# בעיות כמותיות

## בעיות כלליות

# בעיות כלליות

**<u>מבוא</u>**

בעיות כלליות הן שאלות נפוצות בבחינה ולא ניתן לסווגן כבעיה ספציפית (יחס, הספק, הסתברות וכו').

למעשה, הבעיות הללו יכולות להיות בעיות אלגבריות ביסודן (**שברים**, **ביטויים**, **משוואות** וכו'), אך בהן יהיה עלינו להרכיב תרגיל מתמטי, אשר נצטרך לפתור או לפשט, מתוך סיפור מסוים.

נוסף על כך, הבעיות עשויות להיות בעיות **טווחים**, בהן נצטרך למצוא תחום מינימלי ותחום מקסימלי.

סוג שאלות נוסף הוא **ניסוי וטעייה**. בשאלות הללו נוכל לפרוט מקרים כדי למצוא את התשובה הנכונה.

הסוג האחרון בו נעסוק בשיעור הזה הוא בעיות **מרווחים**. בשאלות הללו, לרוב, נתמקד במציאת מרווחים בין גורמים מסוימים ונצטרך לחשב מרחקים אפשריים בין גורם אחד לאחר.

לסיכום, בעיה כללית יכולה להיות כל בעיה שאינה מסווגת כבעיה אחרת, ובשיעור הזה נתמקד בעקרונות שיסייעו לנו בפתירתן.

## בעיות שברים

כאמור, בעיות מהסוג הזה יעסקו, לרוב, בתרגיל אלגברי מסוים אשר אותו נצטרך להרכיב בעצמנו מתוך סיפור.

<u>לדוגמה:</u>

רועי ולימור אכלו עוגה.

לימור אכלה $\frac{1}{3}$ מהעוגה, ורועי אכל $\frac{2}{5}$ מהחלק שנותר.

שאלה אפשרית לגבי הדוגמה הזו היא: איזה חלק מתוך העוגה לימור ורועי אכלו יחדיו?

שאלה אפשרית נוספת היא: איזה חלק מהעוגה נותר לאחר שלימור ורועי אכלו ממנה?

כמובן שישנן שאלות נוספות שניתן לשאול, אך הצגנו את אלו שהסבירות להופעתן היא הגבוהה ביותר.

למעשה, אין בשאלה הזו מספר ממשי מסוים (משקל העוגה, מספר הפרוסות בה וכן הלאה), אלא רק חלקים יחסיים מתוך העוגה. לפיכך, ניתן לקבוע כי העוגה היא שלם 1 (מי מאיתנו שמעדיף - ניתן לסמן אותה ב-x).

לימור אכלה $\frac{1}{3}$ מהעוגה, ולכן החלק שנותר ממנה לאחר מכן הוא: $\frac{2}{3}$ ($1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$).

רועי אכל $\frac{2}{5}$ מהחלק שנותר ($\frac{2}{3}$), ולכן החלק שאכל הוא: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$.

אם כן, החלק שאכלו ולימור ורועי יחדיו מתוך העוגה הוא: $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{5}{15}+\frac{4}{15}=\frac{9}{15}$.

לאור האמור לעיל, החלק שנותר לאחר ששניהם אכלו הוא: $1-\frac{9}{15}=\frac{15}{15}-\frac{9}{15}=\frac{6}{15}$.

אגב, משום שהשאלה עוסקת בחלקים מתוך השלם ואין בה מספרים ממשיים, ניתן **להציב מספר**.
המספר יכול להיות משקל העוגה, מספר הפרוסות בה ועוד - נבחר את הגורם הנוח ביותר עבורנו:
מכיוון שהמכנים של השברים בשאלה הם 3 ו-5, נבחר מספר אשר מתחלק ב-15 (המכנה המשותף הנמוך ביותר שלהם).
נקבע, אם כן, כי מספר הפרוסות בעוגה הוא 15.

לימור אכלה $\frac{1}{3}$ מהעוגה, ולכן מספר הפרוסות שהיא אכלה הוא 5 ($15\cdot\frac{1}{3}$).
לפיכך, מספר הפרוסות שנותרו לאחר שלימור אכלה הוא 10 ($15-5$).
רועי אכל $\frac{2}{5}$ מהחלק שנותר (10), ולכן מספר הפרוסות שהוא אכל הוא 4 ($10\cdot\frac{2}{5}=\frac{20}{5}$).
אם כן, מספר הפרוסות שאכלו לימור ורועי יחדיו הוא 9 ($5+4$).
לפיכך, מספר הפרוסות שנותרו לאחר ששניהם אכלו הוא 6 ($15-9$).
לאור האמור לעיל, החלק ששניהם אכלו יחדיו מתוך העוגה הוא $\frac{9}{15}$ והחלק שנותר הוא $\frac{6}{15}$.
כפי שניתן להבחין, בשתי הדרכים התקבלו תוצאות זהות.
בדוגמה הספציפית הזו אנו סבורים כי הצבת מספרים נוחה פחות מהפתרון הראשון שהצגנו, אך מוטב לזכור כי האפשרות קיימת.

**שאלה לדוגמה - בעיות שברים**

יונתן קטף תפוחים.

$\frac{1}{3}$ מהתפוחים שקטף יועדו להכנת מיץ, והשאר יועדו למאכל.

בתום הקטיף זיהה יונתן כי $\frac{1}{6}$ מהתפוחים המיועדים למאכל הם ירוקים.

מבין כלל התפוחים שקטף יונתן, מה חלקם של התפוחים המיועדים למאכל ש**אינם** ירוקים?

(1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{5}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

**פתרון**

**דרך א' - פתרון אלגברי:**

אין בשאלה הזו מספר ממשי מסוים, אלא רק חלקים יחסיים. לפיכך, נקבע כי מספר התפוחים הוא שלם 1.

חלקם של התפוחים אשר יועדו להכנת מיץ הוא $\frac{1}{3}$. לפיכך, חלקם של התפוחים אשר יועדו למאכל הוא: $\frac{2}{3}$ ($1-\frac{1}{3}$).

$\frac{1}{6}$ מהתפוחים המיודעים למאכל הם ירוקים.

לפיכך, חלקם של התפוחים אשר **אינם** ירוקים מתוך התפוחים אשר מיועדים למאכל הוא: $\frac{5}{6}$ ($1-\frac{1}{6}$).

כעת, נמצא את חלקם של התפוחים שמיועדים למאכל ו**שאינם** ירוקים מתוך כלל התפוחים: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$.

הערה: מי מאיתנו שמעדיף - ניתן לסמן את מספר התפוחים הכולל ב-x.

**דרך ב' - הצבת מספרים:**

המכנים של השברים בשאלה הם 3 ו-6. לפיכך, נקבע שמספר התפוחים הוא 18 (מכנה משותף שלהם).

$\frac{1}{3}$ מהתפוחים יועדו להכנת מיץ, ולכן, לפי הצבה זו, מספרם הוא 6 ($18\cdot\frac{1}{3}$).

לפיכך, חלקם של התפוחים אשר יועדו למאכל הוא 12 ($18-6$). $\frac{1}{6}$ מהתפוחים אשר מיועדים למאכל ירוקים, ולכן מספרם הוא 2 ($12\cdot\frac{1}{6}$). לפיכך, מספר התפוחים אשר מיועדים למאכל **ואינם** ירוקים הוא 10 ($12-2$).

אם כן, חלקם של התפוחים המיועדים למאכל **ואינם** ירוקים מתוך כלל התפוחים הוא: $\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$.

