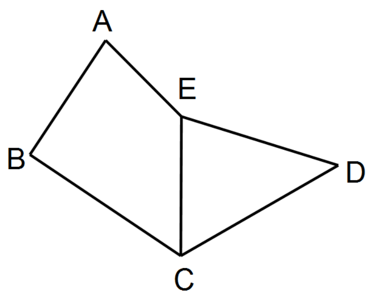
גיאומטריה

מצולעים

מצולעים

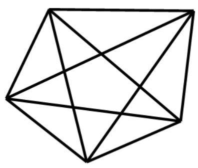
מצולע הוא צורה דו ממדית, עשויה קו "שבור" סגור.
לדוגמה : משולש, מרובע, מחומש, משושה וכו'.



אלכסון במצולע הוא הקו המחבר בין שני קדקודים שאינם סמוכים זה לזה.
לדוגמה: בסרטוט שלפניכם EC אלכסון במצולע ABCDE .

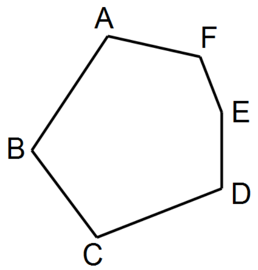
מספר האלכסונים במצולע שמספר צלעותיו n שווה ל- $\frac{n(n-3)}{2}$.

כיוון שקדקוד מסוים לא יכולה להתחבר לכדי אלכסון לא עם עצמו ולא עם שני שכניו, מספר האלכסונים של כל קדקוד הוא $(n-3)$. ישנם (n) קדקודים במצולע שיוצרים $(n-3)$ אלכסונים, אך חישוב מכפלת ביטויים אלה גורמת לספירה כפולה של מספר האלכסונים (כל אלכסון יוצא משני קדקודים). לכן, מחלקים ב- 2 את הביטוי.



לדוגמה: בסרטוט שלפניכם מצולע בעל 5 צלעות ולכן מספר אלכסוניו הוא :

$$\frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ אלכסונים}$$



סכום הזוויות הפנימיות במצולע שמספר צלעותיו n הוא: $(180 \cdot n) - 360$.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם מצולע בעל 6 צלעות.
לפיכך, סכום הזוויות הפנימיות במצולע זה הוא :

$$(180° \cdot 6) - 360° = 1080° - 360° = 720°$$

שאלה לדוגמה - מצולעים

נתונים שני מצולעים: מצולע a ומצולע b.

סכום הזוויות הפנימיות של מצולע b כפול מסכום הזוויות הפנימיות של מצולע a.

המצולע b **אינו** יכול להיות -

(1) מרובע
(2) מחומש
(3) משושה
(4) מתומן

פתרון: נמצא את סכומי הזוויות הפנימיות שבכל המצולעים עד 'מתומן' (מצולעים שמספר צלעותיהם קטן מ- 8) ונבדוק איזה מהמצולעים אינו מתאים להיות המצולע b. כלומר, נמצא באיזה מצולע סכום הזווית הפנימיות הוא לא כפולה של סכום הזוויות הפנימיות של מצולע אחר. במשולש ובמרובע סכומי הזוויות הפנימיות ידועים לנו ולכן אין לנו צורך להשתמש בנוסחה, הסכומים הם $180°$ ו- $360°$.

הנוסחה לסכום זוויות פנימיות במצולע בעל n צלעות היא: $(180 \cdot n) - 360$.

מהנוסחה ניתן להסיק כי כל צלע שנוספת למצולע (ככל שנגדיל את n) תוסיף עוד $180°$ לסכום הזוויות הפנימיות במצולע.

נכתוב את סכום הזוויות הפנימיות בכל המצולעים שמספר צלעותיהם קטן מ- 8:

משולש - $180°$, מרובע - $360°$, מחומש - $540°$, משושה - $720°$, מצולע בעל 7 צלעות - $900°$, מתומן - $1080°$.

כעת נחפש מצולע שסכום זוויותיו הפנימיות גדול פי 2 ממצולע אחר, נבדוק איזו תשובה **אינה** מתאימה:

(1) סכום הזוויות הפנימיות במרובע גדול פי 2 מסכום זה במשולש. תשובה זו מתאימה.

