$3^3=27$	$3^2=9$

חזקות של המספר 4:

$4^4=256$	$4^3=64$	$4^2=16$

חזקות של המספר 5:

$5^4=625$	$5^3=125$	$5^2=25$

חזקות של המספר 6:

	$6^3=216$	$6^2=36$

חזקות ריבועיות:

$9^2=81$	$8^2=64$	$7^2=49$
$12^2=144$	$11^2=121$	$10^2=100$
$15^2=225$	$14^2=196$	$13^2=169$
$18^2=324$	$17^2=289$	$16^2=256$
$25^2=625$	$20^2=400$	$19^2=361$
		$30^2=900$

שימו לב כי אנו ממליצים לזכור את השורש של כל התוצאות המופיעות לעיל בעל-פה גם כן.

<u>לדוגמה:</u>
אנו זוכרים כי $6^3=216$, ולכן יש לזכור כי $\sqrt[3]{216}=6$.

בסיסי חזקות זהים

✓ **כלל:** ב**כפל** בין בסיסים זהים ניתן **לחבר** בין המעריכים שלהם.
לפיכך: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

✓ **כלל:** ב**חילוק** בין בסיסים זהים ניתן **לחסר** את מעריך הבסיס במכנה (n) ממעריך הבסיס במונה (m).
לפיכך: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{8^2 \cdot 8^{10}}{8^6} = ?$$

הסיכוי שנצטרך לחשב ערך של ביטוי כזה בבחינה הוא נמוך עד אפסי, שכן מדובר בתוצאה גדולה למדי.
אולם, ניתן לפשט את הביטוי על פי החוקים שהוזכרו לעיל. נתחיל מפישוט המונה:
במונה ישנו כפל בין בסיסים זהים (8), ולכן ניתן לחבר בין המעריכים שלהם: $8^2 \cdot 8^{10} = 8^{2+10} = 8^{12}$.
לאחר שעשינו זאת, הביטוי נראה כך: $\frac{8^{12}}{8^6}$.

ישנו חילוק בין בסיסים זהים (8), ולכן ניתן לחסר את מעריך הבסיס במכנה (6) ממעריך הבסיס במונה (12): $\frac{8^{12}}{8^6} = 8^{12-6} = 8^6$.

אגב, את התוצאה שהתקבלה ניתן להמשיך ולפשט באמצעות העובדה $8 = 2^3$, אך בכך ניגע בהמשך.

שאלה לדוגמה - בסיסי חזקות זהים

$$\frac{3^6 \cdot 3^{\left(-\frac{9}{5}\right)}}{3^{\frac{1}{5}}} = ?$$

(1) 9   (2) 27   (3) 30   (4) 81

<u>פתרון</u>

הביטוי בשאלה מורכב מכפל ומחילוק בין בסיסים זהים (3).
לפיכך, ניתן לחבר בין המעריכים של הבסיסים במונה ולחסר מהתוצאה את המעריך של הבסיס במכנה:
$6 + \left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{1}{5} = 6 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5} = 6 - \frac{10}{5} = 6 - 2 = 4$. כלומר, המעריך שמתקבל לאחר פעולות החיבור והחיסור הוא 4.
אם כן, הביטוי שמתקבל לאחר הפעולות הללו הוא: $3^4 = 81$.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – בסיסי חזקות זהים

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^3 \cdot y^{-3}}{x^{-\frac{1}{2}}} = ? \quad , \quad x, y \neq 0$$

(1) 1

(2) $\frac{x}{y}$

(3) x

(4) $x^2 \cdot y^2$

פתרון

דרך א' – פתרון אלגברי:

נחסר בין המעריכים של הבסיס x, שכן מתבצעת ביניהם חלוקה, ונחבר בין המעריכים של הבסיס y, כיוון שמתבצע ביניהם כפל:
$x^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot y^{3+(-3)} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot y^{3-3} = x^1 \cdot y^0$.

כל בסיס בחזקת 1 שווה לבסיס עצמו ולכן: $x^1 = x$.

כל בסיס בחזקת 0 שווה ל-1 (פרט ל- 0^0 - ביטוי שאינו מוגדר) ולכן: $y^0 = 1$.

לאור האמור לעיל: $x^1 \cdot y^0 = x \cdot 1 = x$.

דרך ב' – הצבת מספרים:

נציב בביטוי $x = 2$ ו- $y = 2$: $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^3 \cdot y^{-3}}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^3 \cdot 2^{-3}}{2^{-\frac{1}{2}}}$.

משום שבחרנו בסיסים זהים, ניתן לחבר בין המעריכים במונה: $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^3 \cdot 2^{-3}}{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+3+(-3)}}{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$.

כעת ישנו חילוק בין בסיסים זהים, ולכן ניתן לחסר את מעריך הבסיס במכנה ממעריך הבסיס במונה: $2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$.

כעת, נציב $x = 2$ ו- $y = 2$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו 2:

תשובה (1): $1 \neq 2$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{x}{y} = \frac{2}{2} = 1$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x = 2$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $x^2 \cdot y^2 = 2^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

חזקה של חזקה

✓ **כלל:** בביטוי שבו חזקה של חזקה ניתן לכפול בין המעריכים ולהעלות את הבסיס בחזקת התוצאה.
לפיכך: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$.

בסוף השיעור הקודם ציינו שאת הביטוי 8^6 ניתן לפשט. זאת, באמצעות החוק המוזכר לעיל.

כאמור, $8 = 2^3$ ולכן ניתן לכתוב את הביטוי כך: $8^6 = \left(2^3\right)^6 = 2^{3\cdot 6} = 2^{18}$.

דרך נוספת לכתיבת הביטוי היא: $8^6 = 8^{2\cdot 3} = \left(8^2\right)^3 = (64)^3$.

לאור האמור לעיל, אם לאחר פישוט תרגיל מסוים הגענו לביטוי אשר אינו מופיע בתשובות, ננסה להיעזר בהן כדי לבדוק אם עלינו לעשות שימוש בחוק אשר מוזכר לעיל.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{27^2 \cdot 9^3}{3^6} = ?$$

בביטוי אשר מופיע לעיל המעריכים כמו גם הבסיסים שונים, ולכן לא ניתן לכפול או לחלק ביניהם.
עם זאת, ניתן להשתמש בחוק חזקה של חזקה כדי להביא את האיברים לבסיסים זהים.
הבסיס הנמוך ביותר מבין האיברים בדוגמה הוא 3, ועל כן נעביר את הבסיסים האחרים לבסיס 3 גם כן:

$$\frac{27^2 \cdot 9^3}{3^6} = \frac{\left(3^3\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^3}{3^6} = \frac{3^{3\cdot 2} \cdot 3^{2\cdot 3}}{3^6} = \frac{\cancel{3^6} \cdot 3^6}{\cancel{3^6}} = 3^6.$$

שאלה לדוגמה – חזקה של חזקה

$27^{3x} \cdot 9^{2x} \cdot 3^x = ?$

(1) 3^{10x} (2) 3^{8x} (3) 3^{16x} (4) 3^{14x}

<u>פתרון</u>

בביטוי אשר מופיע לעיל המעריכים כמו גם הבסיסים שונים, ולכן לא ניתן לכפול או לחלק ביניהם.

