הסתברות

מבוא

שאלות בנושא הסתברות דורשות מאתנו לחשב את הסיכוי להתרחשותו של מאורע מסוים.

ייתכן שהסיכוי יופיע באחוזים (נדיר), וייתכן כשבר שערכו בין 0 ל-1 (שכיח יותר).

סיכוי של 0 להתרחשותו של מאורע מסוים משמעותו כי המאורע **לעולם לא יתקיים**.

לעומת זאת, **סיכוי של 1** או של 100% להתרחשותו של מאורע מסוים, משמעותו כי **המאורע בוודאות יתקיים**.

ניתן אם כן לומר שהסיכוי להתרחשותו של מאורע הוא תמיד $0 \leq$ הסתברות ≤ 1.

בכל מקרה, **סכום ההסתברויות של מאורעות שונים באותו ניסוי חייב להיות 1** (כלומר – משהו בוודאות יקרה).

לדוגמה: הסיכוי שמטבע הוגן ייפול או על עץ או על פלי הוא 1, שכן קיים סיכוי של $\frac{1}{2}$ שייפול על עץ, וקיים סיכוי של $\frac{1}{2}$ שייפול על פלי. כיוון שהמטבע ייפול בכל מקרה על אחד מצדדיו, ההסתברות הכוללת של המאורעות היא 1.

כלל: כאשר לכל אחת מ-n התוצאות האפשריות של ניסוי מסוים יש סיכוי זהה להתקבל, אזי התוצאות הן שוות-הסתברות. במקרה כזה, ההסתברות של כל אחת מהתוצאות האפשריות בניסוי היא $\frac{1}{n}$.

הסתברות להתרחשות מאורע ספציפי

ככלל, ההסתברות להתרחשות מאורע מסוים היא: $\frac{\text{מספר האפשרויות המתאימות}}{\text{סך כל האפשרויות בניסוי המתואר}}$

לדוגמה: מה ההסתברות לקבלת תוצאה זוגית בהטלת קובייה הוגנת?

פתרון: ישנן **3** אפשרויות מתאימות בניסוי המתואר: 2,4,6 וסך כל האפשרויות בניסוי מסוג הטלת קובייה הן **6** אפשרויות.

לכן, ההסתברות לקבל תוצאה זוגית בעת הטלת קובייה הוגנת היא: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

דוגמה נוספת: מה ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ-1 בהטלת קובייה הוגנת?

פתרון: ישנן **5** אפשרויות מתאימות בניסוי המתואר: 2,3,4,5,6 וסך כל האפשרויות בניסוי מסוג הטלת קובייה הן **6** אפשרויות.

לכן, ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ- 1 בהטלת קובייה הוגנת היא: $\frac{5}{6}$.

שאלה לדוגמה – הסתברות מאורע

בבית הספר "הרצל" לומדים 120 תלמידים, מתוכם 30 מרכיבים משקפיים.

בבית הספר "ביאליק" לומדים 60 תלמידים, מתוכם 30 מרכיבים משקפיים.

נבחר באקראי תלמיד הלומד באחד מבתי הספר הללו. מה הסיכוי שהוא **אינו** מרכיב משקפיים?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

פתרון: עלינו לבדוק מה סך התלמידים **שאינם** מרכיבים משקפיים, מתוך סך התלמידים בבתי הספר הנזכרים בשאלה.

בבית הספר הרצל ישנם 30 מרכיבי משקפיים מתוך 120 תלמידים, ומכאן שישנם 90 **שאינם** מרכיבים משקפיים.

בבית הספר ביאליק ישנם 30 מרכיבי משקפיים מתוך 60 תלמידים, ומכאן שישנם 30 **שאינם** מרכיבים משקפיים.

בסך הכל ישנם $90+30=120$ תלמידים שאינם מרכיבים משקפיים, מתוך $120+60=180$ תלמידים.

ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי אינו מרכיב משקפיים היא: $\frac{120}{180}=\frac{2}{3}$.

התשובה הנכונה היא (3).

הסתברות מסוג "וגם"

באופן דומה למה שלמדנו בנושא צירופים, כאשר נישאל על ההסתברות לקבלת מאורע מסוים **וגם** מאורע אחר, עלינו לכפול את ההסתברויות זו בזו לשם קבלת ההסתברות הכוללת לקבלת שני המאורעות יחדיו.