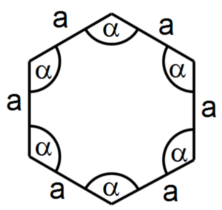
(2) סכום הזוויות הפנימיות במחומש אינו גדול פי 2 מסכום זה במצולע אחר. תשובה זו אינה מתאימה.

(3) סכום הזוויות הפנימיות במשושה גדול פי 2 מסכום זה במרובע. תשובה זו מתאימה.

(4) סכום הזוויות הפנימיות במתומן גדול פי 2 מסכום זה במחומש. תשובה זו מתאימה.

התשובה הנכונה היא (2).

מצולעים משוכללים



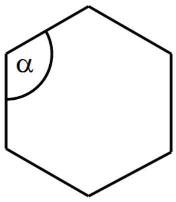
מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו וכל זוויותיו הפנימיות שוות זו לזו בגודלן.

לדוגמה: משושה משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל שש צלעות.

ריבוע הוא מצולע משוכלל בעל 4 צלעות.

משולש שווה צלעות הוא מצולע משוכלל בעל 3 צלעות.

גודל הזווית הפנימית (α) במצולע משוכלל שמספר צלעותיו n :

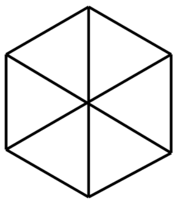


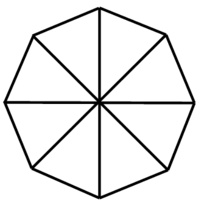
$$\alpha = \frac{(180 \cdot n) - 360}{n}$$

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם מצולע משוכלל בעל 6 צלעות.

גודל זוויות פנימית במצולע זה:

$$\alpha = \frac{(180 \cdot 6) - 360}{6} = 180 - 60 = 120^\circ$$





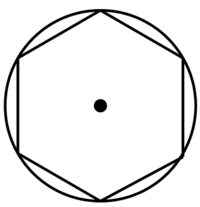
בניית עזר נפוצה בשאלות רבות בנושא מצולעים משוכללים היא חיבור קדקודי המצולע עם מרכזו.

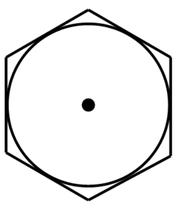
בנייה זו תיצור משולשים שווי שוקיים חופפים כמספר הצלעות במצולע (במחומש 5 משולשים, במשושה 6 משולשים וכו').

כמו כן, נוכל לגלות את זוויות המשולשים שנוצרים (ראה פירוט בהמשך).

למשל: בסרטוטים שלפניכם דוגמאות לבניית עזר זו במשושה משוכלל ובמתומן משוכלל.

* במצולעים משוכללים בעלי מספר קדקודים זוגי (מתומן, משושה, ריבוע) מרכז המצולע נמצא על האלכסונים המחברים קדקודים נגדיים במצולע.





סוג נוסף של שאלות מצולעים משוכללים כולל חסימה של מעגלים.

צורה חסומה היא צורה שכל קדקודיה נמצאים על היקף הצורה החוסמת.

כל מצולע משוכלל ניתן לחסימה במעגל ובכל מצולע משוכלל ניתן לחסום מעגל.

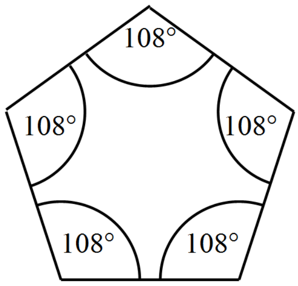
מעגל חסום בצורה הוא מעגל שכל צלעות הצורה החוסמת משיקות לו.

למשל: בסרטוטים שלפניכם מעגל חסום במשושה משוכלל ומשושה משוכלל החוסם מעגל.

בצורה משוכללת, מרכז המעגל החסום הוא גם מרכז המעגל החוסם וגם מרכז הצורה המשוכללת.

לכן, במצולעים משוכללים בעלי מספר קדקודים זוגי (מתומן, משושה, ריבוע) מרכז המעגל החוסם והחסום נמצא על האלכסונים המחברים קדקודים נגדיים במצולע.

זוויות במחומש משוכלל



מחומש משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל 5 צלעות.