עם זאת, ניתן להשתמש בחוק חזקה של חזקה כדי להביא את האיברים לבסיסים זהים: $27^{3x} \cdot 9^{2x} \cdot 3^x = \left(3^3\right)^{3x} \cdot \left(3^2\right)^{2x} \cdot (3)^x$.

נכפול בין המעריכים: $\left(3^3\right)^{3x} \cdot \left(3^2\right)^{2x} \cdot (3)^x = 3^{3\cdot 3x} \cdot 3^{2\cdot 2x} \cdot 3^x = 3^{9x} \cdot 3^{4x} \cdot 3^x$.

משום שבמכפלה שהתקבלה ישנו כפל בין בסיסים זהים, ניתן לחבר בין המעריכים שלהם: $3^{9x} \cdot 3^{4x} \cdot 3^x = 3^{9x+4x+x} = 3^{14x}$.

התשובה הנכונה היא (4).

בסיסי חזקות שונים

✓ **כלל:** בכפל בין בסיסים בעלי מעריך זהה ניתן לכפול בין הבסיסים ולהעלות את התוצאה בחזקת המעריך.
לפיכך: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

✓ **כלל:** בחילוק בין בסיסים בעלי מעריך זהה ניתן לחלק בין הבסיסים ולהעלות את המנה בחזקת המעריך.
לפיכך: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{4^4 \cdot 2^4}{8^3} = ?$$

ניתן לשים לב כי במונה ישנה מכפלה של איברים עם מעריכים זהים.

לפיכך, ניתן לכפול בין הבסיסים ולהעלות את התוצאה בחזקת המעריך: $\frac{4^4 \cdot 2^4}{8^3} = \frac{(4 \cdot 2)^4}{8^3} = \frac{(8)^4}{8^3}$.

בחלוקה בין בסיסים זהים ניתן לחסר בין המעריכים ולכן: $\frac{(8)^4}{8^3} = 8^{4-3} = 8^1 = 8$.

דרך נוספת לפתרון היא להשתמש בחוק חזקה של חזקה על מנת להביא את האיברים לבסיס זהה (2):

$$\frac{4^4 \cdot 2^4}{8^3} = \frac{(2^2)^4 \cdot 2^4}{(2^3)^3} = \frac{2^{2\cdot 4} \cdot 2^4}{2^{3\cdot 3}} = \frac{2^8 \cdot 2^4}{2^9} = \frac{2^{8+4}}{2^9} = \frac{2^{12}}{2^9} = 2^{12-9} = 2^3 = 8.$$

שאלה לדוגמה - בסיסי חזקות שונים

$$\frac{16^3}{27^2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4 = ?$$

(1) 9 (2) 2 (3) 3 (4) 4

<u>פתרון</u>

לעומת האיברים בביטוי, הערכים בתשובות קטנים ולכן ניתן להסיק כי צמצום הוא אפשרי.

כדי לצמצם נביא את האיברים בביטוי לבסיסים הקטנים ביותר: $\frac{16^3}{27^2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4 = \frac{(2^4)^3}{(3^3)^2} \cdot \left(\frac{(3^2)}{(2^3)}\right)^4$.

כעת, נכפול בין המעריכים: $\frac{(2^4)^3}{(3^3)^2} \cdot \left(\frac{(3^2)}{(2^3)}\right)^4 = \frac{2^{4\cdot 3}}{3^{3\cdot 2}} \cdot \frac{3^{2\cdot 4}}{2^{3\cdot 4}}$.

לאחר ביצוע הכפל נקבל: $\frac{2^{4\cdot 3}}{3^{3\cdot 2}} \cdot \frac{3^{2\cdot 4}}{2^{3\cdot 4}} = \frac{\cancel{2^{12}}}{3^6} \cdot \frac{3^8}{\cancel{2^{12}}} = \frac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2 = 9$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – בסיסי חזקות שונים

$$\frac{32^3\cdot 36^2}{2^3\cdot 4^8\cdot 3^6}=?$$

(1) $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{2}{9}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{1}{3}$

פתרון

תחילה, נביא את האיברים בביטוי לבסיסים הקטנים ביותר: $\frac{32^3\cdot 36^2}{2^3\cdot 4^8\cdot 3^6}=\frac{\left(2^5\right)^3\cdot\left(6^2\right)^2}{2^3\cdot\left(2^2\right)^8\cdot 3^6}$.

לפי החוק חזקה של חזקה, נבצע את הכפל בין המעריכים: $\frac{\left(2^5\right)^3\cdot\left(6^2\right)^2}{2^3\cdot\left(2^2\right)^8\cdot 3^6}=\frac{2^{5\cdot3}\cdot 6^{2\cdot2}}{2^3\cdot 2^{2\cdot8}\cdot 3^6}=\frac{2^{15}\cdot 6^4}{2^3\cdot 2^{16}\cdot 3^6}$.

6 הוא מכפלה של 3 ו-2, ועל כן ניתן לבצע את הפעולה הבאה: $6^4=\left(2\cdot3\right)^4=2^4\cdot3^4$.

לפיכך: $\frac{2^{15}\cdot 2^4\cdot 3^4}{2^3\cdot 2^{16}\cdot 3^6}$. כעת, נחבר בין המעריכים במונה ובמכנה: $\frac{2^{15}\cdot 2^4\cdot 3^4}{2^3\cdot 2^{16}\cdot 3^6}=\frac{2^{15+4}\cdot 3^4}{2^{3+16}\cdot 3^6}=\frac{\cancel{2^{19}}\cdot 3^4}{\cancel{2^{19}}\cdot 3^6}=\frac{3^4}{3^6}$.

בחלוקה בין בסיסים זהים ניתן לחסר בין המעריכים: $3^{4-6}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

התשובה הנכונה היא (1).

חזקה עם מעריך שלילי

✓ **כלל:** בסיס בחזקת מעריך שלילי שווה ל-1 חלקי הבסיס באותו מעריך - אך **חיובי**.

לפיכך: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

✓ **כלל:** שבר בחזקת מעריך שלילי שווה להופכי של אותו שבר בחזקת אותו מעריך - אך **חיובי**.

לפיכך: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{(-5)^{-3}}{(-3)^{-4}}=?$$

משום שהן המונה והן המכנה "מתהפכים", ניתן להציג את הביטוי כך: $\frac{(-5)^{-3}}{(-3)^{-4}}=\frac{(-3)^{4}}{(-5)^{3}}$.