שאלה לדוגמה – הסתברות "וגם"

הסיכוי שמחר יירד גשם הוא $\frac{1}{10}$. הסיכוי שמחר תזרח השמש הוא $\frac{5}{6}$.

תופעה של "קשת" בשמיים מתרחשת כאשר ביום כלשהו יורד גשם וגם זורחת השמש.

מה הסיכוי שמחר תופיע "קשת" בשמיים?

(1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{12}$

פתרון: על מנת שתופיע קשת בשמיים, צריכים להתרחש 2 מאורעות במקביל: גם גשם, וגם שמש.

מכיוון שעלינו למצוא את ההסתברות שגם יירד גשם וגם תזרח השמש, יש להכפיל את ההסתברויות למאורעות השונים אלה באלה, ומכאן שההסתברות לראות בשמיים קשת תהיה: $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – הסתברות "וגם"

מיכל זרקה 3 פעמים קובייה הוגנת שעל פאותיה המספרים 1-6.

מיכל ניחשה שהקובייה תיפול על 4 בהטלה הראשונה, על 5 בשנייה, ועל 6 בשלישית.

מה ההסתברות שמיכל צדקה בכל שלוש הפעמים?

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{216}$ (4) $\frac{1}{12}$

פתרון: בכל אחד מהניחושים בנפרד, ההסתברות שמיכל צדקה היא $\frac{1}{6}$ = פאה אחת מתוך 6 פאות.

לכן, ההסתברות שמיכל צדקה **גם** בפעם הראשונה, **גם** בשנייה **וגם** בשלישית היא: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$. התשובה הנכונה היא (3).

כלל: כאשר אנו צריכים לחשב הסתברות להתרחשותו של מאורע א' **וגם** של מאורע ב', עלינו לכפול את ההסתברויות של המאורעות השונים זה בזה.

הסתברות מסוג "או"

בשאלות מסוג "או" אנו נשאלים (באופן ישיר או עקיף) מה ההסתברות שיקרה מאורע אחד או מאורע אחר.

בשאלות "או" עלינו לסכום את ההסתברות לקבלת המאורע הראשון ואת ההסתברות לקבלת המאורע השני (שוב - בדומה לשאלות מסוג "או" בנושא צירופים).

שאלה לדוגמה – הסתברות "או"

דני הטיל 2 קוביות הוגנות שעל פאותיהן המספרים 1-6.

מה ההסתברות שסכום המספרים שמראות הקוביות הוא 10?

(1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{36}$ (3) $\frac{1}{18}$ (4) $\frac{1}{10}$

פתרון: ישנם 3 מצבים שונים שבהם נקבל סכום 10 על שתי הקוביות: מצב א' הוא 5-5. מצב ב' הוא 4-6, ומצב ג' הוא 6-4. נשים לב כי מצבים ב' ו-ג' שונים זה מזה, שכן בכל אחד מהם ישנה קובייה אחרת שמראה 4 וקובייה אחרת שמראה 6.

בשביל לקבל 4-6 על הקוביות, אנו נדרשים שיתקבל 4 על אחת הקוביות **וגם** יתקבל 6 על הקובייה השנייה. מכיוון שזו דרישה מסוג "וגם", אנו כופלים את הסיכויים זה בזה. ההסתברות לקבלת כל אחד מהמצבים זהה. לדוגמה, לקבלת 4-6 ההסתברות היא: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. לאחר שיש בידנו את הסיכוי לקבלת 4-6, ניתן להכפילו פי 3 שכן ישנם 3 מאורעות שונים שעונים על הדרישה שבשאלה. באופן חלופי, ניתן לראות זאת כך: סכום 10 יתקבל כאשר הקוביות יראו 4-6 **או** 6-4 **או** 5-5.

מכאן, כי הסיכוי לקבל סכום 10 הוא: $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. התשובה הנכונה היא (1).

כלל: כאשר אנו צריכים לחשב הסתברות להתרחשותו של מאורע א' **או** של מאורע ב', עלינו לחבר את ההסתברויות של המאורעות השונים זה לזה.