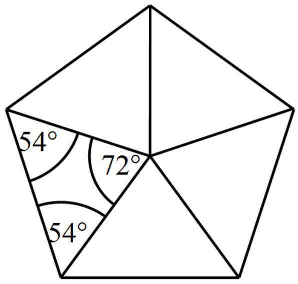
סכום הזוויות הפנימיות במחומש משוכלל הוא $540°$:

$(180\cdot n)-360=180\cdot 5-360=900-360=540°$.

גודל כל אחת מהזוויות הפנימיות במחומש משוכלל הוא $108°$:

$\alpha=\dfrac{(180\cdot n)-360}{n}=\dfrac{(180\cdot 5)-360}{5}=180-72=108°$.

בניית עזר במחומש משוכלל



כאשר נחבר את קדקודי המחומש המשוכלל עם מרכז המחומש נקבל 5 משולשים שווי שקיים זהים שזווית הראש שלהם בת $72°$ וזוויות הבסיס שלהם בנות $54°$ (ראה סרטוט).

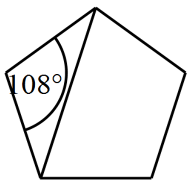
שאלה לדוגמה-מחומש משוכלל

אלכסון יחיד במחומש משוכלל מחלק את הזווית הפנימית במחומש ביחס של –

(1) $1:2$ (2) $2:3$ (3) $1:3$ (4) לא ניתן לדעת

פתרון: תחילה נחשב את גודל הזווית הפנימית במחומש משוכלל. נשתמש בנוסחה: $\alpha=\dfrac{(180\cdot n)-360}{n}$, נציב $n=5$

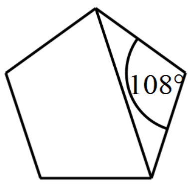
ונמצא כי גודל זווית פנימית הוא: $\alpha=\dfrac{(180\cdot 5)-360}{5}=180-72=108°$.



כעת, נסרטט מחומש משוכלל ונעביר בו אלכסון. נבדוק אילו זוויות נוספות נוכל למצוא בסרטוט. האלכסון יוצר משולש שווה שוקיים עם צלעות המחומש. זווית הראש במשולש זה היא זווית המחומש ולכן בת $108°$. כתוצאה מכך, זוויות הבסיס במשולש שנוצר הן בנות $36°$ כל אחת.

מכאן שאלכסון המחומש מחלק את זווית המחומש לזוויות בנות $36°$ ו- $72°$ ($108°-36°=72°$).

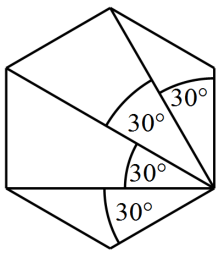
נמצא את היחס בין הזוויות: $1:2=36°:72°$.



* שימו לב: גם אילו היינו מעבירים במחומש את האלכסון השני שניתן להעביר מאותו קדקוד (ראה סרטוט נוסף), משולש זהה היה נוצר בצדו השני של המחומש והאלכסון עדיין היה מחלק את הזווית ביחס זהה, אלא שהזוויות הגדולה והקטנה היו "מחליפות צדדים".

התשובה הנכונה היא (1).

משאלה זו נלמד כי:

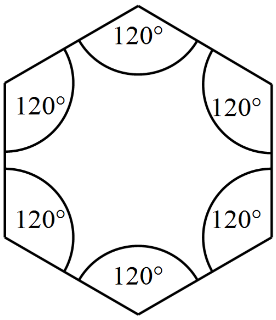


האלכסונים בצורה משוכללת מחלקים את זוויות המצולע הפנימית בצורה פופרציונית.

לדוגמה: במשושה משוכלל לכל קדקוד מגיעים 3 אלכסונים (ראה סרטוט).

אלכסונים אלה יחלקו את הזווית הפנימית ל- 4 זוויות שוות (כל אחת בת $30°$).

זוויות במשושה משוכלל



משושה משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל 6 צלעות.

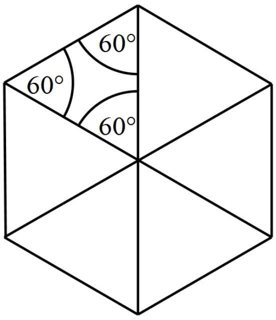
סכום הזוויות הפנימיות במשושה משוכלל הוא $720°$:

$(180 \cdot n) - 360 = 180 \cdot 6 - 360 = 1080 - 360 = 720°$.