שימו לב: גם אם איננו זוכרים להפוך את השבר ואת המעריכים לחיוביים, אנו תמיד יכולים לעבוד באופן מסודר עם הכלל הראשון: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

לפיו, ניתן לכתוב את המונה כך: $(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}$.

כמו כן את המכנה ניתן לכתוב כך: $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}$.

אם כן: $\frac{(-5)^{-3}}{(-3)^{-4}}=\frac{\frac{1}{(-5)^3}}{\frac{1}{(-3)^4}}=\frac{1}{(-5)^3}\cdot\frac{(-3)^4}{1}=\frac{(-3)^4}{(-5)^3}=\frac{81}{-125}=-\frac{81}{125}$.

שאלה לדוגמה - חזקה עם מעריך

נתון: $a = x^{-1}$, $0 < x$

$b = x^{-2}$

$$\frac{a \cdot b}{\frac{a}{b}} = ?$$

(1) a (2) a^4 (3) b (4) b^4

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

ראשית, נפשט את a ו-b לפי הכללים שנלמדו בשיעור: $a = \frac{1}{x}$ ו- $b = \frac{1}{x^2}$. שימו לב כי את הביטוי המבוקש ניתן לפשט:

$\frac{a \cdot b}{\frac{a}{b}} = \cancel{a} \cdot b \cdot \frac{b}{\cancel{a}} = b^2$. התשובות הן בהכרח לא (3) או (4), שכן הן אינן שוות ל- b^2, ולכן ניתן להסיק כי התשובה היא (1) או (2).

אנו מחפשים את ערכו של b^2, ולכן נעלה את b בריבוע: $(b)^2 = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{x^4}$. אם כן, ערכו של הביטוי המבוקש הוא $\frac{1}{x^4}$.

כדי לבטא את ערכו של הביטוי באמצעות a (אשר שווה ל- $\frac{1}{x}$), עלינו להעלותו ברביעית: $(a)^4 = \left(\frac{1}{x}\right)^4 \Rightarrow a^4 = \frac{1}{x^4}$.

דרך ב' - הצבת מספרים:

ערכו של הביטוי תלוי בערכו של x, ולכן ניתן להציב מספר במקום x. לאחר התבוננות בתשובות ניתן להסיק כי מוטב שלא להציב $x = 1$, שכן ייתכן כי לא נוכל לפסול 3 תשובות. לפיכך, נציב $x = 2$. לפי הצבה זו, ערכו של a הוא: $a = \frac{1}{x} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ וערכו של b הוא: $b = \frac{1}{x^2} \Rightarrow b = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. כעת, נציב את ערכם של a ושל b בביטוי המבוקש. כדי לעבוד בצורה מסודרת, נציב את ערכם במונה ולאחר שנפשט את התוצאה, נציב את ערכם במכנה. המונה: $a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. המכנה: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$.

לפיכך: $\frac{a \cdot b}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. כעת, נציב $a = \frac{1}{2}$ ו- $b = \frac{1}{4}$ בתשובות ונפסול את אלו שערכן אינו $\frac{1}{16}$:

תשובה (1): $a = \frac{1}{2}$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = a^4$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $b = \frac{1}{4}$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = b^4$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

משוואה מעריכית

חשוב להקדים ולומר כי משוואה מעריכית אינה בחומר הבחינה, אולם העיקרון שבבסיסה עשוי להופיע בשאלות מסוימות.
לרוב, העיקרון יסתכם בכלל הבא:

✓ **כלל:** כאשר מתקיים שוויון בין שני אגפים בהם הבסיסים זהים, ניתן להסיק כי מתקיים שוויון בין המעריכים של הבסיסים גם כן.

לפיכך: אם $a^b = a^c$, אזי $b = c$.

<u>לדוגמה:</u>

$2^x = 2^4$

לפי הכלל אשר מופיע לעיל, כאשר אנו מזהים משוואה בה אגפים שווים ובסיסים זהים, ניתן ליצור משוואה בין מעריכי הבסיסים:
$x = 4$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$4^x = 2^6$.

בדוגמה הזו, כדי ליישם את הכלל אשר למדנו, נביא את האגף השמאלי לבסיס זהה לשל זה באגף הימני: $4^x = 2^6 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = 2^6$.

לפי החוק חזקה של חזקה: $\left(2^2\right)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{2x} = 2^6$.

לפי הכלל אשר נלמד לעיל: $2x = 6$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x = 3$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$3^{x-1} = 27^2$.

באופן זהה לדוגמה הקודמת, נביא את האיבר באגף הימני לבסיס זהה לשל זה באגף השמאלי: $3^{x-1} = 27^2 \Rightarrow 3^{x-1} = \left(3^3\right)^2$.

לפי החוק חזקה של חזקה: $3^{x-1} = \left(3^3\right)^2 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^{3 \cdot 2} \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6$.

לפי הכלל אשר נלמד לעיל: $x - 1 = 6$.

נעביר את (1-) אגף ונקבל: $x = 7$.

שאלה לדוגמה – משוואה מעריכית

נתון: $4^{x-4}=8^2$

$x=?$

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

פתרון

דרך א' – פתרון אלגברי:

כדי שנוכל להשוות בין המעריכים, נביא את האיברים בשני האגפים לבסיס זהה (2): $4^{x-4}=8^2 \Rightarrow \left(2^2\right)^{x-4}=\left(2^3\right)^2$.

לפי חוק חזקה של חזקה נכפול בין המעריכים: $\left(2^2\right)^{x-4}=\left(2^3\right)^2 \Rightarrow 2^{2x-8}=2^6$. כעת, נשווה בין המעריכים: $2x-8=6$.

נעביר את (8-) אגף: $2x=14$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x=7$.

דרך ב' – בדיקת תשובות:

כיוון שמדובר במספרים קטנים יחסית, נוכל לבדוק לפי איזו תשובה מתקיים שוויון בין האגפים:

תשובה (1): $4^{x-4}=8^2 \Rightarrow 4^{5-4}=8^2$. לאחר פישוט: $4^1=8^2 \Rightarrow 4\neq 64$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $4^{x-4}=8^2 \Rightarrow 4^{6-4}=8^2$. לאחר פישוט: $4^2=8^2 \Rightarrow 16\neq 64$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $4^{x-4}=8^2 \Rightarrow 4^{7-4}=8^2$. לאחר פישוט: $4^3=8^2 \Rightarrow 64=64$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $4^{x-4}=8^2 \Rightarrow 4^{8-4}=8^2$. לאחר פישוט: $4^4=8^2 \Rightarrow 256\neq 64$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – משוואה מעריכית

נתון: $x^{13}=8^3\cdot 4^2$

$x=?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון

בשאלה הזו אנו רואים שאין דרך להביא את האגפים לבסיס זהה, שכן איננו יודעים את ערכו של x.