**התשובה הנכונה היא (2).**

## שאלה נוספת – בעיות שברים

עדינה אוספת מטבעות עתיקים.

$\frac{1}{4}$ מהמטבעות באוסף שלה הם בצבע כסף, $\frac{1}{3}$ בצבע זהב והיתר בצבע ברונזה.

מה **אינו** יכול להיות מספר המטבעות **בצבע ברונזה** באוסף המטבעות של עדינה?

(1) 48 (2) 50 (3) 55 (4) 60

**<u>פתרון</u>**

אין בשאלה הזו מספר ממשי מסוים, אלא רק חלקים יחסיים. לפיכך, נקבע כי מספר המטבעות באוסף של עדינה הוא שלם 1. כדי למצוא את חלקם של מטבעות הברונזה, עלינו לחסר ממספר המטבעות הכולל את חלקם של מטבעות הכסף וכן את חלקם של מטבעות הזהב: $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$.

קיבלנו כי חלקם של מטבעות הברונזה הוא $\frac{5}{12}$ ממספר המטבעות באוסף. פירוש הדבר הוא שכדי לקבל את מספר המטבעות בצבע ברונזה, יהיה השלם אשר יהיה, עלינו לחלק את השלם ב-12 (המכנה) ולכפול את התוצאה ב-5 (המונה).

משום שיש לכפול את התוצאה ב-5, ניתן להסיק כי מספר המטבעות בצבע ברונזה הוא מספר אשר מתחלק ב-5.

המספר היחיד מבין התשובות אשר לא מתחלק ב-5 הוא 48, ולכן הוא אינו יכול להיות מספר המטבעות בצבע ברונזה.

**התשובה הנכונה היא (1).**

## שאלה נוספת – בעיות שברים

דני חילק פרוסות עוגה ל-15 חבריו לכיתה, כך שכל אחד מהם קיבל פרוסה אחת.

4 מבני כיתתו קיבלו פרוסות עוגה במשקל x גרמים.

5 מבני כיתתו קיבלו פרוסות עוגה במשקל y גרמים, ו-6 מבני כיתתו קיבלו פרוסות עוגה במשקל z גרמים.

לאחר חלוקה זו נגמרה העוגה.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $z<y<x$

(2) $x<y<z$

(3) $x=y=z$

(4) אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה בהכרח

**<u>פתרון</u>**

4 מבני הכיתה קיבלו פרוסה במשקל של x גרמים, ולכן משקלן של 4 הפרוסות שקיבלו הוא 4x.

באופן זהה, משקלן של הפרוסות שקיבלו 5 מבני הכיתה הוא 5y, ומשקלן של הפרוסות שקיבלו 6 בני הכיתה הנותרים הוא 6z.

אם כן, ניתן לבטא את משקלה הכולל של העוגה כך: $4x+5y+6z$.

מהביטוי שקיבלנו לא ניתן להסיק דבר לגבי גודלם של הנעלמים (סרטוט ימחיש זאת בצורה הטובה ביותר):

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | y | y | y | y | y | z | z | z | z | z | z |

באפשרות הזו ניתן לראות כי x גדול מ-z.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | y | y | y | y | y | z | z | z | z | z | z |

באפשרות הזו ניתן לראות כי z גדול מ-x.

**התשובה הנכונה היא (4).**

## בניית ביטויים

בבעיות כלליות מהסוג הזה נידרש לבנות ביטוי מתמטי באמצעות סיפור אשר נתון בשאלה.

לדוגמה:

במסיבה יש $x$ אנשים, מתוכם $y$ לובשים חליפה. החלק היחסי של לובשי חליפה שחורה מבין לובשי החליפות הוא $\frac{y}{x}$.

כמה אנשים לובשים חליפה שחורה ($x, y \neq 0$)?

(1) $\frac{y^2}{x}$

(2) $\frac{y}{x^2}$

(3) $\frac{y+x}{x}$

(4) $\frac{y+x}{y}$

אל לנו לחשוש מהנעלמים בשאלה. נתון כי $y$ אנשים לבשו חליפות וכן נתון לנו חלקם היחסי של לובשי החליפות השחורות מתוכם.

אם, למשל, היה נתון שחלקם היחסי של לובשי החליפות השחורות הוא $\frac{1}{2}$, היה עלינו לכפול את מספר לובשי החליפות הכולל ($y$) ב- $\frac{1}{2}$.

באופן זהה, יש לכפול את מספר לובשי החליפות הכולל ($y$) בחלקם היחסי של לובשי החליפות השחורות: $y \cdot \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}$.

כזכור משיעור ביטויים באלגברה, בשאלות ביטויים ניתן, לרוב, **להציב מספרים** נוחים.
נקבע כי במסיבה ישנם 10 אנשים ($x = 10$) וכי מתוכם 5 לובשים חליפות ($y = 5$).

אם כן, מספר האנשים אשר לובשים חליפות שחורות הוא: $5 \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$.
בשאלה הספציפית הזו העובדה שהתקבל מספר אנשים שאינו שלם אינה משנה.
יש להציב $x = 10$ ו- $y = 5$ בתשובות ולפסול את אלו שערכן **אינו** 2.5:

**תשובה (1):** $\frac{y^2}{x} = \frac{5^2}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$. זו התשובה הנכונה.

**תשובה (2):** $\frac{y}{x^2} = \frac{5}{10^2} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. התשובה נפסלת.

**תשובה (3):** $\frac{y+x}{x} = \frac{5+10}{10} = \frac{15}{10} = 1.5$. התשובה נפסלת.

**תשובה (4):** $\frac{y+x}{y} = \frac{5+10}{5} = \frac{15}{5} = 3$. התשובה נפסלת.

**התשובה הנכונה היא (1).**

**שאלה לדוגמה - בניית ביטויים**

נמר נולד במשקל 3 ק"ג. ביום הראשון לחייו עלה משקלו ב-x ק"ג.
בכל יום נוסף למשקלו של הנמר משקל הגדול פי 2 מהמשקל שנוסף ביום שקדם לו.

משקל הנמר בסוף היום הרביעי לחייו הוא -

(1) $3+10x$ (2) $3+12x$ (3) $3+15x$ (4) $3+8x$

**פתרון**

**דרך א' - הצבת מספרים:**

ערכן של כל התשובות תלוי ב-x. לפיכך, ניתן להציב מספר נוח במקומו. נציב $x=1$.
לפי הצבה זו, נוסף למשקלו של הנמר ביום הראשון ק"ג 1. ביום השני נוסף למשקלו משקל הגדול פי 2 מהיום הקודם, כלומר נוספו למשקלו 2 ק"ג ($1\cdot 2$). לפי עיקרון זהה, ביום השלישי נוספו למשקלו 4 ק"ג ($2\cdot 2$) וביום הרביעי נוספו 8 ק"ג ($4\cdot 2$).
לאור האמור לעיל, משקלו של הנמר בסוף היום הרביעי לחייו הוא: $3+1+2+4+8=18$. כלומר, 18 ק"ג.
נציב $x=1$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו 18:
**תשובה (1):** $3+10x=3+10\cdot 1=3+10=13$. התשובה נפסלת.
**תשובה (2):** $3+12x=3+12\cdot 1=3+12=15$. התשובה נפסלת.
**תשובה (3):** $3+15x=3+15\cdot 1=3+15=18$. זו התשובה הנכונה.
**תשובה (4):** $3+8x=3+8\cdot 1=3+8=11$. התשובה נפסלת.

