גיאומטריה

ישרים וזוויות

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

ישרים וזוויות

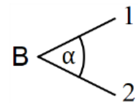
הקדמה וסוגי זוויות

תחילה, חשוב לציין שבסיס הנושא נסקר באופן מקיף מאוד ביסודות. אם אינכם שולטים בבסיס, אנו ממליצים לחזור עליו בטרם המעבר על השיעור הזה.

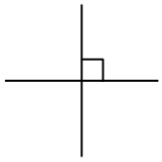
הנושא הבסיסי ביותר בגאומטריה הוא ישרים וזווית, שכן רוב הנושאים שאותם נלמד בהמשך (משולשים, מרובעים, תלת-ממד וכך הלאה) נשענים ברובם על ישרים וזוויות.

לפני שנתחיל לעסוק בליבת הנושא, נחזור על מספר הגדרות בסיסיות:

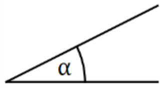
זווית - התחום (α) שנמצא בין שני קווים (1 ו-2) אשר יוצאים מנקודה אחת (B).



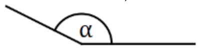
זווית ישרה - זווית בת 90 מעלות. זווית זו מהווה $\frac{1}{4}$ מסך הזוויות סביב נקודה מסוימת במישור ($360°$).



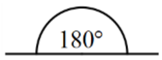
זווית חדה - כל זווית אשר קטנה מ-90 מעלות.



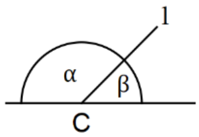
זווית קהה - כל זווית אשר גדולה מ-90 מעלות ואשר קטנה מ-180 מעלות.



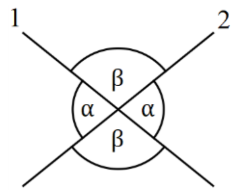
זווית שטוחה - זווית שגודלה 180 מעלות.



זוויות צמודות - כאשר קטע (1) יוצא מנקודה מסוימת (C) על קו ישר, נוצרות שתי זוויות.
זוויות אלו נקראות זוויות צמודות וסכומן שווה ל-180 מעלות ($\alpha+\beta=180°$).



זוויות קדקודיות - זוויות שנוצרות ממפגש של ישרים (1 ו-2) ושאינן צמודות זו לזו (α ו- β).
זוויות קדקודיות שוות זו לזו ($\alpha=\alpha$; $\beta=\beta$).

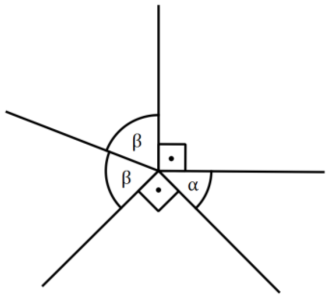


© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה לדוגמה - מבוא לישרים וזוויות

לפי נתוני הסרטוט שלפניכם,

$\beta = ?$



(1) $180° - \alpha$

(2) $180° - \frac{\alpha}{2}$

(3) $90° - \alpha$

(4) $90° - \frac{\alpha}{2}$

<u>**פתרון**</u>

סכום כל הזוויות שנמצאות סביב נקודה מסוימת במרחב הוא $360°$ ולכן: $\beta + \beta + 90° + \alpha + 90° = 360°$.

נכנס איברים דומים: $2\beta + 180° + \alpha = 360°$. משום שנשאלנו על β, נבודד אותו: $2\beta = 180° - \alpha$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180°}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

<u>**דרך פתרון נוספת - הצבת מספרים:**</u>

נציב מספר נוח במקום הזווית α, ולפי הצבה זו, נמצא את ערכה של הזווית β.

לפי הערכה מהסרטוט, נציב $\alpha = 40°$. לפי הצבה זו: $\beta + \beta + 90° + 90° + 40° = 360° \Rightarrow 2\beta = 140°$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $\beta = 70°$.

כעת, נציב $\alpha = 40°$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו $70°$:

תשובה (1): $180° - \alpha = 180° - 40° = 140°$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $180° - \frac{\alpha}{2} = 180° - \frac{40°}{2} = 180° - 20° = 160°$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{40°}{2} = 90° - 20° = 70°$. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

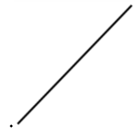
שאלה נוספת - מבוא לישרים וזוויות

מספר נקודות החיתוך שנוצרות על ידי 4 קטעים במישור הוא **לכל היותר** -

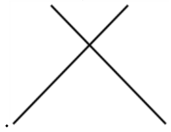
(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 6