לפיכך, נביא למצב בו המעריכים זהים על ידי המרת הבסיסים: $x^{13}=8^3\cdot 4^2 \Rightarrow x^{13}=\left(2^3\right)^3\cdot\left(2^2\right)^2$.

נכפול בין המעריכים: $x^{13}=\left(2^3\right)^3\cdot\left(2^2\right)^2 \Rightarrow x^{13}=2^{3\cdot 3}\cdot 2^{2\cdot 2}$.

לאחר ביצוע הכפל: $x^{13}=2^9\cdot 2^4$. כעת, נחבר בין המעריכים: $x^{13}=2^{9+4} \Rightarrow x^{13}=2^{13}$.

שימו לב כי הכלל שנלמד בשיעור תקף גם הפוך – כאשר מתקיים שוויון בין שני אגפים בהם המעריכים זהים ואי-זוגיים, ניתן להסיק כי מתקיים שוויון בין הבסיסים גם כן. לפיכך: $x=2$.

התשובה הנכונה היא (2).

מעבר בין חזקה לשורש

✓ **כלל:** $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$, $0<m,a$.

ניתן להמיר שורש לחזקה באופן הבא - **סדר השורש** (m) יהפוך להיות **מכנה** המעריך החדש, ואילו **מעריך השורש** (n) יהפוך להיות **מונה** המעריך החדש.

ראוי להזכיר כי כאשר לא מופיע סדר, מדובר בסדר 2. לדוגמה: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \left(\sqrt[2]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{2}}$.

כמו כן, אין חשיבות למיקומו של מעריך השורש (n) - התוצאה שתתקבל זהה בין אם הוא מתחת לשורש ובין אם הוא מחוץ לסוגריים. לדוגמה: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(\sqrt[m]{a^n}\right) = a^{\frac{n}{m}}$.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt[6]{8^{12}} = ?$

לפי החוק שנלמד לעיל, ניתן להמיר את הביטוי לחזקה כך: $\sqrt[6]{8^{12}} = 8^{\frac{12}{6}} = 8^2 = 64$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x}} = 3$$

נמיר את המכנה לביטוי עם חזקה לפי הכלל שלעיל: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = 3$.

בחילוק בין בסיסים זהים ניתן לחסר בין המעריכים: $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3 \Rightarrow x^{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}} = 3$.

לאחר ביצוע החיסור: $x^{\frac{1}{4}} = 3$. כדי למצוא את x, אנו יכולים לפעול בשתי דרכים:

1. להעלות את שני אגפי המשוואה בחזקת 4: $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (3)^4 \Rightarrow x^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 81$.

לאחר ביצוע הכפל: $x = 81$.

2. להמיר את החזקה בשבר לשורש: $x^{\frac{1}{4}} = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 3$.

כעת, לענות על השאלה: שורש רביעי של איזה מספר יניב 3. התשובה היא 81.

אגב, חשוב לציין כי כאשר הגענו למשוואה $x^{\frac{1}{4}} = 3$, ניתן להיעזר בתשובות ולבדוק איזו מהן היא הערך המתאים של x.

שאלה לדוגמה - מעבר בין חזקה לשורש

נתון: $\sqrt[5]{a^{3x}}=a^6$

$x=?$

(1) 10 (2) 12 (3) 6 (4) 8

<u>פתרון</u>

ניתן לשים לב כי הבסיס בשני האגפים זהה (a). כדי שיהיה נוח יותר להשוות בין המעריכים, נהפוך את השורש לחזקה: $\sqrt[5]{a^{3x}}=a^{\frac{3x}{5}}$.

אם כן: $a^{\frac{3x}{5}}=a^6$. נזכיר כי כאשר מתקיים שוויון בין האגפים והבסיסים בהם זהים, ניתן להשוות בין המעריכים: $\frac{3x}{5}=6$.

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-5 ונקבל: $3x=30$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x=10$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - מעבר בין חזקה לשורש

נתון: $\frac{y^{\frac{x+1}{3}}}{\sqrt[3]{y}}=3$, $y\neq 0$

$y^x=?$

(1) 9 (2) $\sqrt{3}$ (3) 3 (4) 27

<u>פתרון</u>

הבסיס במונה ובמכנה השבר זהה (y). כדי שנוכל לחסר בין המעריכים, נהפוך את המכנה לחזקה: $\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}}$.

אם כן: $\frac{y^{\frac{x+1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}=3$. כעת, נחסר בין המעריכים: $y^{\frac{x+1}{3}-\frac{1}{3}}=3\Rightarrow y^{\frac{x+1-1}{3}}=3$. לאחר כינוס איברים דומים במעריך: $y^{\frac{x}{3}}=3$.

כדי למצוא את הביטוי המבוקש, נעלה את שני אגפי המשוואה בשלישית שכן $\left(y^{\frac{x}{3}}\right)^3=y^{\frac{x}{3}\cdot 3}=y^x$:

$\left(y^{\frac{x}{3}}\right)^3=(3)^3\Rightarrow y^x=27$.

התשובה הנכונה היא (4).

פירוק שורשים

פירוק שורשים הוא הצגה שונה של ערך אשר נמצא בתוך שורש.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt{45}$

ייתכן שלאחר פישוט של שאלה מסוימת נגיע לערך של $\sqrt{45}$, אך הוא לא יופיע בתשובות, ולכן חשוב להכיר כיצד יש לבצע פירוק.

45 הוא מכפלה של 9 ו-5, ועל כן ניתן להציג אותו כך: $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}$.

כאשר מכפלה נמצאת בתוך שורש, אנו יכולים להפריד את הגורמים בה תחת סימנים נפרדים כך: $\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$.

$\sqrt{9}=3$ ולכן: $\sqrt{45}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\cdot\sqrt{5}$.

אגב, ניתן ליישם את העיקרון גם בצורה ההפוכה. כלומר, אם הגענו לתשובה סופית $3\cdot\sqrt{5}$, עלינו לזכור כי $\sqrt{9}=3$, ולכן:

$3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

בדוגמאות מסוימות, ייתכן שיהיו מספר דרכים לפרק את המספר שבשורש.

$\sqrt{72}$

כאשר נידרש לפרק את $\sqrt{72}$, ככל הנראה יהיה מדובר באחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 8}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}=3\cdot\sqrt{8}$.

למותר לציין שערכן של שתי התוצאות זהה, שהרי את $3\cdot\sqrt{8}$ ניתן להציג כך: $3\cdot\sqrt{8}=3\cdot\sqrt{4\cdot 2}=3\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

כדי לדעת איזה פירוק מוטב לעשות כדי להגיע לתשובה הנכונה, עלינו להיעזר בנתוני השאלה ובתשובות.