**דרך ב' - פתרון אלגברי:**

אנו יודעים כי ביום הראשון לחייו נוסף למשקלו של הנמר x ק"ג. ביום השני, נוסף למשקלו משקל אשר גדול פי 2 מהיום הקודם. אם כן, ביום השני נוספו לו 2x ק"ג ($x\cdot 2$). לפי עיקרון זהה, ביום השלישי נוספו למשקלו 4x ק"ג ($2x\cdot 2$) וביום הרביעי 8x ק"ג ($4x\cdot 2$). לאור האמור לעיל, כדי למצוא את משקלו לאחר ארבעה ימים, יש להוסיף למשקלו ההתחלתי (3) את המשקלים הנ"ל: $3+x+2x+4x+8x=3+15x$.
**התשובה הנכונה היא (3).**

**שאלה נוספת - בניית ביטויים**

הדוור שי מחלק x חבילות בכל אחד מהימים שני, רביעי ושישי, ו-y חבילות בכל אחד מהימים ראשון, שלישי, חמישי ושבת.
ידוע כי מספר החבילות שהדוור שי מחלק בשבוע גדול ממספר החבילות שמחלק הדוור עמירם בשבוע.

איזה מהביטויים הבאים **בהכרח** אינו מספר החבילות שמחלק הדוור עמירם בשבוע?

(1) $2x+5y$ (2) $4x+5y$ (3) $2x+3y$ (4) $4x+3y$

**פתרון**

נתון כי מספר החבילות שמחלק עמירם בשבוע קטן ממספר החבילות שמחלק שי בשבוע. לפיכך, תשובה שבה יימצא מספר חבילות אשר גדול ממספר החבילות ששי מחלק או שווה לו היא התשובה הנכונה. ישנם 3 ימים בהם שי מחלק x חבילות, ולכן בשלושת הימים הללו הוא מחלק 3x חבילות. ישנם 4 ימים בהם שי מחלק y חבילות, ולכן בארבעת הימים הללו הוא מחלק 4y חבילות.
לאור האמור לעיל, מספר החבילות הכולל ששי מחלק בשבוע הוא: $3x+4y$.
בתשובה (2) ביטוי אשר גדול בהכרח מהביטוי אשר מייצג את מספר החבילות ששי מחלק, שכן המקדמים של x ושל y בו (4 ו-5) גדולים מהמקדמים של הביטוי אשר מייצג את מספר החבילות ששי מחלק (3 ו-4). לפיכך, זו התשובה הנכונה.
לעומתה, בתשובה (3) המקדמים של x ושל y קטנים מהמקדמים בביטוי הנ"ל, ולכן תשובה זו נפסלת.
לא ניתן לקבוע לגבי התשובות (1) ו-(4) משום שהן תלויות בערכם של x ושל y, אותו אנו לא יודעים.
**התשובה הנכונה היא (2).**

# בניית משוואות

בבעיות כלליות מהסוג הזה נידרש לבנות משוואה באמצעות סיפור אשר נתון בשאלה.
בשונה מביטויים, במשוואות מוטב שלא להציב מספרים.
עם זאת, בשאלות מסוימות ניתן לבצע **בדיקת תשובות** - לבדוק איזו מבין התשובות מקיימת את נתוני השאלה.

<u>לדוגמה:</u>
למאי ולצבי יש יחדיו 60 בולים. למאי יש פי 2 בולים יותר מלצבי.

כמה בולים יש למאי?

משום שנשאלנו על מספר הבולים של מאי (חשוב לציין כי באותה מידה ניתן היה לשאול על מספר הבולים של צבי, כלומר בשני המקרים המשוואה שהיינו יוצרים הייתה זהה), הדבר האינטואיבי ביותר לעשות הוא לסמן את מספר הבולים שלה ב-x.
נתון כי מספר הבולים של מאי גדול פי 2 ממספר הבולים של צבי, ולכן מספר הבולים שלו הוא: $\frac{x}{2}$.

עוד נתון כי מספר הבולים שלהם יחדיו הוא 60. לפיכך: $x+\frac{x}{2}=60$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל:
$2x+x=120$. נכנס איברים דומים: $3x=120$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x=40$.
לאור האמור לעיל, מספר הבולים של מאי הוא 40 ומספר הבולים של צבי הוא 20.

במשוואה שבנינו ישנו שבר, וייתכן כי לחלקינו נוח פחות לעבוד עם שברים.
כדי להימנע מעבודה עם שברים, יכולנו לסמן את הגורם ה**קטן** בשאלה ב-x (כמובן שבשתי הדרכים יתקבלו תוצאות זהות).
אם אכן היינו מסמנים את מספר הבולים של צבי ב-x, אזי מספר הבולים של מאי היה 2x (גדול פי 2).
אם כן, מספר הבולים שלהם יחדיו היה: $x+2x=3x$. כאמור, מספר זה שווה ל-60 ולכן: $3x=60$.
במשוואה האחרונה אין צורך ביצירת מכנה משותף, ולכן פתירתה פשוטה יותר.
נחלק את שני אגפיה ב-3 ונקבל: $x=20$.
לפיכך, מספר הבולים של צבי הוא 20 ומספר הבולים של מאי הוא 40.

**שימו לב!** חשוב מאוד לכתוב את הסימונים על יד שמות הגורמים בשאלה, כך שבסוף לא נתבלבל ונסמן תשובה שאינה נכונה.
לדוגמה: אם החלטנו שהגורם הקטן, צבי, הוא x, נסמן את האות x ליד שמו על גבי השאלה.

לסיכום, אין זה משנה איזה גורם נסמן ב-x, אולם ברוב המקרים יהיה נוח לסמן את הגורם הקטן ביותר.
זאת כדי להימנע מעבודה עם שברים.

<u>דוגמה נוספת:</u>
למאי יש 30 בולים יותר מלצבי. לשניהם יחד יש 120 בולים.

כמה בולים יש לצבי?

נסמן את מספר הבולים של צבי ב-x. אם כן, מספר הבולים של מאי הוא: $x+30$.
נתון כי יחדיו יש להם 120 בולים ולכן: $x+x+30=120$. נכנס איברים דומים ונעביר את 30 אגף: $2x=90$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x=45$.
לפיכך, מספר הבולים של צבי הוא 45 ומספר הבולים של מאי הוא 75.
כדי לוודא שהגענו לתשובה הנכונה, ניתן לחבר את מספר הבולים שלהם ולבדוק אם הוא אכן שווה ל-120, כפי שנתון בשאלה.

כאמור, אין זה משנה איזה גורם נסמן ב-x. כדי להראות זאת, נסמן את מספר הבולים של מאי ב-x.
אם כן, מספר הבולים של צבי הוא: $x-30$.
נתון כי יחדיו יש להם 120 בולים ולכן: $x+(x-30)=120$. לאחר החיבור באגף שמאל: $2x-30=120$.
נעביר את 30 אגף: $2x=150$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x=75$.
לאור זאת, מספר הבולים של מאי הוא 75 ומספר הבולים של צבי הוא 45.

<u>דוגמה נוספת:</u>
גילה של מאי גדול פי 3 מגילו של צבי. בעוד 10 שנים גילה של מאי יהיה גדול פי 2 מגילו של צבי.

בן כמה צבי כיום?

(1) 5
(2) 8
(3) 10
(4) 12

העיקרון אשר בא לידי ביטוי בשאלה הזו הוא: "**תן למסכן**".
לפי עיקרון זה, כאשר אנו רוצים להשוות בין שני גורמים, עלינו לתת למסכן, כלומר לתת לצד הקטן יותר מביניהם.
לדוגמה, אם מספר הסוכריות של אבי גדול ב-2 ממספר הסוכריות של דני, עלינו לתת ל**דני** 2 סוכריות כדי שמספר הסוכריות שלהם יהיה שווה.