<u>פתרון</u>

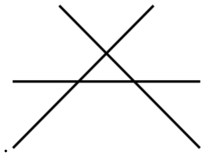
בשאלות גאומטריות ללא סרטוט, מוטב תחילה לייצר אחד בעצמנו. תחילה, נצייר קו אחד במישור:



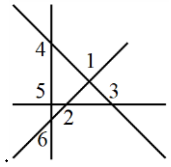
מספר נקודות החיתוך הגדול ביותר שניתן לייצר על ידי הוספת ישר נוסף הוא 1:



על ידי הוספת ישר נוסף נוכל ליצור 2 נקודות חיתוך נוספות:



עד כה הצלחנו ליצור 3 נקודות חיתוך. אם כן, מספר נקודות החיתוך הגדול ביותר שניתן ליצור הוא 6:



התשובה הנכונה היא (4).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה נוספת - מבוא לישרים וזוויות

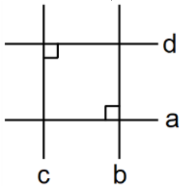
נתונים שני ישרים, a ו-b, המאונכים זה לזה.
על אותו מישור ציירו ישר שלישי, c, המקביל ל-b וישר רביעי, d, המאונך ל-c.

איזו מהטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

(1) $a \parallel d$
(2) $b \perp d$
(3) $c \parallel d$
(4) $a \perp c$

<u>פתרון</u>

כאמור, כשנתונה שאלה ללא סרטוט, מוטב ליצור אחד בעצמנו:



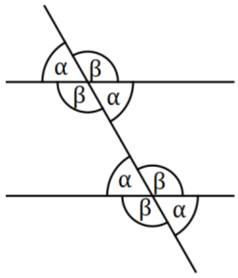
כעת, נעבור לבדיקת התשובות:
תשובה (1): הישרים a ו-d אכן מקבילים. התשובה נפסלת.
תשובה (2): הישרים b ו-d אכן מאונכים. התשובה נפסלת.
תשובה (3): הישרים c ו-d לא מקבילים, כי אם מאונכים זה לזה. זו התשובה הנכונה.
אין טעם לבדוק את תשובה (4), אך נזכיר כי הישרים a ו-c אכן מאונכים.
התשובה הנכונה היא (3).

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

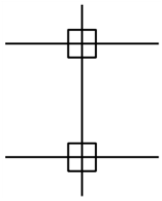
זוויות בין ישרים מקבילים

כאשר ישר מסוים חותך שני ישרים אשר מקבילים זה לזה (ואינו מאונך להם), נוצרים שני סוגים של זוויות - סוג אחד הוא זוויות חדות (α), והסוג השני הוא זוויות קהות (β). את ההגדרות של הזוויות (מתאימות, מתחלפות וכך הלאה) אין צורך לזכור בעל-פה ולא נעבור עליהן בשיעור הזה (אם מישהו מכם מעוניין להיזכר בהן, הן נמצאות ביסודות מתמטיים).

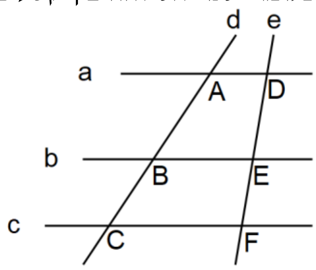
זכרו כי כל הזוויות החדות שוות זו לזו וכל הזוויות הקהות שוות זו לזו. נוסף על כך, זכרו כי $\alpha+\beta=180^\circ$.



אם הישר החותך מאונך לשני הישרים המקבילים, אזי כל הזוויות ישרות (90°) ושוות זו לזו:



כאשר ישרים מקבילים (a, b ו-c) נחתכים על ידי ישרים כלשהם (d ו-e), הישרים החותכים נחלקים בצורה פרופורציונלית - כלומר ישנו יחס זהה בין קטעים מסוימים.



במקרה הזה: $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

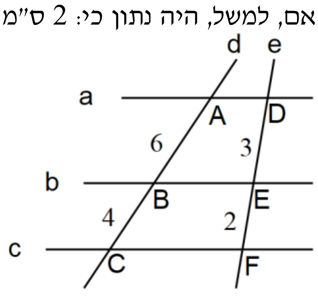
<u>דוגמה מספרית:</u>

נתון: 6 ס"מ = AB; 4 ס"מ = BC. אם כן, AB גדול פי 1.5 מ-BC (6 גדול פי 1.5 מ-4).

לפי האמור לעיל (חלוקה פרופורציונלית), ניתן להסיק כי DE גדול פי 1.5 מ-EF.

לפיכך, מספיק לנו לדעת את אורכו של אחד מהקטעים כדי לגלות את אורך השני.