שאלה לדוגמה - פירוק שורשים

$\frac{\sqrt{50}}{5}=?$

(1) $\sqrt{10}$ (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $2\sqrt{10}$

<u>פתרון</u>

כדי שניתן יהיה לצמצם בין המונה למכנה, נפרק את $\sqrt{50}$ כך: $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

אם כן, ניתן להציג את הביטוי המבוקש כך: $\frac{\sqrt{50}}{5}=\frac{5\sqrt{2}}{5}$. לאחר צמצום: $\frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}}=\sqrt{2}$.

<u>שימו לב!</u> ניתן היה להגיע לתוצאה הנכונה גם בפירוק אחר: $\sqrt{50}=\sqrt{10\cdot 5}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}$.

לפי הפירוק הזה: $\frac{\sqrt{50}}{5}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}{5}$. מכיוון ש- $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$ ניתן לכתוב את הביטוי כך: $\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$.

לאחר צמצום: $\frac{\sqrt{10}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - פירוק שורשים

$\frac{36}{\sqrt{6}} = ?$

(1) 6 (2) $2\sqrt{6}$ (3) $6\sqrt{6}$ (4) $\sqrt{12}$

פתרון

36 הוא מכפלה של 6 בעצמו ולכן: $\frac{36}{\sqrt{6}} = \frac{6\cdot6}{\sqrt{6}}$. 6 הוא מכפלה של $\sqrt{6}$ בעצמו ולכן: $\frac{6\cdot6}{\sqrt{6}} = \frac{6\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

לאחר צמצום: $\frac{6\cdot\sqrt{6}\cdot\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{\sqrt{6}}} = 6\cdot\sqrt{6}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שימו לב! ניתן לזכור בעל-פה: כאשר אתם מחלקים מספר ללא שורש במספר תחת שורש, ניתן לחלק את המספר ללא השורש במספר תחת השורש ואת התוצאה לכפול במכנה.

✓ **כלל:** $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\cdot\sqrt{b}$

לדוגמה:

ניתן לזכור ש- $\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, שכן $\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{3}\cdot\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

כדי להבין מאיפה נובע הכלל, נפתור את התרגיל בצורה מפורטת: $\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{4\cdot3}{\sqrt{3}} = \frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{3}$.

דוגמה נוספת:

ניתן לזכור ש- $\frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$, שכן $\frac{30}{\sqrt{10}} = \frac{30}{10}\cdot\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$.

באופן זהה לדוגמה הקודמת: $\frac{30}{\sqrt{10}} = \frac{3\cdot10}{\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{\sqrt{10}}}{\cancel{\sqrt{10}}} = 3\sqrt{10}$.

בסיסי שורש זהים

כאשר אנו מזהים כפל בין בסיסים זהים אשר נמצאים תחת סימן שורש, עלינו לבדוק אם סדר השורש שלהם זהה ושווה 2.
אם סדר השורש זהה ושווה 2, נבטל את סימן השורש. אם לא, נמיר את השורשים לחזקות, ונחבר בין המעריכים כפי שלמדנו קודם.

✓ **כלל:** $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$

הכלל אשר מוצג לעיל נובע מכך: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{1}=a$.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}\cdot\sqrt{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}=?$

על פי הכלל שהוצג לעיל ניתן לקבוע כי: $\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}=29$.

לפיכך: $\sqrt{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}\cdot\sqrt{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}=\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}=29$.

קבענו תחילה כי יש לשים לב לסדר השורש.
זאת, משום שכאשר אנו מזהים כפל בין בסיסים זהים תחת שורש, אך סדר השורש שונה - הכלל שהוצג לעיל אינו תקף.
הדרך הטובה ביותר להתמודד עם דוגמה כזו, לדעתנו, היא להמיר את השורשים לחזקות ולחבר את המעריכים שלהן לפי הכללים שאנו מכירים.

<u>לדוגמה - בסיסם זהים ומעריכים שונים:</u>

$\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}=?$

כאמור, מוטב להמיר את השורשים לחזקות: $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{3}}$.

כעת, נחבר בין המעריכים: $x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}}=x^{\frac{7}{12}}$.

שימו לב כי את התוצאה שקיבלנו ניתן לכתוב גם כך: $x^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{x^{7}}$.

שאלה לדוגמה - בסיסי שורש זהים

$\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}=?$

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $3^{\frac{1}{2}}$ (3) $3^{\frac{3}{4}}$ (4) $3^{\frac{1}{4}}$

<u>פתרון</u>

משום שרוב התשובות הן בחזקות, נתחיל מהמרת השורשים לחזקות: $\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{3\cdot3^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3^{1}\cdot3^{\frac{1}{2}}}$.

בכפל בין בסיסים זהים, ניתן לחבר בין המעריכים: $\sqrt{3^{1}\cdot3^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3^{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{3^{\frac{3}{2}}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

נכפול בין המעריכים: $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – בסיסי שורש זהים

$\sqrt[5]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = ?$

(1) $\sqrt[6]{x}$ (2) $\sqrt[2]{x}$ (3) $\sqrt[3]{x}$ (4) $\sqrt[4]{x}$

פתרון

אנו סבורים כי עבודה עם חזקות נוחה יותר, ולכן נמיר את השורשים לחזקות: $\sqrt[5]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}$.

בכפל בין בסיסים זהים, ניתן לחבר בין המעריכים: $\sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{5}{6}}} = \left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}$.

נכפול בין המעריכים: $\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{\cancel{5}}{6}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$.

בדומה לחוק חזקה של חזקה, בביטוי עם שורש של שורש ניתן לכפול בין סדר השורשים. התוצאה שתתקבל תהיה סדר הבסיס.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} = \sqrt[3\cdot2]{x} = \sqrt[6]{x}$.

כדי להבין את מקורו של החוק, נמיר את החזקות לשורשים: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$.

לאור האמור לעיל, <u>**ניתן היה לפתור את התרגיל גם כך:**</u>

נוציא שורש חמישי לכל אחד מהאיברים בנפרד כך: $\sqrt[5]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$.

על פי הכלל שלמדנו זה עתה, נכפול בין סדר השורשים: $\sqrt[5]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5\cdot2]{x}\cdot\sqrt[5\cdot3]{x} = \sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[15]{x}$.

כעת, נמיר את השורשים לחזקות על מנת שנוכל לחבר בין המעריכים: $\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[15]{x} = x^{\frac{1}{10}}\cdot x^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} = x^{\frac{3}{30}+\frac{2}{30}} = x^{\frac{5}{30}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$.

התשובה הנכונה היא (1).

✓ **כלל:** בביטוי עם שורש של שורש ניתן לכפול בין סדר השורשים. התוצאה שתתקבל תהיה סדר השורש.

לפיכך: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$.