מאורעות בלתי תלויים ("עם החזרה")

מאורעות שאינם תלויים זה בזה אינם משפיעים על ההסתברות של מי מהם לקרות. דוגמה נפוצה היא ההסתברות לזכות בלוטו. העובדה שאדם מסוים זכה בלוטו אינה משנה את הסיכוי שלו לזכות שוב אם וכאשר ישתתף פעם נוספת. דוגמה נוספת יכולה להיות קובייה הוגנת שהוטלה ומראה כעת את הספרה 6. כאשר נטיל אותה שוב עדיין יהיה סיכוי זהה לקבלת הספרה 6 על אף שבהטלה הקודמת התקבלה ספרה זו.

שאלה לדוגמה – "עם החזרה"

רעות הטילה מטבע הוגן 3 פעמים.

מה ההסתברות שהמטבע נפל בשתי הפעמים הראשונות על "עץ", ובפעם השלישית על "פלי"?

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{45}$ (4) $\frac{1}{8}$

פתרון: מדובר במאורעות שאינם תלויים זה בזה שכן כל הטלה חדשה של המטבע "מאפסת" את הסיכוי שהמטבע ייפול על עץ או על פלי. מה שהתרחש בהטלה הקודמת אינו רלוונטי להטלה החדשה. הסיכוי שהמטבע ייפול על עץ הוא $\frac{1}{2}$ וכך גם הסיכוי שייפול על פלי. סה"כ אנו צריכים רצף של עץ **וגם** עץ **וגם** פלי: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. התשובה הנכונה היא (4).

כלל: במאורעות שאינם תלויים זה בזה, התרחשותו של המאורע הראשון ברצף המאורעות שבשאלה, אינה משפיעה על ההסתברות להתרחשותו של המאורע הבא ברצף המאורעות. כל מאורע הוא "משחק חדש" בפני עצמו.

מאורעות תלויים ("בלי החזרה")

לעיתים, ההסתברות של מאורע אחד מושפעת מהתרחשותו של מאורע אחר שקדם לו. התרחשותו של המאורע המקדים משנה את ההסתברות לקבלת המאורע המאוחר יותר, שכן האיבר שנבחר לראשונה **אינו** יכול להיבחר שוב וכמות האיברים הכוללת משתנה בהתאם.

שאלה לדוגמה – "בלי החזרה"

בכד 5 כדורים צהובים, 3 אדומים ו-2 כחולים.

מה ההסתברות להוציא מהכד באקראי כדור צהוב ולאחריו כדור אדום (מבלי להחזיר את הכדור הצהוב אל הכד)?

(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{20}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{5}$

פתרון: ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא מהכד היה צהוב היא $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$. נשים לב כי הכדור הראשון לא הוחזר אל הכד ולכן כרגע יש בכד 9 כדורים במקום 10 כדורים, ומהם עדיין 3 אדומים. ההסתברות שהכדור השני שהוצא מהכד הוא אדום היא: $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$.

מכיוון שלפנינו הסתברות מסוג "וגם", עלינו לכפול את ההסתברויות זו בזו: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. התשובה הנכונה היא (3).

כלל: כאשר לפנינו יותר ממאורע אחד, עלינו לבדוק האם התרחשותו של המאורע הראשון משנה את ההסתברות לקבלת המאורע השני. לרוב נוכל לזהות זאת לפי העובדה שהפריט הראשון שנבחר אינו מוחזר אל סל הבחירה.

עיקרון "בחירה ראשונה אינה משנה"

לעיתים על אף שבשאלה מתואר רצף של אירועים שצריכים להתרחש, האירוע הראשון אינו משנה שכן העיקר בשאלה הוא להתאים אליו אירוע נוסף אחרי שכבר אירע האירוע הראשון ברצף.

שאלה לדוגמה – בחירה ראשונה

7 כיסאות מסודרים במעגל.

יובל מתיישב באחד הכיסאות באופן אקראי, ואז ישי מתיישב באחד מהכיסאות הנותרים באופן אקראי.

מה הסיכוי שיובל וישי התיישבו זה לצד זה?