אם, למשל, היה נתון כי: 2 ס"מ = EF, ניתן היה להסיק כי: 3 ס"מ = DE (3 גדול פי 1.5 מ-2):

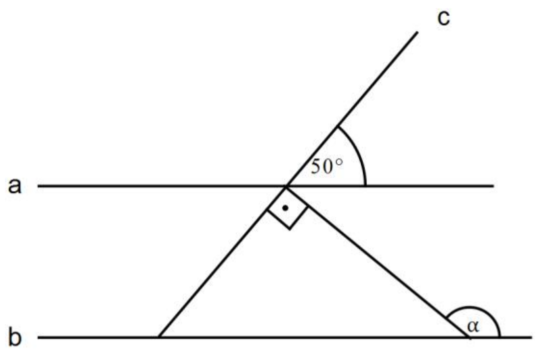


שימו לב כי מתקיים גם $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{6}{3}=\frac{4}{2} \Rightarrow 2=2$ וגם $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF} \Rightarrow \frac{6}{6+4}=\frac{3}{3+2} \Rightarrow \frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

כמו כן, מתוך היחסים הללו ניתן להסיק גם לגבי יחסים נוספים.

© כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.

שאלה לדוגמה - ישרים מקבילים



בסרטוט שלפניכם 3 ישרים: a, b ו-c.
נתון: $a \parallel b$.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) $150°$
(2) $120°$
(3) $130°$
(4) $140°$

<u>פתרון</u>

את הזווית שנמצאת בין הזווית בת ה- $90°$ ובין זו בת ה- $50°$ נסמן ב- β.

סכומן של כל הזוויות שנמצאות על קו ישר הוא $180°$ ולכן: $50° + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 40°$.

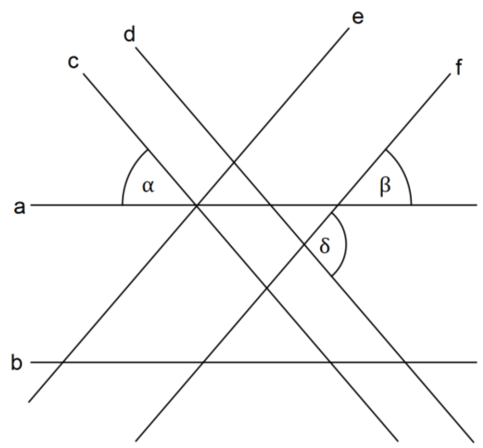
משום שהישרים a ו-b מקבילים, הזווית שצמודה לזווית α שווה ל- $40°$ גם כן ולכן: $\alpha + 40° = 180° \Rightarrow \alpha = 140°$.

<u>דרך פתרון נוספת:</u>

בין שלושת הישרים נוצר משולש ישר זווית שזוויותיו האחרות הן: $180 - \alpha$ (הזווית שצמודה ל- α) ו- $50°$ (זווית חדה בין ישרים מקבילים). כיוון שסכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$, ניתן לקבוע כי: $90° + 50° + 180° - \alpha = 180° \Rightarrow 140° = \alpha$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - ישרים מקבילים



בסרטוט שלפניכם 6 ישרים: a, b, c, d, e ו-f.
נתון: $e \parallel f$, $c \parallel d$ ו- $a \parallel b$.

על פי הנתונים האלה והנתונים שבסרטוט,
$\delta = ?$

(1) $\alpha + \beta$
(2) $180° - \alpha - \beta$
(3) $\alpha + 180° - \beta$
(4) $\alpha - \beta$

<u>פתרון</u>

כדי שנוכל ליצור משוואה שבה נמצאות שלוש הזוויות בשאלה, עלינו לנסות להכניסן למשולש.

הזווית שקדקודית ל- β שווה לה והזווית שצמודה ל- δ שווה ל- $180 - \delta$.

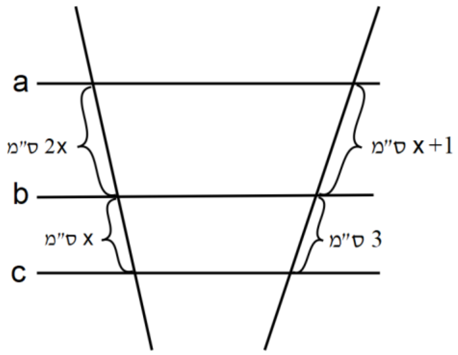
אם נסתכל על הישרים d, c ו-a בלבד, נוכל לקבוע כי הזווית השלישית במשולש שווה ל- α (הזווית החדה בין ישרים מקבילים ובין ישר שחותך אותם). אם כן, יצרנו משולש שבו נמצאות שלוש הזוויות: β, $180 - \delta$ ו- α. מכיוון שסכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$, ניתן לקבוע כי: $\beta + 180 - \delta + \alpha = 180$. נשאלנו על δ, ולכן נבודד אותה: $\delta = \beta + \alpha$.