בסיסי שורש שונים

✓ **כלל:** בכפל בין שורשים מסדר זהה ניתן לכפול בין הבסיסים אשר בתוך השורש ולהוציא לתוצאה שורש מאותו הסדר.
לפיכך: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

✓ **כלל:** בחילוק בין שורשים מסדר זהה ניתן לחלק בין הבסיסים אשר בתוך השורש ולהוציא למנה שורש מאותו הסדר.
לפיכך: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{5}}=?$$

לפי הכללים שלמדנו לעיל, ניתן לכתוב את $\sqrt{\frac{8}{5}}$ כך: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$.

לפיכך: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

לפי הכללים שלמדנו לעיל, ניתן לכתוב את $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ כך: $\sqrt{\frac{8}{2}}$.

$$\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2.$$

שאלה לדוגמה - בסיסי שורש שונים

$$4\cdot\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}=?$$

(1) 16 (2) 24 (3) 32 (4) 8

<u>פתרון</u>

$\sqrt[3]{64}=4$ וכן $\sqrt[3]{8}=2$. לפיכך: $4\cdot\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}=4\cdot\frac{4}{2}=\frac{16}{2}=8$.

<u>דרך פתרון נוספת</u>

בחילוק בין שורשים מסדר זהה ניתן לחלק בין הבסיסים אשר בתוך השורש ולהוציא למנה שורש מאותו הסדר.
לפיכך: $4\cdot\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}=4\cdot\sqrt[3]{\frac{64}{8}}=4\cdot\sqrt[3]{8}=4\cdot2=8$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – בסיסי שורש שונים

$\sqrt{8x}\cdot\sqrt{8y}=?$

(1) $64\sqrt{xy}$

(2) $8xy$

(3) $8\sqrt{xy}$

(4) $2xy\sqrt{8}$

פתרון

משום שסדר השורשים זהה, ניתן לבצע ביניהם כפל: $\sqrt{8x}\cdot\sqrt{8y}=\sqrt{8x\cdot 8y}=\sqrt{64xy}$.

את הביטוי שקיבלנו ניתן להציג כך: $\sqrt{64xy}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{xy}$.

$\sqrt{64}=8$ ולכן: $\sqrt{64}\cdot\sqrt{xy}=8\cdot\sqrt{xy}$.

דרך פתרון נוספת

את הביטוי המבוקש ניתן להציג כך: $\sqrt{8x}\cdot\sqrt{8y}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{y}$.

בכפל אין חשיבות לסדר האיברים ולכן: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$.

$\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}=8$ ולכן: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=8\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=8\sqrt{xy}$.

דרך פתרון נוספת – הצבת מספרים:

משום שהנעלמים שבשאלה מופיעים גם בתשובות, ניתן להציב מספרים נוחים ולפסול תשובות.

נציב $x=2$ ו- $y=2$ בביטוי: $\sqrt{8x}\cdot\sqrt{8y}=\sqrt{8\cdot 2}\cdot\sqrt{8\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{16}=16$.

כעת, נציב $x=2$ ו- $y=2$ בתשובות, **ונפסול** את אלו שערכן **אינו** 16:

תשובה (1): $64\sqrt{xy}=64\sqrt{2\cdot 2}=64\cdot\sqrt{4}=64\cdot 2=128$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $8xy=8\cdot 2\cdot 2=32$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $8\sqrt{xy}=8\sqrt{2\cdot 2}=8\sqrt{4}=8\cdot 2=16$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $2xy\sqrt{8}=2\cdot 2\cdot 2\sqrt{8}=8\sqrt{8}\neq 16$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

הוצאת גורם משותף

עד כה עסקנו בשאלות אשר כללו פעולות של כפל ושל חילוק, כך שיכולנו להשתמש בחוקי חזקות ובחוקי שורשים.
אפשר שיופיעו שאלות בנושא חזקות ושורשים אשר יכללו פעולות של חיבור ושל חיסור, וכדי לפתור אותן נצטרך להוציא **גורם משותף**.

לדוגמה:

$\frac{3^{x+1}-3^x}{2}=?$.

במונה הביטוי יש סימן של חיסור, ולכן לא ניתן להשתמש בחוקי החזקות כדי לפשט אותו.

לפיכך, נחפש גורם משותף אשר ניתן להוציא. $3^{x+1}=3^x\cdot 3^1$ ולכן ניתן להציג את הביטוי כך: $\frac{3^{x+1}-3^x}{2}=\frac{3^x\cdot 3^1-3^x}{2}$.

כעת, אנו יכולים להוציא גורם משותף 3^x במונה השבר: $\frac{3^x\cdot 3^1-3^x}{2}=\frac{3^x\left(3^1-1\right)}{2}=\frac{3^x(3-1)}{2}=\frac{3^x(\cancel{2})}{\cancel{2}}=3^x$.

דוגמה נוספת:

$\frac{\sqrt{24}+\sqrt{6}}{3}=?$.

בדומה לדוגמה הקודמת, אין בביטוי סימן של כפל או של חילוק, ולכן לא ניתן להשתמש בחוקי השורשים כדי לפשט אותו.
לפיכך, נחפש גורם משותף אשר ניתן להוציא.

$\sqrt{24}=\sqrt{6\cdot 4}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}$ ולכן ניתן להציג את הביטוי כך: $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{6}}{3}$.

כעת, אנו יכולים להוציא גורם משותף $\sqrt{6}$ במונה השבר: $\frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{4}+1\right)}{3}=\frac{\sqrt{6}\cdot(2+1)}{3}=\frac{\sqrt{6}\cdot(\cancel{3})}{\cancel{3}}=\sqrt{6}$.

לסיכום, בשאלות חזקות ושורשים הכוללות סימן חיבור או חיסור, ננסה לחפש גורם משותף אשר באמצעותו ניתן לפשט את הביטוי.

שאלה לדוגמה - הוצאת גורם משותף

$\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=?$

(1) $\sqrt{3}+1$ (2) $\sqrt{2}+3$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

פתרון

בין האיברים במונה ובמכנה יש סימן חיבור, ולכן נחפש גורם משותף שניתן להוציא. נפרק את האיברים במכנה הביטוי:
$\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}$. כעת, נוציא גורם משותף $\sqrt{4}$ במכנה: $\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

נפרק את האיברים במונה הביטוי: $\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

כעת, נוציא גורם משותף $\sqrt{3}$ במונה: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\cancel{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{4}\left(\cancel{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – הוצאת גורם

נתון: $0<x$

$$\frac{x^{\frac{n}{3}}+x^n}{1+x^{\frac{2n}{3}}}=?$$

(1) $x^{\frac{n}{3}}$ (2) $x^{\frac{2n}{3}}$ (3) $1+x^{\frac{2n}{3}}$ (4) $1+x^n$

פתרון

דרך א' – פתרון אלגברי:

בין האיברים במונה ובמכנה יש סימן חיבור, ועל כן נחפש גורם משותף שניתן להוציא. ממבט ראשוני במכנה הביטוי לא נראה שיש קשר בין האיברים כמו גם גורם משותף שניתן להוציא. לעומת זאת, במונה הביטוי נראה שישנו קשר בין האיברים.