כאמור, בשאלות רבות הדבר הנוח ביותר יהיה לסמן את הגורם הקטן ב-x.
בשאלה הזו, הגורם הקטן הוא צבי ולכן נסמן אותו ב-x. אם כן, גילה של מאי הוא 3x (גדול פי 3).
בעוד 10 שנים גילו של צבי יהיה: $x+10$. זאת ועוד, בעוד 10 שנים גילה של מאי יהיה: $3x+10$.
נתון כי בעוד 10 שנים גילה של מאי יהיה גדול פי 2. לפי העיקרון "תן למסכן", עלינו לכפול את הגורם הקטן יותר, גילו של צבי בעוד 10 שנים, ב-2 ולהשוות בין גיליהם: $2(x+10)=3x+10$.
נבצע את הכפל באגף השמאלי: $2x+20=3x+10$. נעביר אגפים: $x=10$.
לפיכך, גילו של צבי הוא 10.
אם הזמן מאפשר לנו, ניתן בשלב הזה לבדוק אם הנתונים מתקיימים כאשר גילו של צבי כיום הוא 10 שנים.

כאמור, בשאלות משוואות מסוימות ניתן לבצע **בדיקת תשובות** - נבדוק, לפי גילו של צבי כיום, את גילה של מאי כיום.
לאחר מכן, נוסיף 10 שנים לשני הגילים, ונבדוק אם גילה של מאי גדול פי 2 מגילו של צבי:
**תשובה (1):** גילו של צבי כיום: 5. גילה של מאי כיום: 15 ($5\cdot3$).
גילו של צבי בעוד 10 שנים: 15. גילה של מאי בעוד 10 שנים: 25. 25 לא גדול פי 2 מ-15. התשובה נפסלת.
**תשובה (2):** גילו של צבי כיום: 8. גילה של מאי כיום: 24 ($8\cdot3$).
גילו של צבי בעוד 10 שנים: 18. גילה של מאי בעוד 10 שנים: 34. 34 לא גדול פי 2 מ-18. התשובה נפסלת.
**תשובה (3):** גילו של צבי כיום: 10. גילה של מאי כיום: 30 ($10\cdot3$).
גילו של צבי בעוד 10 שנים: 20. גילה של מאי בעוד 10 שנים: 40. 40 גדול פי 2 מ-20. זו התשובה הנכונה.
**חשוב לשים לב!** בשונה מהצבת מספרים, כאשר אנו בודקים תשובות ומצאנו תשובה נכונה, **אין צורך** לבדוק את יתר התשובות.
אולם, אם הזמן מאפשר זאת, אפשר לעשות כן כדי לוודא שלא נעשתה טעות חישוב.
**תשובה (4):** גילו של צבי כיום: 12. גילה של מאי כיום: 36 ($12\cdot3$).
גילו של צבי בעוד 10 שנים: 22. גילה של מאי בעוד 10 שנים: 46. 46 לא גדול פי 2 מ-22. התשובה נפסלת.
**התשובה הנכונה היא (3).**

**שאלה לדוגמה - בניית משוואה**

מחירו של אננס גבוה ב-3 שקלים ממחירו של אגס וגבוה פי 4 ממחירו של תפוח.
המחיר הכולל של אננס של אגס ושל תפוח הוא 15 שקלים.

מה מחירו של אננס (בשקלים)?

(1) 8
(2) 7
(3) 6
(4) 4

**<u>פתרון</u>**

**<u>דרך א' - בדיקת תשובות:</u>**

מחירם של כל הפירות תלוי במחירו של האננס. לפיכך, ניתן לבדוק תשובות:
נמצא את מחירם של האגס (נמוך ב-3 שקלים ממחירו של אננס) ושל התפוח (קטן פי 4 ממחירו של אננס) לפי מחירו של האננס, ולאחר מכן נבדוק אם מחירם הכולל הוא 15 שקלים:

**תשובה (1):** מחירו של האננס: 8 שקלים. מחירו של אגס: 5 שקלים ($8-3$). מחירו של תפוח: 2 שקלים ($\frac{8}{4}$).

מחירם הכולל של שלושת הפירות לפי תשובה זו: $8+5+2=15$. זו התשובה הנכונה.
כאמור, כאשר אנו בודקים תשובות, אין צורך לבדוק את יתר התשובות לאחר מציאת התשובה הנכונה.

**<u>דרך ב' - פתרון אלגברי:</u>**

כדי להימנע מעבודה עם שברים, נסמן את מחירו של התפוח, אשר קטן יותר מאננס, ב-$x$.
אם כן, מחירו של אננס הוא $4x$ (גבוה פי 4 ממחירו של תפוח).
כמו כן, מחירו של אגס הוא: $4x-3$ (נמוך ב-3 שקלים ממחירו של אננס).
לאור האמור לעיל, מחירם הכולל של שלושת הפירות הוא: $x+(4x-3)+4x=x+4x-3+4x=9x-3$.
נתון כי מחירם הכולל הוא 15 שקלים ולכן: $9x-3=15$.
נעביר אגפים: $9x=18$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-9 ונקבל: $x=2$.
לפיכך, מחירו של אננס הוא: $4x=4\cdot 2=8$.
הערה: ניתן היה לסמן את מחירו של האננס ב-$x$ ולהגיע, כמובן, לתוצאה זהה.
**התשובה הנכונה היא (1).**

### שאלה נוספת - בניית משוואה

הסופרת אחינועם כתבה 5 ספרים: 3 ספרי ילדים ו-2 ספרי פרוזה.
מספר העמודים בכל ספר פרוזה גדול פי 3 ממספר העמודים בכל ספר ילדים.
ב-5 הספרים שכתבה אחינועם ישנם 450 עמודים.

כמה עמודים יש בכל ספר פרוזה?

(1) 120
(2) 150
(3) 180
(4) 200

**פתרון**

**דרך א' - פתרון אלגברי:**

נסמן את מספר העמודים בכל ספר ילדים ב-$x$ (הגורם הקטן). לפיכך, מספר העמודים בכל ספר פרוזה הוא $3x$ (גדול פי 3).
אחינועם כתבה 2 ספרי פרוזה, ולכן מספר העמודים הכולל של ספרי הפרוזה הוא: $2 \cdot 3x = 6x$.
אחינועם כתבה 3 ספרי ילדים, ולכן מספר העמודים הכולל של ספרי הילדים הוא: $3 \cdot x = 3x$.
אם כן, מספר העמודים הכולל בחמשת הספרים הוא: $6x + 3x = 9x$.
נתון כי בחמשת הספרים שכתבה אחינועם ישנם 450 עמודים ולכן: $9x = 450$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-9 ונקבל: $x = 50$.
לפיכך, מספר העמודים בכל ספר פרוזה הוא: $3x = 3 \cdot 50 = 150$.
חשוב לציין! ניתן היה לסמן את מספר העמודים בכל ספר פרוזה ב-$x$. כך או כך, היינו מגיעים לתוצאה זהה.

**דרך ב' - בדיקת תשובות:**

נמצא את מספר העמודים בכל ספר ילדים (קטן פי 3 ממספר העמודים בכל ספר פרוזה) לפי כל תשובה (מספר העמודים בכל ספר פרוזה), ולאחר מכן נבדוק אם ב-3 ספרי ילדים וב-2 ספרי פרוזה ישנם 450 עמודים:

**תשובה (1):** מספר העמודים בספר פרוזה: 120. מספר העמודים בספר ילדים: 40 ($\frac{120}{3}$).
אם כן, מספר העמודים ב-3 ספרי ילדים וב-2 ספרי פרוזה הוא: $3 \cdot 40 + 2 \cdot 120 = 120 + 240 = 360$. התשובה נפסלת.