שימו לב! ניתן היה להציב מספרים במקום α ו- β, למצוא את ערכה של δ לפי אותה הצבה ולאחר מכן לפסול תשובות.

התשובה הנכונה היא (1).

© **כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.**

שאלה נוספת – ישרים מקבילים



בסרטוט שלפניכם נתונים 3 ישרים מקבילים: a, b ו-c.

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
$x = ?$

(1) 5 ס"מ
(2) 2 ס"מ
(3) 3 ס"מ
(4) 4 ס"מ

<u>פתרון</u>

כפי שלמדנו בשיעור, כאשר ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישרים כלשהם, הישרים החותכים נחלקים באופן פרופורציונלי.
נזכיר כי יש מספר דרכים לחלק את הישרים הללו זה בזה, ונבחר באחת הדרכים באופן אקראי:
נחלק את הקטע השמאלי העליון (2x) בקטע הימני העליון ($x+1$), ואת התוצאה נשווה לחלוקה של הקטע השמאלי התחתון (x) בקטע הימני התחתון (3): $\frac{x}{3} = \frac{2x}{x+1}$. נבצע כפל בהצלבה: $3 \cdot 2x = x(x+1)$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-x ונקבל: $3 \cdot 2 = x+1 \Rightarrow 6 = x+1$. נעביר אגפים: $x = 5$.

<u>דרך פתרון נוספת – בדיקת תשובות:</u>

נבדוק לפי איזו תשובה מתקיים יחס מתאים בין הישרים הנחתכים:
תשובה (1): אם $x = 5$, הקטע השמאלי העליון ($2x = 2 \cdot 5 = 10$) גדול פי 2 מהקטע השמאלי התחתון (5).
כמו כן, הקטע הימני העליון ($x+1 = 5+1 = 6$) גדול פי 2 מהקטע הימני התחתון (3). היחס זהה, ולכן זו התשובה הנכונה.
אומנם אין צורך להמשיך לבדוק תשובות לאחר מציאת הנכונה, אולם נבדוק תשובה נוספת לשם שלמות ההסבר.
תשובה (2): אם $x = 2$, הקטע השמאלי העליון ($2x = 2 \cdot 2 = 4$) גדול פי 2 מהקטע השמאלי התחתון (2).
כמו כן, הקטע הימני העליון ($x+1 = 2+1 = 3$) שווה לקטע הימני התחתון (3).
בתשובה זו היחסים שונים, ולכן היא אינה נכונה.
התשובה הנכונה היא (1).

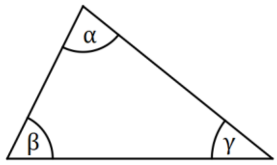
© **כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.**

סכום זוויות במשולש

כפי שהזכרנו בתחילת השיעור, הנושא ישרים וזוויות מהווה את הבסיס לנושאים האחרים בגיאומטריה. כלומר, מספר השאלות שבהן עקרונות מישרים וזוויות בלבד הוא מועט. לפיכך, נראה כיצד נושא זה משתלב בנושא הבא שלנו - משולשים.

הכלל הבסיסי ביותר במשולשים נוגע לסכום הזוויות במשולש:
בכל משולש שהוא, סכום הזוויות שווה ל- $180°$.
לפיכך, די לנו בערכן של שתי זוויות כדי למצוא את ערכה של השלישית.

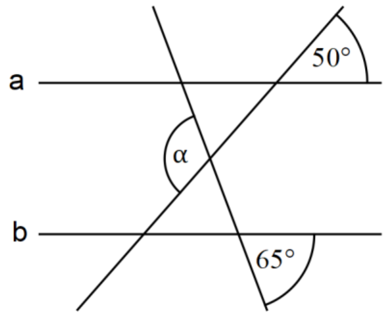
<u>לדוגמה:</u>



לו היה נתון כי $\alpha = 80°$ וכי $\beta = 60°$, ניתן היה למצוא את גודלה של γ.
כאמור, סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$ ולכן: $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 80° + 60° + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 40°$.