את x^n ניתן להציג כך: $x^n=x^{\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}}=x^{\frac{n}{3}}\cdot x^{\frac{2n}{3}}$. אם כן: $\frac{x^{\frac{n}{3}}+x^{\frac{n}{3}}\cdot x^{\frac{2n}{3}}}{1+x^{\frac{2n}{3}}}=\frac{x^{\frac{n}{3}}+x^n}{1+x^{\frac{2n}{3}}}$.

כעת, נוציא גורם משותף $x^{\frac{n}{3}}$ במונה הביטוי ונצמצם את הביטוי בסוגריים: $x^{\frac{n}{3}}=\frac{x^{\frac{n}{3}}\left(\cancel{1+x^{\frac{2n}{3}}}\right)}{\cancel{1+x^{\frac{2n}{3}}}}$.

דרך ב' – הצבת מספרים:

התשובות תלויות בנעלמים בשאלה, ולכן ניתן להציב מספרים נוחים. נציב $x=2$. כמו כן, בשני השברים שבהם n נמצא, מכנה השבר הוא 3. לפיכך, נציב $n=3$. לפי הצבה זו: $2=\frac{10}{5}=\frac{10}{1+4}=\frac{2^1+8}{1+2^2}=\frac{2^{\frac{3}{3}}+2^3}{1+2^{\frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}}}=\frac{x^{\frac{n}{3}}+x^n}{1+x^{\frac{2n}{3}}}$.

כעת, נציב $x=2$ ו-$n=3$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן **אינו** 2:

תשובה (1): $x^{\frac{n}{3}}=2^{\frac{3}{3}}=2^1=2$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): $x^{\frac{2n}{3}}=2^{\frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}}=2^2=4$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $1+x^{\frac{2n}{3}}=1+2^{\frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}}=1+2^2=1+4=5$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $1+x^n=1+2^3=1+8=9$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

הערכת סדר גודל

הנושא האחרון בשיעור חזקות ושורשים הוא מעין "גלגל הצלה".
כאשר לא הצלחנו לפשט ביטוי מסוים, ניתן להיעזר ב**הערכת סדר גודל**.
השורשים הנפוצים שאת ערכם אנו ממליצים לזכור בעל-פה (בקירוב):

$\sqrt{2} = 1.4$

$\sqrt{3} = 1.7$

$\sqrt{5} = 2.2$

אם, למשל, נכפול ערך מסוים ב- $\sqrt{2}$, אנו יכולים לכפול את אותו ערך ב-1.5 ולזכור שהכפלה ב- $\sqrt{2}$ תניב תוצאה קטנה יותר.

<u>לדוגמה:</u>

$2\sqrt{2} = ?$

אנו יודעים כי $2 \cdot 1.5 = 3$. לפיכך, ניתן לקבוע כי ערכו של $2\sqrt{2}$ קטן במעט מ-3.

כך גם לגבי $\sqrt{3}$ - גדול במעט מ-1.5, וכן לגבי $\sqrt{5}$ - גדול במעט מ-2.

אגב, על ידי זכירת ערכם של השורשים הנפוצים בעל-פה, ניתן לקבוע בקירוב את ערכם של שורשים אחרים.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt{12}$

אנו זוכרים כי $\sqrt{9} = 3$ וכן כי $\sqrt{16} = 4$. לפיכך, $\sqrt{12}$ הוא ערך אשר גדול מ-3 וקטן מ-4.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$\sqrt{75}$

אנו זוכרים כי $\sqrt{81} = 9$ וכן כי $\sqrt{64} = 8$. לפיכך, $\sqrt{75}$ הוא ערך אשר גדול מ-8 וקטן מ-9.

שאלה לדוגמה - הערכת סדר גודל

$\frac{\sqrt{96}+16}{2}=?$

(1) 24 (2) $\sqrt{24}+8$ (3) $4\sqrt{6}+8$ (4) $\sqrt{13}+4$

פתרון

דרך א' - הערכת סדר גודל:

אנו יודעים כי $\sqrt{100}=10$ ולכן $\sqrt{96}$ קטן במעט מ-10. לפיכך, ערכו של המונה ($\sqrt{96}+16$) קטן במעט מ-26 ($10+16$).

אם כן, חלוקה שלו ב-2 תניב תוצאה אשר קטנה במעט מ-13 ($\frac{26}{2}=13$). כעת, נבדוק איזו תשובה שווה **בקירוב** ל-13:

תשובה (1): 24 גדול מ-13. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\sqrt{24}$ קטן במעט מ-5 ($\sqrt{25}$). לפיכך, ערכה של התשובה הזו קטן במעט מ-13 ($5+8$).

תשובה (3): $\sqrt{6}$ גדול מ-2 ($\sqrt{4}$) וקטן מ-3 ($\sqrt{9}$).

לפיכך, $4\sqrt{6}$ גדול במעט מ-8 ($4\cdot 2$). אם כן, ערכה של תשובה זו גדול במעט מ-16 ($8+8$). התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\sqrt{13}$ גדול מ-3 ($\sqrt{9}$) וקטן מ-4 ($\sqrt{16}$). לפיכך, ערכה של תשובה זו קטן במעט מ-8. התשובה נפסלת.

דרך ב' - פתרון אלגברי:

בכל התשובות אין מכנה, ולכן נחפש דרך להיפטר מ-2 במכנה. אנו יודעים כי $\sqrt{96}=\sqrt{16\cdot 6}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{6}$.

לפיכך: $\frac{\sqrt{96}+16}{2}=\frac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{6}+16}{2}=\frac{4\cdot\sqrt{6}+16}{2}$. נוציא גורם משותף 2 במונה הביטוי: $\frac{4\cdot\sqrt{6}+16}{2}=\frac{\cancel{2}\left(2\sqrt{6}+8\right)}{\cancel{2}}=2\sqrt{6}+8$

משום ש- $2=\sqrt{4}$ ניתן לקבוע כי: $2\sqrt{6}+8=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}+8=\sqrt{4\cdot 6}+8=\sqrt{24}+8$.

דרך פתרון נוספת - פירוק מונים:

מי מאיתנו שזיהה ש- $\frac{16}{2}=8$, ניתן היה לפרק מונים: $\frac{\sqrt{96}+16}{2}=\frac{\sqrt{96}}{2}+\frac{16}{2}=\frac{\sqrt{96}}{2}+8$.

כדי להיפטר מ-2 שבמכנה, נפרק את $\sqrt{96}$ ונקבל: $\sqrt{96}=\sqrt{24\cdot 4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{24}=2\cdot\sqrt{24}$.