(1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{1}{49}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{42}$

פתרון: לכאורה לפנינו שאלה מסובכת מרובת שלבים, שכן אפשר שיובל יתיישב בכל אחד מ-7 הכיסאות במעגל, ואז לישי יש בכל פעם 2 אופציות משני צדדיו של יובל. **בפועל, אין זה משנה באיזה כיסא יבחר יובל לשבת**. יובל בכל מקרה יתיישב בכיסא כלשהו, כך שההסתברות לקיומו של מאורע זה היא 1. לאחר שיובל התיישב בכיסא כלשהו, ישנם 2 כיסאות מתוך השישה הנותרים שבהם ישי יכול להתיישב כך ששניהם יישבו זה לצד זה, ובסך הכל מדובר בסיכוי של $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

התשובה הנכונה היא (3). לצורך הדגמה בלבד, נראה שאם יובל בחר באופן אקראי כיסא מסוים בהסתברות של $\frac{1}{7}$ ואז נכפול זאת בהסתברות שישי בחר באחד משני הכיסאות שלצידו, נקבל $\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$. מכיוון שישנן 7 אפשרויות שונות לבחירת הכיסא הראשון, נכפיל פי 7 את התוצאה ונגיע שוב לתוצאה המקורית: $\frac{1}{21}\cdot 7=\frac{1}{3}$.

שאלה נוספת – בחירה ראשונה

בבניין הירוק יש x קומות ובכל קומה יש 4 דירות.

רבקה ואלונה בחרו כל אחת באקראי דירה בבניין.

מה ההסתברות ששתיהן בחרו באותה הדירה?

(1) $\frac{1}{4x^2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{4x}$ (4) $\frac{1}{16x^2}$

פתרון: רבקה ואלונה יכולות לגור יחדיו בכל אחת מהדירות בבניין. המשמעות היא שניתן לחשב את ההסתברות עבור דירה מסוימת, ואז שוב ושוב עבור כל אחת מהדירות, אך אין בכך צורך.

ניתן לצאת מנקודת הנחה שהראשונה שבהן בחרה ממילא דירה כלשהי, וההסתברות לכך היא 1. לאחר מכן נבדוק רק מה ההסתברות שהשנייה מהן בחרה את אותה הדירה בדיוק.

יש בבניין $4x$ דירות, ולכן ההסתברות לבחור אחת מהן באקראי היא $\frac{1}{4x}$. התשובה הנכונה היא (3).

כלל: כאשר הבחירה הראשונה אינה משנה, נוכל להתייחס אליה כאל מאורע שההסתברות להתרחשותו היא 1.
לאחר מכן, נוכל לחשב רק את ההסתברות לאירועים הבאים אחריו.

הסקה מההסתברות לגבי הכמות

מכיוון שההסתברות היא תוצאה של חלוקת האפשרויות המתאימות בסך האפשרויות, כאשר תהיה נתונה לנו ההסתברות לקיומו של המאורע כבר בשאלה עצמה, נוכל באופן דומה להסיק לגבי סך האפשרויות, ע״י ביצוע החישוב ההפוך.

שאלה לדוגמה – מציאת כמות

בקופסא x קלפים: 12 שחורים והשאר לבנים.

ההסתברות להוציא קלף לבן באופן אקראי היא $\frac{1}{5}$.

$x = ?$

(1) 20 (2) 15 (3) 3 (4) 60

פתרון: כל הקלפים בקופסה הם או שחורים או לבנים. מספר הקלפים הכולל בחפיסה הוא x, מספר הקלפים השחורים הוא 12, ומכאן שמספר הקלפים הלבנים יהיה $x-12$. נתון שההסתברות להוציא קלף לבן היא $\frac{1}{5}$, ומכאן שנוכל לבטא את ההסתברות לקבלת קלף לבן באופן הבא: $\frac{1}{5}=\frac{x-12}{x}$, וע״י כפל בהצלבה נקבל: $5x-60=x$, $4x=60$ ומכאן: $x=15$.

התשובה הנכונה היא (2).

הסתברות למאורע משלים

כפי שראינו בשאלות מסוג ״או״, לעיתים יש יותר ממצב אחד העונה על ההגדרות שבשאלה, לדוגמה ההסתברות לקבל מספר זוגי בהטלת קובייה היא בעלת מספר אפשרויות מתאימות: 2 או 4 או 6.

לעיתים, מספר המאורעות המתאימים גדול ומכאן שמסובך לחשבן, ולכן ננסה למצוא דווקא מאורע שאינו עונה על המבוקש בשאלה. לאחר מכן, נחסיר את הסיכוי למאורע זה מ-1 ונקבל את ההסתברות הרצויה. זאת כיוון ש-1 (הסיכוי המרבי ביותר) מורכב מסכום הסיכויים של כל המאורעות האפשריים. כעת, נדגים גישה זו:

שאלה לדוגמה – מאורע משלים

הוטלו 3 מטבעות הוגנים בו-זמנית. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם נחת על ״עץ״?