**תשובה (2):** מספר העמודים בספר פרוזה: 150. מספר העמודים בספר ילדים: 50 ($\frac{150}{3}$).
אם כן, מספר העמודים ב-3 ספרי ילדים וב-2 ספרי פרוזה הוא: $3 \cdot 50 + 2 \cdot 150 = 150 + 300 = 450$. זו התשובה הנכונה.
כאמור, בבדיקת תשובות אין צורך לבדוק את יתר התשובות לאחר מציאת התשובה הנכונה.
**התשובה הנכונה היא (2).**

**שאלה נוספת - בניית משוואה**

מחירם הכולל של 4 מסמרים, 2 ברגים ופטיש אחד הוא 20 שקלים.
מחירם הכולל של 2 מסמרים, בורג אחד ו-2 פטישים הוא 25 שקלים.

מה סכום מחיריהם של שני מסמרים ושל בורג אחד (בשקלים)?

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 4

**<u>פתרון</u>**

**<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>**

נסמן את מחירו של כל מסמר ב-m, את מחירו של כל בורג ב-b ואת מחירו של כל פטיש ב-p.
לפי הנתון הראשון: $4m+2b+p=20$.
לפי הנתון השני: $2m+b+2p=25$.
נתבקשנו למצוא את מחיריהם של שני מסמרים ושל בורג אחד. לפיכך, עלינו להיפטר מ-p.
כדי לעשות כן נכפול את שני אגפי המשוואה הראשונה ב-2 ונקבל: $8m+4b+2p=40$.
כעת, נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הזו:

$$-\begin{cases}8m+4b+2p=40\\ 2m+b+2p=25\end{cases}$$
$$6m+3b=15$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $2m+b=5$ (אגף שמאל מבטא שני מסמרים ובורג).

**<u>דרך ב' - בדיקת תשובות:</u>**

נשתמש באותם סימונים בהם השתמשנו בדרך א'.
הנתון השני כולל 2 מסמרים ובורג אחד, הערך אשר מופיע בתשובות, ולכן ניתן למצוא את מחירו של כל פטיש.
לאחר שנמצא את מחירו של כל פטיש, נציב אותו בנתון הראשון, ונבדוק אם המתקבל בו הגיוני:
**תשובה (1):** לפי תשובה זו ($2m+b=5$) ולפי הנתון השני: $2m+b+2p=25 \Rightarrow 5+2p=25$.
נעביר את 5 אגף: $2p=20$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $p=10$. נציב $p=10$ בנתון הראשון:
$4m+2b+p=20 \Rightarrow 4m+2b+10=20$.
נעביר את 10 אגף: $4m+2b=10$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $2m+b=5$. הנתון שהתקבל תואם את התשובה - מחירם של שני מסמרים ובורג אחד הוא 5 שקלים. זו התשובה הנכונה.
כאמור, בבדיקת תשובות אין צורך לבדוק את יתר התשובות לאחר מציאת התשובה הנכונה.
**התשובה הנכונה היא (1).**

## בעיות טווחים

שאלות מהסוג הזה יעסקו בטווחים, ובהן נצטרך למצוא ערך מינימלי וערך מקסימלי.
לעיתים נתבקש למצוא ערך אשר נמצא בין שני הערכים, ולעיתים נתבקש למצוא ערך אשר אינו נמצא ביניהם.

<u>לדוגמה:</u>
בארנק מסוים יש **בין** 4 ל-16 מטבעות. המטבעות בארנק הם מטבעות מסוג 2 שקלים או 5 שקלים.

מה סכום הכסף בארנק?

לפני שנפתור את השאלה, חשוב לעמוד על משמעותה של המילה **בין**.
כאשר ניתנים לנו שני ערכים ודבר מה נמצא ביניהם, הוא יכול להיות כל אחד מהערכים הללו.
בשאלה הזו, לדוגמה, מספר המטבעות יכול להיות 4, 16 וכל ערך אשר נמצא ביניהם.
אם ישנם 4 מטבעות וכולם מסוג 2 שקלים, אזי מספר השקלים הכולל הוא 8 ( $4\cdot 2$ ).
אם ישנם 16 מטבעות וכולם מסוג 5 שקלים, אזי מספר השקלים הכולל הוא 80 ( $16\cdot 5$ ).
אם כן, הסכום בארנק הוא **בין** 8 לשקלים ל**בין** 80 שקלים.
לו היינו נשאלים: "מה יכול להיות הסכום בארנק"? היה עלינו להקיף את התשובה אשר נמצאת בטווח.
לו היינו נשאלים: "מה **לא** יכול להיות הסכום בארנק"? היה עלינו להקיף את התשובה אשר **אינה** נמצאת בטווח.

<u>דוגמה נוספת:</u>
כרטיס לגן חיות עולה 50 שקלים, כרטיס למוזיאון עולה 75 שקלים וכרטיס לתיאטרון עולה 100 שקלים.
יוני קנה 9 כרטיסים ומתוכם 2 כרטיסים למוזיאון.

כדי למצוא את הערך **המינימלי** נניח ש-7 הכרטיסים הנותרים היו כרטיסים לגן חיות (הכרטיסים הזולים ביותר - 50 שקלים).
אם כן, הוא קנה 2 כרטיסים למוזיאון ועליהם שילם 150 שקלים ( $2\cdot 75$ ).
כמו כן, הוא קנה 7 כרטיסים לגן החיות ועליהם שילם 350 שקלים ( $7\cdot 50$ ).
לפיכך, הסכום הנמוך ביותר שיכול היה יוני לשלם הוא 500 שקלים ( $150+350$ ).
כדי למצוא את הערך **המקסימלי** נניח ש-7 הכרטיסים הנותרים היו כרטיסים לתיאטרון (הכרטיסים היקרים ביותר - 100 שקלים).
אם כן, הוא קנה 2 כרטיסים למוזיאון ועליהם שילם 150 שקלים ( $2\cdot 75$ ).
כמו כן, הוא קנה 7 כרטיסים לתיאטרון ועליהם שילם 700 שקלים ( $7\cdot 100$ ).
לפיכך, הסכום הגבוה ביותר שיכול היה יוני לשלם הוא 850 שקלים ( $150+700$ ).
לאור האמור לעיל, יוני שילם בין 500 שקלים ל-850 שקלים.

ציינו קודם שעשויים לשאול אותנו לגבי ערכים אשר נמצאים בתוך הטווח שמצאנו וכן לגבי ערכים שאינם נמצאים בו.
עם זאת, ישנם מקרים מסוימים בהם ייתכן כי יהיו מספר תשובות אשר נמצאות בטווח שמצאנו.

לדוגמה:

כרטיס לגן חיות עולה 50 שקלים, כרטיס למוזיאון עולה 75 שקלים וכרטיס לתיאטרון עולה 100 שקלים.
יוני קנה 9 כרטיסים ומתוכם 2 כרטיסים למוזיאון.

מה מהבאים **אינו** יכול להיות הסכום ששילם יוני (בשקלים)?