כל אחת מהזוויות הפנימיות במצולע זה בת $120°$:

$\alpha = \frac{(180 \cdot n) - 360}{n} = \frac{(180 \cdot 6) - 360}{6} = 180 - 60 = 120°$.

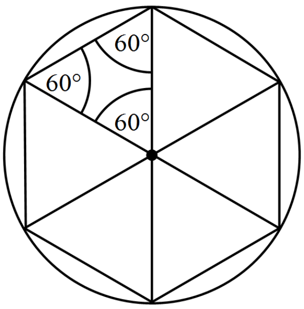
בניית עזר במשושה משוכלל



כאשר נחבר את קדקודי המשושה המשוכלל עם מרכז המשושה נקבל 6 משולשים שווי צלעות זהים.

במשושה משוכלל מרכז המצולע נמצא בנקודת מפגש האלכסונים.

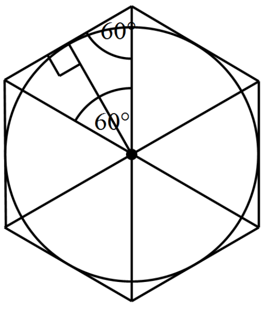
מעגל החוסם משושה משוכלל



במעגל החוסם משושה משוכלל צלע המשושה שווה באורכה לרדיוס המעגל.

בכל מצולע משוכלל בעל יותר מ- 6 צלעות צלע המצולע קטנה מרדיוס המעגל החוסם ובכל מצולע משוכלל בעל פחות מ- 6 צלעות צלע המצולע גדולה מרדיוס המעגל החוסם.

מעגל חסום במשושה משוכלל



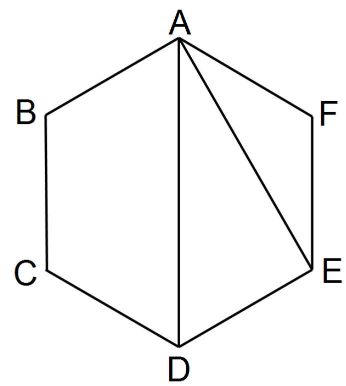
במעגל החסום במשושה משוכלל רדיוס המעגל הוא הגובה במשולש שווה הצלעות שנוצר מחיבור קדקוקדי המשושה עם מרכז המעגל (ראה סרטוט).

שאלה לדוגמה - משושה משוכלל

בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל ABCDEF.

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$$\frac{AD}{AE} = ?$$



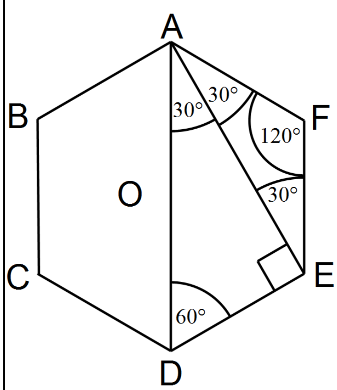
(1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

(2) $\frac{2}{1}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

פתרון: על מנת למצוא את יחס הקטעים, נביע את אורכי הקטעים שנשאלנו לגביהם בעזרת אורך צלע המשושה המשוכלל.



הקטעים שאנו נשאלים עליהם הם צלעות במשולש ADE.

במשולש זה זווית אחת הידועה לנו- הזווית ADE בת $60°$.

נחפש זוויות נוספות בסרטוט:

המשולש AFE הוא שווה שוקיים ($AF = FE$, אלו צלעות במשושה המשוכלל).

זווית הראש במשולש זה היא זווית במשושה משוכלל ולכן בת $120°$.

מכך שזוויות הבסיס של משולש זה, FAE ו- FEA בנות $30°$ כל אחת.

זווית FED בת $120°$ (זווית במשושה משוכלל) ומורכבת מזווית בסיס במשולש AFE

וזווית נוספת AED. לפיכך, $AED + 30° = 120°$ ומכאן שזווית AED בת $90°$

מהשלמת סכום זוויות במשולש, המשולש ADE הוא משולש שזוויותיו $30°,60°,90°$ ונשמר בו יחס צלעות של $1:\sqrt{3}:2$.