(1) $\frac{7}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

פתרון: ישנם הרבה מצבים העונים על ההגדרה של ״לפחות פעם אחת״, לדוגמה: הראשון נפל על עץ והשניים האחרים לא, השני על עץ והשניים האחרים לא, שניים כן והאחר לא, כולם כן ועוד.

בסך הכל ישנם 7 מצבים מתאימים, אך ישנו רק מצב אחד שאינו מתאים: כאשר שלושתם נפלו על ״פלי״.

ההסתברות לכך תהיה $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. מכיוון שכל המצבים האחרים מתאימים, נוכל לחסר את ההסתברות הזו מ- 1, ולקבל את ההסתברות של המבוקש בשאלה: $\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}$. התשובה הנכונה היא (1).

כלל: כאשר ישנם הרבה מצבים אפשריים העונים על המבוקש בשאלה, נבדוק האם ניתן לחשב הסתברות של ״מאורע משלים״ שאינו עונה על המבוקש בשאלה, ולאחר מכן לחסר את ההסתברות של מאורע זה מ-1 כדי לקבל את ההסתברות של יתר המאורעות.

הסתברות "מצומצמת"

לעיתים יופיעו שאלות המתייחסות לכאורה לקשת רחבה של מצבים - לדוגמה מקרה של הטלת קובייה - אך אנו נשאלים על ההסתברות להתרחשות מצב שאפשרי רק בחלק מקשת המקרים הרגילים, כפי שנראה בשאלה הבאה.

שאלה לדוגמה – הסתברות מצומצמת

יניב הטיל 2 קוביות הוגנות וביקש מהילה לנחש את המספרים שעל גבי הקוביות.

סכום המספרים שהילה ניחשה הוא 4. מה ההסתברות שאחד המספרים שהילה ניחשה היה 4 ?

(1) 1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

פתרון: יניב הטיל 2 קוביות, ונתון שסכום המספרים שיצא הוא 4. נבחן מה האפשרויות שיכולות להביא לסכום 4 בקוביות:

האפשרויות הן: 3-1, 2-2, 1-3. סה"כ 3 אפשרויות, ובאף אחת מהן לא מופיעה הספרה 4. לכן, ההסתברות שאחד המספרים שהילה ניחשה היה 4 היא 0. **הערה**: המקרים 3-1 או 1-3 אינם מקרים זהים, אלא מאורעות שונים.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – הסתברות מצומצמת

במשחק "טניסקו" משחקים שני שחקנים האחד נגד השני.

הסיכוי שהמשחק יסתיים בתוצאת "תיקו" הוא $\frac{1}{4}$. ביתר המקרים יש מנצח ויש מפסיד.

הסיכוי ששרון תנצח במשחק מול שחר הוא פי 4 מהסיכוי של שחר לנצח.

מה הסיכוי ששרון תנצח במשחק?

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{5}$

פתרון: לפי נתוני השאלה שרון ושחר לא חולקים ביניהם את כל קשת ההסתברויות האפשריות, שכן ההסתברות לקבלת תיקו היא $\frac{1}{4}$. מכאן, שההסתברות שאחד מהם ינצח היא $\frac{3}{4}$. נשים לב כי כאשר אחד מהם מנצח, השני מפסיד באופן אוטומטי, ומכאן כי זה אינו מאורע שונה. כיוון שהסיכוי ששרון תנצח הוא פי 4 מהסיכוי של שחר לנצח, נוכל לבנות משוואה באופן הבא:

$x+4x=\frac{3}{4}$, מכאן: $5x=\frac{3}{4}$, ולכן $x=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$. ניתן אם כן לומר כעת ש: $\frac{3}{5}=\frac{60}{100}=4x$.

התשובה הנכונה היא (4).

מטבע לא הוגן / קובייה לא הוגנת

ברוב המכריע של שאלות הקובייה או המטבע בבחינה, ידובר על מטבע הוגן או על קובייה הוגנת, כלומר שהסיכוי שייפלו על כל צד או פאה זהה. מדובר כאמור בהסתברויות שוות-סיכוי. במטבע שאינו הוגן, ההסתברות לנפילה על כל אחד מהצדדים אינה שווה.

נפתור שאלות אלו באמצעות הכלל לפיו סכום ההסתברויות של המאורעות המשלימים באותו ניסוי הוא תמיד 1.