(1) 600
(2) 625
(3) 650
(4) 700

מצאנו כי הסכום ששילם יוני נמצא בין 500 שקלים ל-850 שקלים.
בדוגמה הזו, כל התשובות נמצאות בטווח הנ"ל.
שימו לב כי ידוע שיוני קנה 2 כרטיסים בלבד של 75 שקלים, והוא שילם עליהם 150 שקלים ( $75\cdot2$ ).
מחירם של הכרטיסים האחרים הוא 50 שקלים או 100 שקלים.
לפיכך, הסכום הכולל שיוני שילם עבור הכרטיסים מוכרח להיות כפולה של 50.
בתשובה (2) ערך אשר אינו כפולה של 50, ולכן הוא לא יכול להיות הסכום הכולל שיוני שילם.
**התשובה הנכונה היא (2).**

**שאלה לדוגמה - בעיות טווחים**

במאפייה מסוימת לחמניית "קשר" עולה 4 שקלים, לחמניית "צמה" עולה 3 שקלים ולחמניית "מקל" עולה 2 שקלים.
אריאל קנה במאפייה 20 לחמניות מתוכן בין 5 ל-10 לחמניות "מקל".

כמה שילם אריאל על הלחמניות שקנה במאפייה (בשקלים)?

(1) בין 46 ל-60 (2) בין 50 ל-60 (3) בין 46 ל-70 (4) בין 50 ל-70

**פתרון**

ממבט בתשובות ניתן לראות כי מדובר בשאלת טווחים.
כדי למצוא את הסכום **המינימלי** שאריאל שילם, עלינו להניח כי הוא קנה מספר גדול ככל האפשר של לחמניות "מקל" (הלחמניות הזולות ביותר) וכן שהלחמניות הנותרות הן מסוג "צמה" (הלחמניות הזולות ביותר אחרי לחמניות "מקל").
עבור 10 לחמניות "מקל" אריאל שילם 20 שקלים ( $2\cdot10$ ). לאור האמור לעיל, אריאל קנה 20 לחמניות בסך הכול ו-10 לחמניות מסוג "מקל". לפיכך, הוא קנה 10 לחמניות נוספות ( $20-10$ ).
עבור 10 לחמניות "צמה" אריאל שילם 30 שקלים ( $3\cdot10$ ).
אם כן, הסכום הנמוך ביותר שאריאל שילם הוא 50 שקלים ( $20+30$ ). בשלב הזה ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(3).
כדי למצוא את הסכום **המקסימלי** שאריאל שילם, עלינו להניח כי הוא קנה מספר קטן ככל האפשר של לחמניות "מקל" (כאמור, הלחמניות הזולות ביותר) וכן שהלחמניות הנותרות הן מסוג "קשר" (הלחמניות היקרות ביותר).
עבור 5 לחמניות "מקל" אריאל שילם 10 שקלים ( $2\cdot5$ ).
לאור האמור לעיל, אריאל קנה 20 לחמניות בסך הכול ו-5 לחמניות מסוג "מקל".
לפיכך, הוא קנה 15 לחמניות נוספות ( $20-5$ ). עבור 15 לחמניות "קשר" אריאל שילם 60 שקלים ( $4\cdot15$ ).
אם כן, הסכום הגבוה ביותר שאריאל שילם הוא 70 שקלים ( $10+60$ ).
**התשובה הנכונה היא (4).**

# ניסוי וטעייה

דוגמה לניסוי וטעייה ראינו בסוף השיעור הקודם.
כל התשובות היו בטווח האפשרי, אך לאחת מהן לא ניתן היה להגיע באמצעות נתוני השאלה.
ישנן שאלות בבחינה שהדרך הנוחה ביותר לפתירתן היא ניסוי וטעייה.

לדוגמה:
בחנות מסוימת תבלינים נמכרים באריזות של 15 גרם או 40 גרם בלבד.
ניר רכש מחנות זו מספר אריזות של תבלינים.

מה הבאים יכול להיות משקלן הכולל של האריזות שניר רכש (בגרמים)?

(1) 35
(2) 50
(3) 65
(4) 70

איננו יודעים מה מספר האריזות שרכש ניר, ולכן לא ניתן למצוא טווח אפשרי.
לפיכך, עלינו פשוט לנסות למצוא לאיזו תשובה ניתן להגיע באמצעות הנתונים:
**תשובה (1):** כמובן שלא ניתן להגיע ל-35 גרם באמצעות אריזה של 40 גרם.
כמו כן, באמצעות 2 אריזות של 15 גרם ניתן להגיע ל-30 גרם ( $2\cdot15$ ) ואריזה נוספת של 15 גרם תביא למשקל של 45 גרם.
לפיכך, לא ניתן להגיע ל-35 גרם. התשובה נפסלת.
**תשובה (2):** באמצעות אריזה של 40 גרם ואריזה של 15 גרם ניתן להגיע למשקל של 55 גרם ( $40+15$ ).
כמו כן, ל-50 גרם לא ניתן להגיע באמצעות אריזות של 15 גרם בלבד, שכן 50 אינו כפולה של 15. התשובה נפסלת.
**תשובה (3):** כאמור, באמצעות אריזה של 40 גרם ואריזה של 15 גרם ניתן להגיע למשקל של 55 גרם.
באמצעות שקית נוספת של 15 גרם אנו חורגים מ-65 גרם. התשובה נפסלת.
כמו כן, ל-65 גרם לא ניתן להגיע באמצעות אריזות של 15 גרם בלבד, שכן 65 אף הוא אינו כפולה של 15. התשובה נפסלת.
**תשובה (4):** באמצעות אריזה של 40 גרם ו-2 אריזות של 15 גרם ניתן להגיע למשקל של 70 גרם ( $40+2\cdot15=40+30$ ).
זו התשובה הנכונה.
**התשובה הנכונה היא (4).**

**שאלה לדוגמה - ניסוי וטעייה**

במדינת מטרופוליס יש מטבעות של 5 לירות ושל 7 לירות בלבד.
רוני, תושב מטרופוליס, קנה x אבטיחים שמחירם 6 לירות ליחידה, שילם תמורתם ולא קיבל עודף.

איזה מן המספרים הבאים **אינו** יכול להיות ערכו של x?

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 4

**פתרון**

משום שעבודה עם ערכים נמוכים נוחה יותר, נתחיל בבדיקת התשובה הנמוכה ביותר:
**תשובה (2):** לפי תשובה זו, רוני קנה 2 אבטיחים במחיר של 6 לירות ליחידה. לפיכך, הוא שילם עבורם 12 לירות ($2\cdot6$).
באמצעות מטבע אחד של 5 לירות וכן מטבע אחד של 7 לירות ניתן לשלם 12 לירות ($7+5$). התשובה נפסלת.
**תשובה (3):** לפי תשובה זו, רוני קנה 3 אבטיחים במחיר של 6 לירות ליחידה. לפיכך, הוא שילם עבורם 18 לירות ($3\cdot6$).
לא ניתן להגיע לסכום של 18 לירות באמצעות מטבעות של 5 לירות ושל 7 לירות בלבד, שכן 18 אינו כפולה של 5 או של 7.
כמו כן, באמצעות 2 מטבעות של 5 לירות ומטבע אחד של 7 לירות נקבל 17 לירות ($2\cdot5+7=10+7$).
באמצעות 2 מטבעות של 7 לירות ומטבע אחד של 5 לירות נקבל 19 לירות ($2\cdot7+5=14+5$). זו התשובה הנכונה.
חשוב לציין כי בשלב הזה ניתן לסמן את התשובה הנכונה, אולם אם הזמן מאפשר זאת ניתן לבדוק את יתר התשובות כדי לוודא שלא נעשתה טעות חישוב.
**תשובה (4):** לפי תשובה זו, רוני קנה 4 אבטיחים במחיר של 6 לירות ליחידה. לפיכך, הוא שילם עבורם 24 לירות ($4\cdot6$).
באמצעות 2 מטבעות של 5 לירות וכן 2 מטבעות של 7 לירות ניתן לשלם 24 לירות ($2\cdot5+2\cdot7=10+14$). התשובה נפסלת.
**תשובה (1):** לפי תשובה זו, רוני קנה 6 אבטיחים במחיר של 6 לירות ליחידה. לפיכך, הוא שילם עבורם 36 לירות ($6\cdot6$).
באמצעות 3 מטבעות של 5 לירות וכן 3 מטבעות של 7 לירות ניתן לשלם 36 לירות ($3\cdot5+3\cdot7=15+21$). התשובה נפסלת.
**התשובה הנכונה היא (3).**