שאלה לדוגמה - סכום זוויות במשולש

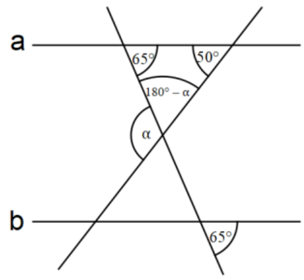
בסרטוט שלפניכם $a \| b$.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) $65°$
(2) $100°$
(3) $115°$
(4) $130°$

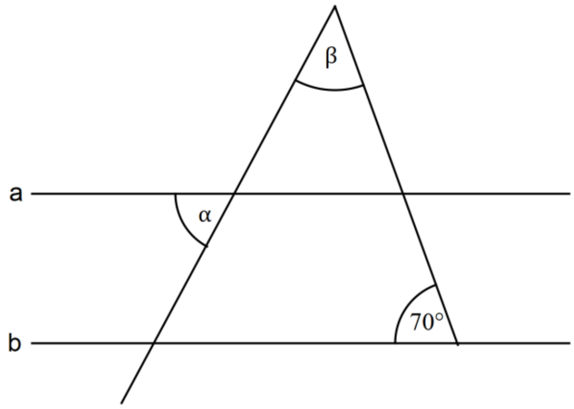
<u>**פתרון**</u>
נשאף להכניס את שלוש הזוויות הנתונות למשולש כדי ליצור משוואה. הזווית הקדקודית ל- $50°$ שווה לה.
הזווית שצמודה ל- α שווה ל- $180° - \alpha$ והזווית השלישית של המשולש הקטן היא זווית חדה בין ישרים מקבילים שנחתכים על ידי ישר מסוים. על כן, היא שווה ל- $65°$. אם כן, הצלחנו ליצור משולש שבו 3 הזוויות הבאות: $50°$, $180° - \alpha$ ו- $65°$.



כאמור, סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$ ולכן: $50° + 180° - \alpha + 65° = 180°$. נעביר אגפים: $\alpha = 115°$.
התשובה הנכונה היא (3).

© **כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.**

שאלה נוספת - סכום זוויות במשולש



בסרטוט שלפניכם a||b.

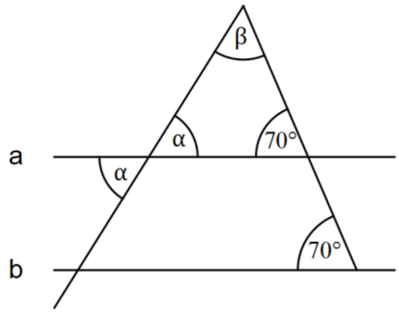
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) $\beta - 70°$
(2) $70° + \beta$
(3) $110° - \beta$
(4) $180° - \beta$

<u>פתרון</u>

בסרטוט הנתון ישנו משולש שזווית הראש שלו היא β. זווית הבסיס השמאלית שלו קדקודית ל- α ולכן שווה לה.

הזווית השלישית במשולש היא זווית חדה שנוצרה מחיתוך של ישר עם שני ישרים מקבילים אחרים.
מהנתון לפיו זווית אחת כזו שווה ל- $70°$, ניתן להסיק כי היא שווה ל- $70°$ גם כן.
לאור האמור לעיל, במשולש שבסרטוט שלוש הזוויות הבאות: β, α ו- $70°$.



היות שסכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$, ניתן לקבוע כי: $\alpha + \beta + 70° = 180°$.

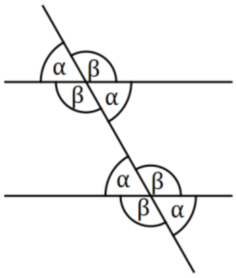
נשאלנו על α ולכן נבודד אותה: $\alpha = 110° - \beta$.

שימו לב! ניתן היה להציב ערך במקום β, למצוא את ערכה של α לפי אותה הצבה ולאחר מכן לפסול תשובות.

התשובה הנכונה היא (3).

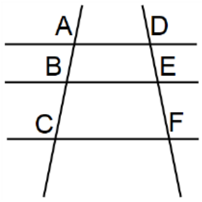
סיכום

- זכרו בעל-פה את המשמעויות של כל הגדרות הזוויות (חדה, קהה, קדקודית וכן הלאה).
- זכרו כי כאשר ישר מסוים חותך שני ישרים מקבילים (ואינו מאונך להם), נוצרים שני סוגים של זוויות - סוג אחד הוא זוויות חדות (α), Sוהסוג השני הוא זוויות קהות (β):



- כאשר ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישרים כלשהם, הישרים החותכים נחלקים בצורה פרופורציונלית.

אם $AD \| BE \| CF$, אז $\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}$ וגם $\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}$. כאמור, ניתן להסיק לגבי יחסים נוספים מתוך היחסים הללו.



- **בכל משולש שהוא, סכום הזוויות שווה ל-** $180°$.

<u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>

© **כל הזכויות שמורות לניב רווח פסיכומטרי בע"מ.**