שאלה לדוגמה – מטבע לא הוגן

במטבע שאינו הוגן, ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי" היא $\frac{2}{3}$ מההסתברות שהוא ייפול על "עץ".

מה ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי"?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{5}$

פתרון: כידוע, במטבע הוגן האפשרות שהמטבע ייפול על עץ או על פלי זהה, ושווה $\frac{1}{2}$. יחד עם זאת, במטבע הלא-הוגן המתואר בשאלה, הסיכוי של שני הצדדים אינו שווה, אך עדיין **סכום ההסתברויות חייב להיות שווה 1**, ולכן ניתן לבנות משוואה באופן הבא: $x+\frac{2}{3}x=1$, מכאן: $\frac{5}{3}x=1$, ולכן: $x=\frac{3}{5}$.

נאמר לנו שההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי" היא $\frac{2}{3}$ מההסתברות שהוא ייפול על "עץ", ומכאן: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

התשובה הנכונה היא (4).

כללים נפוצים של קוביות הוגנות

- ההסתברות הכוללת של המאורעות השונים האפשריים בעת הטלת קובייה הוגנת היא 1, שכן הקובייה בכל מקרה נופלת על אחת מפאותיה.

- ההסתברות לקבלת כל מספר היא זהה והיא שווה $\frac{1}{6}$.

- ההסתברות לקבל מספר זוגי היא $\frac{1}{2}$, וזו גם ההסתברות לקבל מספר אי-זוגי (3 מצבים מתאימים מתוך 6 מצבים אפשריים).

- בהטלת שתי קוביות, ההסתברות לקבל **דאבל כלשהו** היא $\frac{1}{6}$, זאת לפי עיקרון "בחירה ראשונה אינה משנה", לפיו הקובייה הראשונה תנחת בכל מקרה על מספר כלשהו, וכל שעלינו לבדוק הוא מה ההסתברות שגם השנייה תנחת **על אותו מספר**.

- ההסתברות לקבל **דאבל ספציפי** – לדוגמה 2-2, הוא $\frac{1}{36}$, כיוון שעלינו לבדוק מה ההסתברות שהקובייה הראשונה תנחת על 2 ($\frac{1}{6}$), וגם שהשנייה על אותו מספר בדיוק ($\frac{1}{6}$).

- ההסתברות לקבל **זוג מספרים נתון השונה** זה מזה (לדוגמה: $5-4$) היא $\frac{1}{18}$, זאת משום שכל אחת מהקוביות יכולה לנחות על 4 או על 5, והחישוב ייראה כך: ההסתברות שהראשונה נחתה על 4 או על 5 היא $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. לאחר מכן, יש להתאים לה ספרה ספציפית, בהסתברות רגילה של $\frac{1}{6}$, ומכאן: $\frac{1}{18}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}$. ניתן גם להבין זאת בדרך אחרת: ההסתברות שהקובייה הראשונה תיפול על 4 והשנייה על 5 היא: $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$, וההסתברות שהראשונה תיפול על 5 והשנייה על 4 היא: $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$. נסכום את ההסתברויות ונקבל: $\frac{1}{18}=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}$.

- ההסתברות לקבל שני מספרים שונים זה מזה (לא מספרים הנתונים בגוף השאלה) יהיה $\frac{5}{6}$, שכן אין זה משנה על איזה מספר נפלה הקובייה הראשונה, אנו צריכים שהשנייה תיפול על פאה שונה, ויש 5 כאלה.

סכומים והסתברויות בהטלת 2 קוביות

ההסתברות לקבל סכום כלשהו בהטלת 2 קוביות הוגנות, משתנה לפי הסכום המבוקש.