**שאלה נוספת - ניסוי וטעייה**

עידו הטיל קובייה הוגנת 5 פעמים.
כאשר הקובייה נפלה על מספר זוגי, נתן לו חברו סוכרייה אחת.
כאשר הקובייה נפלה על מספר אי-זוגי, נתן לו חברו 5 סוכריות.

מספר הסוכריות שעידו קיבל יכול להיות -

(1) 7
(2) 14
(3) 21
(4) 23

**<u>פתרון</u>**
בשאלה שניסוחה הוא "מה יכול להיות" ישנה תשובה אחת בלבד מבין התשובות שיכולה להיות, ולכן ישנן 3 תשובות שלא יכולות להיות, כלומר הן לא מסתדרות בשום מקרה שהוא. נפרוט את המקרים השונים ונבדוק לאיזו תשובה ניתן להגיע:
**תשובה (1):** 5 הטלות זוגיות פירושן 5 סוכריות. אם כן, כדי שעידו יקבל 7 סוכריות חייבת להיות הטלה אי-זוגית אחת לפחות.
הטלה אי-זוגית אחת פירושה 5 סוכריות, ואחריה צריכות להיות 4 הטלות נוספות.
גם אם כולן יהיו זוגיות, עידו יקבל 9 סוכריות ($5+4\cdot1=5+4$). התשובה נפסלת.
**תשובה (2):** כדי לקבל 14 סוכריות, עידו צריך לקבל 2 הטלות אי-זוגיות אשר פירושן 10 סוכריות ($2\cdot5$).
לאחר 2 הטלות, נותרו לו 3 הטלות אשר בהן הוא צריך לקבל מספר זוגי.
3 הטלות זוגיות פירושן 3 סוכריות. במקרה המתואר לעיל, עידו יקבל 13 סוכריות ($10+3$). התשובה נפסלת.
**תשובה (3):** כדי לקבל 21 סוכריות, עידו צריך לקבל 4 הטלות אי-זוגיות אשר פירושן 20 סוכריות ($4\cdot5$).
לאחר 4 הטלות, נותרה לו הטלה אחת אשר בה הוא צריך לקבל מספר זוגי.
הטלה אחת זוגית פירושה סוכרייה אחת. במקרה המתואר לעיל, עידו יקבל 21 סוכריות ($20+1$). זו התשובה הנכונה.
בשלב הזה ניתן לסמן את התשובה ולהמשיך הלאה.
אך אם הזמן מאפשר זאת, ניתן לוודא שהתשובה האחרונה אינה אפשרית אף היא.
**תשובה (4):** בתשובה הקודמת ראינו ש-4 הטלות אי-זוגיות פירושן 20 סוכריות.
הטלה אי-זוגית נוספת תביא ל-25 סוכריות ($20+5$), ואילו הטלה זוגית תביא ל-21 סוכריות (כפי שראינו). התשובה נפסלת.
**התשובה הנכונה היא (3).**

**שאלה נוספת - ניסוי וטעייה**

בכיסו של דני יש 4 מטבעות של שקל אחד ו-3 מטבעות של שני שקלים.

כמה סכומים **שונים** דני יכול לשלם במדויק באמצעות המטבעות שיש בכיסו?

(1) 10 (2) 2 (3) 12 (4) 7

**<u>פתרון</u>**
הסכום הנמוך ביותר שדני יכול לשלם הוא שקל אחד (מטבע של שקל).
הסכום הגבוה ביותר שהוא יכול לשלם הוא 10 שקלים (4 מטבעות של שקל אחד ו-3 מטבעות של 2 שקלים:
$4\cdot1+3\cdot2=4+6$). כמו כן, לדני יש מטבעות של שקל אחד ושל 2 שקלים. אם כן, ההפרש בין המטבעות הללו הוא שקל אחד.
לפיכך, הוא יכול באמצעותם ליצור כל סכום אפשרי בין 1 ל-10 (1, 2, 3, 4, 5...).
לאור האמור לעיל, ישנם 10 סכומים שונים זה מזה אשר באמצעותם דני יכול לשלם.
**התשובה הנכונה היא (1).**

# בעיות מרווחים

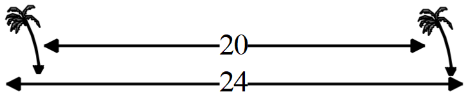
בבעיות הללו נתמקד במציאת מרווחים בין גורמים מסוימים, ונצטרך לחשב מרחקים אפשריים בין גורם אחד לאחר.

<u>לדוגמה:</u>

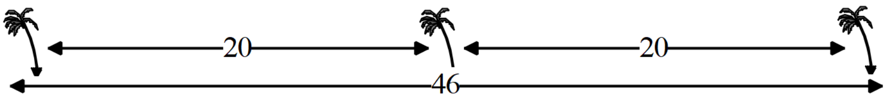
שיר רוצה לסדר על מדף 2 עציצים עגולים שקוטר כל אחד מהם 2 ס״מ.
שיר רוצה לסדר את העציצים כך שיהיה מרווח של 20 ס״מ ביניהם.

מה צריך להיות אורכו המינמלי של המדף?

המדף צריך לכלול 2 עציצים ומרווח. לפיכך, על אורכו להיות לכל הפחות 24 ס״מ ($2\cdot 2+20=4+20$).




לו שיר הייתה רוצה לסדר על מדף 3 עציצים כאלו וביניהם מרווחים של 20 ס״מ, אורכו של המדף צריך היה להיות לכל הפחות 46 ס״מ: 2 מרווחים של 20 ס״מ ($2\cdot 20$) ו-3 עציצים שקוטרם 2 ס״מ ($3\cdot 2$).




העיקרון שאנו רוצים שתיקחו מהדוגמאות הללו הוא עיקרון ״כף היד״ - לפיו כדי למצוא את מספר המרווחים בין קבוצת איברים אשר מתחילה ומסיימת באיבר, נחסר 1 ממספר האיברים.
העיקרון נקרא ״כף היד״ משום שתמיד נוכל להשתמש בכף ידינו כדי להיזכר בו - בין 5 אצבעות ישנם 4 מרווחים ($5-1$).

<u>דוגמה נוספת:</u>

שיר רוצה לסדר על מדף 10 עציצים עגולים שקוטר כל אחד מהם 2 ס״מ.
שיר רוצה לסדר את העציצים כך שיהיה מרווח של 20 ס״מ בין כל אחד.

מה צריך להיות אורכו המינמלי של המדף?

לפי עקרון ״כף היד״, בין 10 עציצים ישנם 9 מרווחים ($10-1$).
לפיכך, על אורכו של המדף להיות לכל הפחות 200 ס״מ ($10\cdot 2+9\cdot 20=20+180$).