הניצב הקצר במשולש זה הוא צלע המשושה DE.

הניצב הארוך במשולש זה הוא הצלע AE, וכתוצאה מכך אורכה הוא $\sqrt{3} \cdot DE$.

היתר במשולש זה הוא הצלע AD, וכפועל יוצא מכך אורכה הוא $2 \cdot DE$.

נציב ביחס שנשאלנו לגביו: $\frac{AD}{AE} = \frac{2 \cdot DE}{\sqrt{3} \cdot DE} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

התשובה הנכונה היא (3).

זוויות במתומן משוכלל

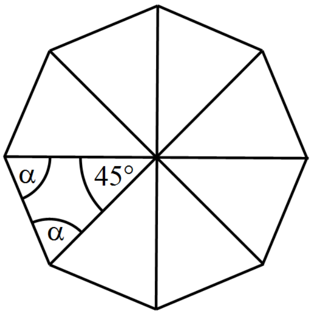
מתומן משוכלל הוא מצולע משוכלל בעל 8 צלעות.

סכום הזוויות הפנימיות במתומן משוכלל הוא $1080°$:

$(180 \cdot n) - 360 = 180 \cdot 8 - 360 = 1440 - 360 = 1080°$.

כל אחת מהזוויות הפנימיות במתומן משוכלל בת $135°$:

$\alpha = \dfrac{(180 \cdot n) - 360}{n} = \dfrac{(180 \cdot 8) - 360}{8} = 180 - 45 = 135°$.

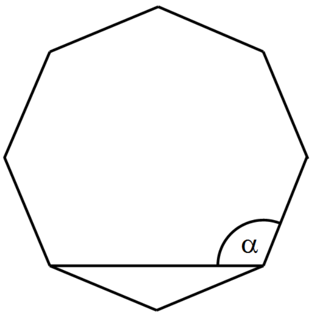


בניית עזר במתומן משוכלל

כאשר נחבר את קדקודי המתומן המשוכלל עם מרכז המתומן נקבל 8 משולשים שווי שוקיים זהים שזווית הראש שלהם בת $45°$ וזוויות הבסיס שלהם בנות $67.5°$ (בסרטוט שלפניכם $\alpha = 67.5°$).

שאלה לדוגמה - מתומן משוכלל

בסרטוט שלפניכם מתומן משוכלל.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

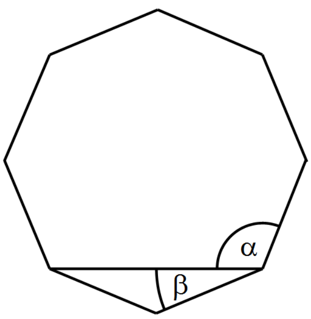
(1) $135°$
(2) $120°$
(3) $90°$
(4) $112.5°$

פתרון: הזווית המסומנת ב- α היא ההפרש בין זווית המתומן המשוכלל ובין הזווית המסומנת ב- β (ראה סרטוט מטה).
הזווית המסומנת ב- β היא זווית הבסיס במשולש שווה שוקיים (שוקיו צלעות המשושה המשוכלל) שזווית הראש שלו היא זווית פנימית במתומן משוכלל. הזווית הפנימית במתומן משוכלל היא בת $135°$, ומכאן שזווית הבסיס במשולש שווה השוקיים, β,

היא בת : $\dfrac{180 - 135}{2} = \dfrac{45}{2} = 22.5°$.

כעת, ניתן לרשום כי $\alpha = 135 - \beta$.

נציב את ערכה של הזווית β במשוואה ונמצא כי $\alpha = 135 - 22.5$.



לכן, $\alpha = 112.5°$

התשובה הנכונה היא (4).

על מנת לחסוך זמן בעת פתירת השאלות,
מומלץ לזכור בעל פה את גודל הזווית הפנימית, סכום הזוויות הפנימיות ומספר האלכסונים במצולעים המשוכללים הבאים:

סוג המצולע המשוכלל	גודל זווית פנימית	סכום זוויות פנימיות	מספר אלכסונים
משולש	60°	180°	0
מרובע	90°	360°	2
מחומש	108°	540°	5
משושה	120°	720°	9
מתומן	135°	1080°	20

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!

עמוד ריק