לפיכך: $\frac{\sqrt{96}}{2}+8=\frac{\cancel{2}\sqrt{24}}{\cancel{2}}+8=\sqrt{24}+8$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - הערכת סדר גודל

$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=?$

(1) $\sqrt{3}+1$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $3-\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{3}-3$

פתרון

דרך א' - הערכת סדר גודל:

בשיעור למדנו כי $\sqrt{3}=1.7$ בקירוב. לפיכך, $\frac{1.7}{3.7}\approx\frac{1.7}{2+1.7}\approx\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

קיבלנו ביטוי אשר קטן במעט מ- $\frac{1}{2}$. כעת, נבדוק איזו תשובה קטנה במעט מ- $\frac{1}{2}$ גם כן:

תשובה (1): $\sqrt{3}+1\approx 1.7+1\approx 2.7$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $2\sqrt{3}\approx 2\cdot 1.7\approx 3.4$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $3-\sqrt{3}\approx 3-1.7\approx 1.3$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $2\sqrt{3}-3\approx 2\cdot 1.7-3\approx 3.4-3\approx 0.4$. זו התשובה הנכונה.

דרך ב' - פתרון אלגברי:

חשוב לציין כי השאלה הזו היא שאלת קצה, והפישוט האלגברי שלה לא אינטואיטיבי כלל.
באף אחת מן התשובות אין מכנה, ולכן ניתן להסיק כי עלינו להיפטר ממנו.
כדי לעשות כן נכפול את המונה והמכנה ב-($2-\sqrt{3}$):

$$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}.$$

נבצע את הכפל במונה, ונפתח את המכנה באמצעות נוסחת הכפל המקוצר:

$$\frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4-3}=2\sqrt{3}-3.$$

התשובה הנכונה היא (4).

סיכום

מטרת העל שלנו בשאלות חזקות ושורשים היא להביא את האיברים בהן "לדבר באותה שפה".
כלומר, להמיר את האיברים למצב בו הבסיסים ו/או המעריכים שלהם זהים, כך שניתן יהיה להחיל עליהם את חוקי החזקות והשורשים.

1. **בסיסי חזקות זהים:**

- **בכפל** בין בסיסים זהים ניתן **לחבר** בין המעריכים שלהם: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- **בחילוק** בין בסיסים זהים ניתן לחסר את מעריך הבסיס במכנה ממעריך הבסיס במונה: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

2. **חזקה של חזקה:**

- בביטוי שבו חזקה של חזקה ניתן לכפול בין המעריכים ולהעלות את הבסיס בחזקת התוצאה: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

3. **בסיסי חזקות שונים:**

- בכפל בין בסיסים בעלי מעריך זהה ניתן לכפול בין הבסיסים ולהעלות את התוצאה בחזקת המעריך: $a^m \cdot b^m = (a\cdot b)^m$.
- בחילוק בין בסיסים בעלי מעריך זהה ניתן לחלק בין הבסיסים ולהעלות את המנה בחזקת המעריך: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

4. **בסיסי חזקות שונים:**

- בסיס בחזקת מעריך שלילי שווה ל-1 חלקי הבסיס באותו מעריך - אך **חיובי**: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- שבר בחזקת מעריך שלילי שווה להופכי של אותו שבר בחזקת אותו מעריך - אך **חיובי**: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

5. **משוואה מעריכית:**

- כאשר מתקיים שוויון בין שני אגפים בהם הבסיסים זהים, ניתן להסיק כי מתקיים שוויון בין המעריכים של הבסיסים גם כן: אם $a^b = a^c$, אזי $b = c$.

6. **מעבר בין חזקה לשורש:**

- ניתן להמיר שורש לחזקה באופן הבא - **סדר השורש** (m) יהפוך להיות **מכנה** המעריך החדש, ואילו **מעריך השורש** (n) יהפוך להיות **מונה** המעריך החדש: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$.
- ראוי להזכיר כי כאשר לא מופיע סדר, מדובר בסדר 2. לדוגמה: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \left(\sqrt[2]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{2}}$.

כמו כן, אין חשיבות למיקומו של מעריך השורש (n) - התוצאה שתתקבל זהה בין אם הוא מתחת לשורש ובין אם הוא מחוץ לסוגריים. לדוגמה: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(\sqrt[m]{a^n}\right) = a^{\frac{n}{m}}$.

7. פירוק שורשים:

- זכרו כי לעיתים פישוט נכון של התרגיל עשוי שלא להוביל אותנו לביטוי בתשובה. אם איננו מזהים את התשובה, ייתכן כי עלינו לבצע פירוק שורשים.
- כאשר אתם מחלקים מספר ללא שורש במספר תחת שורש, ניתן לחלק את המספר ללא השורש במספר תחת השורש ואת התוצאה לכפול במכנה: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b}$.

8. בסיסי שורש זהים:

- בכפל בין בסיסים זהים אשר נמצאים תחת שורש מסדר 2 יתקבל הבסיס ללא השורש: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.
- בכפל בין בסיסים זהים אשר לא נמצאים תחת שורש מסדר 2, נמיר את השורש לחזקה ונפתור את השאלה באמצעות הכללים שאנו מכירים. לדוגמה: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$.
- בביטוי עם שורש של שורש ניתן לכפול בין סדר השורשים. התוצאה שתתקבל תהיה סדר השורש: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

9. בסיסי שורש שונים:

- בכפל בין שורשים מסדר זהה ניתן לכפול בין הבסיסים אשר בתוך השורש ולהוציא לתוצאה שורש מאותו הסדר: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.
- בחילוק בין שורשים מסדר זהה ניתן לחלק בין הבסיסים אשר בתוך השורש ולהוציא למנה שורש מאותו הסדר: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

10. הוצאת גורם משותף:

- כאשר לא ניתן לבצע כפל או חילוק בין איברים, כלומר יש ביניהם סימן חיסור או חיבור, נחפש גורם משותף אשר ניתן להוציא.

11. הערכת סדר גודל:

- אם לא הצלחנו לפשט ביטוי מסוים והערכים בו אינם גדולים, ניתן לחשב בקירוב את גודלו כדי למצוא את התשובה הנכונה.
- מומלץ לזכור בעל-פה: $\sqrt{2} = 1.4$; $\sqrt{3} = 1.7$; $\sqrt{5} = 2.2$.
- כמו כן, על ידי זכירת השורשים הנפוצים תוכלו למצוא ערך של שורשים אחרים. לדוגמה:

$\sqrt{56}$: אנו זוכרים כי $\sqrt{49} = 7$ וכן כי $\sqrt{64} = 8$. לפיכך, $\sqrt{56}$ הוא ערך אשר גדול מ-7 וקטן מ-8.

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!