**שאלה לדוגמה - בעיות מרווחים**

נתון רחוב ישר שאורכו 90 מטרים, ובו 8 בתים זהים אשר מסודרים בשורה.
הבית הראשון ברחוב והבית האחרון ברחוב נמצאים בשני קצותיו.
בין כל שני בתים מרווח זהה של 6 מטרים.

מה רוחבו של כל בית ברחוב זה (במטרים)?

(1) 6
(2) 7
(3) 3
(4) 4

**<u>פתרון</u>**

ברחוב ישנם 8 בתים. כמו כן, הבתים נמצאים בשני קצותיו של הרחוב.
לפיכך, ניתן לקבוע, לפי עיקרון "כף היד", כי ישנם 7 מרווחים בין הבתים.
אורך כל מרווח הוא 6 מטרים, ולכן אורכם של סך כול המרווחים הוא 42 מטרים ($6\cdot 7$).
משום שאורך הרחוב הוא 90 מטרים, ניתן לקבוע כי הבתים נפרסים על פני 48 מטרים ($90-42$).
לפיכך, רוחבו של כל בית הוא 6 מטרים ($\frac{48}{8}$).

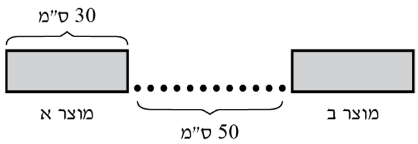
**התשובה הנכונה היא (1).**

**שאלה נוספת - בעיות מרווחים**

בפס ייצור במפעל מייצרים מוצרים זהים.
רוחבו של כל מוצר הוא 30 ס"מ.
המרחק, לכל הפחות, בין כל שני מוצרים הוא 50 ס"מ (ראו סרטוט).

כמה מוצרים, לכל היותר, ניתן להציב לאורך פס ייצור שאורכו 8.3 מטרים?

(1) 8
(2) 9
(3) 10
(4) 11




**<u>פתרון</u>**

כדי שנצליח להכניס מספר רב ככל האפשר של מוצרים, נקבע שהמרווח בין כל שני מוצרים קטן ככל האפשר (50 ס"מ).
כמו כן, נזכיר כי 8.3 מטרים הם 830 ס"מ.
למעשה, ניתן להתייחס למוצר ולמרווח שלידו כיחידה אחת שרוחבה 80 ס"מ ($30+50$).
אם כן, רוחבן של 10 יחידות כאלו הוא 800 ס"מ ($10\cdot 80$).
שימו לב כי לאחר הצבתן של 10 יחידות כאלו ישנם 10 מרווחים ו-10 מוצרים.
כאמור, אורכו של פס הייצור הוא 830 ס"מ ו-10 היחידות נפרסו על גבי 800 ס"מ.
לפיכך, יש מקום להציב מוצר אחד נוסף ($830-800$).
לאור האמור לעיל, ניתן להציב 11 מוצרים, לכל היותר, לאורכו של פס הייצור.
<u>הערה:</u> ניתן היה לבצע בדיקת תשובות - לבדוק אם ניתן להציב את מספר המוצרים לפי כל תשובה לאורך פס הייצור הנתון.
שימו לב כי נתבקשנו למצוא מספר רב ככל האפשר של המוצרים, ולכן היה עלינו להתחיל מבדיקתה של התשובה הגדולה ביותר.
**התשובה הנכונה היא (4).**

**שאלה נוספת – בעיות מרווחים**

דני צבע פסי מדרכה ברחוב מסוים שאורכו 49 מטרים בצבעים אדום ולבן.

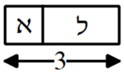
דני צבע את פסי המדרכה מתחילת הרחוב ועד סופו, כך שהמטר הראשון נצבע באדום,

2 המטרים שאחריו נצבעו בלבן וכך הלאה.

כמה קטעים הצבועים ב**לבן** יש לאורך פסי המדרכה?

(1) 18
(2) 17
(3) 16
(4) 15

<u>**פתרון**</u>

למטר אחד אשר צבוע באדום ול-2 מטרים אשר צבועים בלבן ניתן להתייחס כיחידה אחת אשר אורכה 3 מטרים: .
אורך הרחוב (49 מטרים) אינו מתחלק ב-3 (אורך היחידה), ולכן נמצא את מספר הפעמים שהיחידה נכנסת
ב-48 (המספר הקטן והקרוב ביותר ל-49): $\frac{48}{3}=16$.
כלומר, לאורך 49 המטרים של המדרכה ישנן 16 יחידות ובהן 16 קטעים הצבועים בלבן.
משום ש-16 היחידות הסתיימו בצבע הלבן, המטר הבא ייצבע באדום, ולכן אין צורך להתחשב בו.
**התשובה הנכונה היא (3).**

# סיכום

1. **<u>בעיות שברים:</u>**
   - כאשר בשאלה חלקים יחסיים בלבד, ניתן לקבוע כי השלם הוא 1 או x - בחרו באפשרות הנוחה ביותר מבחינתכם.
   - זכרו כי ניתן **להציב מספרים**.

   כדי למצוא מספר נוח להצבה נחפש אחר המכנה המשותף של השברים בשאלה (לאו דווקא הנמוך ביותר).

2. **<u>בניית ביטויים:</u>**
   - בדומה לשיעור האלגברי של ביטויים, **הצבת מספרים** במקום הנעלמים בשאלה עשויה להקל על פתרונה.

3. **<u>בניית משוואה:</u>**
   - זכרו כי כאשר אנו רוצים להשוות בין גורמים, נגדיל את הגורם הקטן יותר מבין השניים ("**תן למסכן**") בהתאם לנתוני השאלה.

     <u>לדוגמה:</u>

     a גדול פי 2 מ-b.

     b הוא הגורם הקטן מבין השניים, כלומר הוא ה"מסכן". לפיכך: $a = 2b$.
   - שאלות מסוימות מהסוג הזה יהיה נוח יותר לפתור באמצעות **בדיקת תשובות**.
   - ברוב השאלות הללו, הדבר הנוח ביותר לעשות יהיה לזהות את הגורם הקטן ביותר בשאלה ולסמנו ב-x. כך, נימנע מעבודה עם שברים. כמובן שאם נוח לכם אחרת, אין עם כך כל בעיה.

4. **<u>בעיות טווחים:</u>**
   - מוטב יהיה, לרוב, להתחיל בפתרון השאלות הללו על ידי מציאת הערך המינימלי והערך המקסימלי. בחלקן נידרש למצוא ערך אשר נמצא בתוך הטווח ובחלקן האחר ערך אשר נמצא מחוץ לטווח. אם מספר התשובות המתאימות יהיה גדול מ-1, נפסול תשובות אשר אינן יכולות להתקיים.

5. **<u>ניסוי וטעייה:</u>**
   - ישנן שאלות שהדרך הנוחה ביותר לפתירתן תהיה פשוט ניסוי וטעייה.

6. **<u>בעיות מרווחים:</u>**
   - עיקרון "כף היד" - כדי למצוא את מספר המרווחים בין קבוצת איברים אשר מתחילה ומסתיימת באיבר, נחסר 1 ממספר האיברים.
   - בשאלות מסוימות מוטב יהיה להתייחס לאיבר מסוים ולמרווח שלידו כיחידה אחת.
   - **שימו לב!** כאשר ננסה למצוא את מספר הפעמים שבהן נכנסת יחידה מסוימת בקטע מסוים, עלינו לשים לב באיזה חלק מסתיימת היחידה - באיבר (אם כן, לבדוק איזה איבר) או במרווח.

## <u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>