ההסתברות נקבעת לפי מספר המצבים האפשריים עבור כל סכום, כפי שנראה בטבלה הבאה:

סכום הקוביות	מספר המצבים	המצבים	ההסתברות
7	6 מצבים	6-1, 1-6, 2-5, 5-2, 4-3, 3-4	$6\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$
8 או 6	5 לכל אחד מהם	עבור 8: 6-2, 2-6, 4-4, 5-3, 3-5 עבור 6: 1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3	$5\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$
9 או 5	4 לכל אחד מהם	עבור 9: 6-3, 3-6, 4-5, 5-4 עבור 5: 4-1, 1-4, 2-3, 3-2	$4\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$
10 או 4	3 לכל אחד מהם	עבור 10: 6-4, 4-6, 5-5 עבור 4: 3-1, 1-3, 2-2	$3\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$
11 או 3	2 מצבים לכל אחד	עבור 11: 6-5, 5-6 עבור 3: 2-1, 1-2	$2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$
12 או 2	מצב אחד לכל אחד	עבור 12: 6-6 עבור 2: 1-1	$\frac{1}{36}$

שאלה לדוגמה – שתי קוביות

מה ההסתברות שבזריקת 2 קוביות הוגנות יהיה המספר שמופיע על אחת מהן כפול מהמספר שמופיע על השנייה?

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{12}$

פתרון: נבחן את קשת המצבים העונים על המבוקש בשאלה: 1-2, 2-1, 2-4, 4-2, 3-6, 6-3. סה״כ 6 מצבים שונים. ההסתברות לכל אחד מהמצבים היא כזכור $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ומכאן כי ההסתברות הכוללת תהיה: $6\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – שלוש קוביות

מה הסיכוי שבתום הטלת 3 קוביות הוגנות יהיו לפנינו 3 מספרים עוקבים?

(1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{27}$ (4) $\frac{1}{36}$

פתרון: כפי שראינו בשאלה הקודמת, אין חשיבות לסדר בו מתקבלים המספרים, כיוון שמבוקש פשוט לראות מול עינינו 3 מספרים עוקבים. המצבים למספרים עוקבים הם: $1-2-3$, $2-3-4$, $3-4-5$, $4-5-6$. יחד עם זאת, עלינו לזכור שעבור כל שלושת מספרים יש 6 סידורים פנימיים אפשריים: $1-2-3$, $1-3-2$, $2-1-3$, $2-3-1$, $3-1-2$, $3-2-1$. לכן, יש בסך הכל $4\cdot 6=24$ מצבים אפשריים.

ההסתברות לכל אחד מהמצבים היא: $\frac{1}{216}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$, ובסך הכל עבור 24 מצבים: $24\cdot\frac{1}{216}=\frac{1}{9}$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – שתי קוביות

גדי ושלומית מטילים כל אחד בתורו 2 קוביות הוגנות הממוספרות $1-6$.

נתון: גדי ינצח אם סכום הקוביות שהטיל יהיה 12.

שלומית תנצח אם סכום הקוביות שהטילה יהיה 11.

מה מהבאים נכון בהכרח?

(1) הסיכוי של גדי לנצח גבוה מהסיכוי של שלומית לנצח

(2) הסיכוי של שלומית לנצח גבוה מהסיכוי של גדי לנצח

(3) הסיכוי של כל אחד מהם לנצח זהה

(4) בכל מצב בו גדי יוכתר כמנצח תוכתר גם שלומית כמנצחת

פתרון: כפי שראינו בדוגמאות בעמודים הקודמים, עבור סכום 12 יש מצב אחד בלבד והוא $6-6$, ואילו עבור סכום 11 ישנם 2 מצבים: $5-6$, $6-5$. מכאן כי הסיכוי של שלומית לנצח גבוה פי 2 מהסיכוי של גדי לנצח.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – שלוש הטלות קובייה

גל מטיל קובייה הוגנת הממוספרת $1-6$.

אם הקובייה מראה 1, מקבל גל 2 שקלים.

אם הקובייה מראה 2, מקבל גל 3 שקלים, וכן הלאה.

מה הסיכוי, שבתום 3 הטלות, קיבל גל סכום **גבוה מ-** 19 שקלים?

(1) 0 (2) $\frac{1}{36}$ (3) $\frac{1}{54}$ (4) $\frac{1}{108}$

פתרון: נזכור שגל מקבל סכום השווה למה שכתוב על הקובייה פלוס 1. כדי לקבל סכום הגבוה מ- 19 שקלים אנחנו צריכים אחד משני מצבים: סכום של 21 שקלים יתקבל כאשר הקוביות יראו $6-6-6$, וסכום של 20 שקלים יתקבל כאשר יראו הקוביות $5-6-6$. המצב של $5-6-6$ יכול להיראות בשלושה אופנים שונים: $5-6-6$, $6-5-6$, $6-6-5$. סה"כ ישנם 4 מצבים אפשריים, וההסתברות תהיה $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!</u>