אלגברה

אי-שוויונות

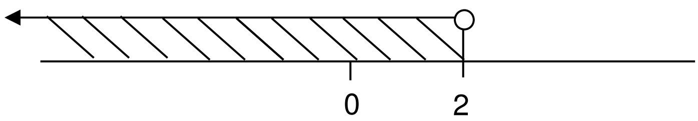
<u>שיעור אי-שוויונות</u>

אי-שוויון מייצג תחום של מספרים אפשריים עבור ערכו של נעלם מסוים או מספר נעלמים.
בשונה ממשוואה, לנעלם או לנעלמים המופיעים באי השוויון אין רק ערך אפשרי אחד, אלא תחום מסוים של ערכים אפשריים.

דוגמאות לאי-שוויון:

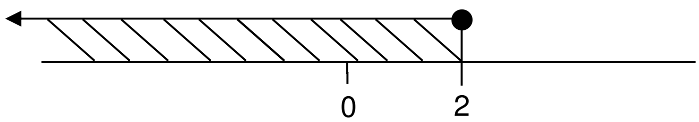
1. $x < 2$
בדוגמה זו, x יכול להיות כל מספר קטן מ- 2 (לא כולל 2).

המחשה:



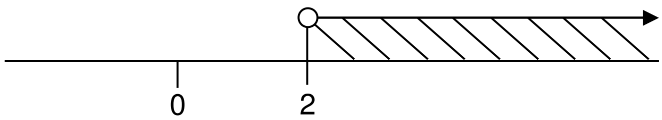
2. $x \le 2$
בדוגמה זו, x יכול להיות שווה ל- 2 או לכל מספר קטן ממנו.

המחשה:



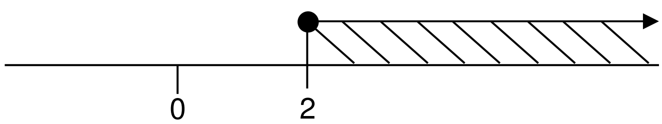
3. $2 < x$
בדוגמה זו, x יכול להיות כל מספר גדול מ- 2 (לא כולל 2).

המחשה:



4. $2 \le x$
בדוגמה זו, x יכול להיות שווה ל- 2 או לכל מספר גדול ממנו.

המחשה:



<u>פתרון אי-שוויון יבוצע לפי הכללים הבאים:</u>

<u>חיבור וחיסור:</u> בדומה למשוואה ניתן לחבר או לחסר מספרים ונעלמים משני אגפי אי-השוויון.
לדוגמה: $x-3<0$ נוסיף לשני האגפים 3 ונקבל $x<3$.

<u>כפל וחילוק:</u> מותר לכפול או לחלק את שני אגפי אי השוויון **במספר חיובי**.
לדוגמה: $\frac{x}{4}<1$ נכפול את שני האגפים ב-4 ונקבל $x<4$.

<u>הערה חשובה:</u> כאשר נכפול או נחלק את שני האגפים **במספר שלילי**, עלינו להפוך את כיוון סימן אי השוויון.
לדוגמה: $-2x<1$. נחלק את שני האגפים ב-(-2) ונקבל $x>-\frac{1}{2}$ (הסימן התהפך).

שאלה לדוגמה – כללי אי-שוויונות

נתון: $-a<\frac{b}{c}$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $-ac<b$

(2) $1<-\frac{b}{ac}$

(3) $0<a+\frac{b}{c}$

(4) אף תשובה אינה נכונה בהכרח

פתרון: בשאלה זו נתון אי-שוויון עם נעלמים, ואנו לא יודעים אם ערכי הנעלמים חיוביים או שליליים.
פעולת כפל או חילוק של אי-שוויון במספר שלילי משנה את סימן אי-השוויון. לכן, מכיוון שלא ידוע אם ערכם של הנעלמים בשאלה חיוביים או שליליים, לא נוכל לכפול או לחלק בהם את אגפי אי-השוויון.
תשובה (1), אליה נוכל להגיע על ידי כפל שני אגפי אי-השוויון בנעלם c, אינה בהכרח נכונה, שכן- אם c שלילי, סימן אי- השוויון יתחלף ונקבל $-ac>b$. תשובה (2), אליה נוכל להגיע על ידי חילוק שני אגפי אי-השוויון ב- $(-a)$, אינה בהכרח נכונה, שכן אם a הוא חיובי, סימן אי-השוויון יתחלף ונקבל $1>-\frac{b}{ac}$. לעומת זאת, תשובה (3) מתקבלת על ידי הוספת a לשני אגפי אי-השוויון. כלומר, אי-השיויון $0<a+\frac{b}{c}$ אינו תלוי בסימן של a, ולכן תשובה זו נכונה בהכרח.
התשובה הנכונה היא (3).

כלל: כאשר לא ידוע אם נעלם באי-שוויון הוא חיובי או שלילי, אסור לכפול או לחלק בו.

כלל: אסור לכפול או לחלק את אגפי אי השוויון ב- 0.
כאשר כופלים במספר שלילי את שני אגפי אי השוויון, יש להפוך את סימן אי השוויון.

אי-שוויונות עם מספר תחומים

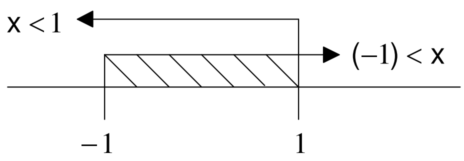
כאשר נתונים שני אי-שוויונות (או יותר), קיימות שתי אפשרויות:

1. **יש חפיפה בין התחומים** – בדרך כלל מיוצגת בשאלות על ידי המילה "**וגם**".
2. **אין חפיפה בין התחומים** – בדרך כלל מיוצגת בשאלות על ידי המילה "**או**".

חפיפה בין שני אי-שוויונות

לדוגמה: $x<1$ **וגם** $(-1)<x$.

בצורה גרפית, התחום יראה כך:

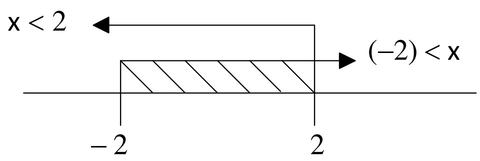


התחום שמקיים את אי-השוויון הוא התחום המסומן בקווים אלכסוניים: $-1<x<1$

חפיפה בין התחומים מתרחשת גם באי-שוויונות מעריכיים (עם חזקה).

לדוגמה: אם: $x^2<4$, אז: $x<2$ **וגם** $-2<x$

כלומר, אם: $x^2<4$, אז: $-2<x<2$



שאלה לדוגמה – חפיפה באי-שוויונות

איזה מהערכים הבאים של x **אינו** מקיים את אי-השוויון $x^2<4$?

(1) $-\frac{9}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) $-\frac{4}{5}$

פתרון: נתון כי $x^2<4$. כפי שלמדנו, פתרון אי-שוויון זה הוא $-\sqrt{4}<x<\sqrt{4}$. כלומר, $-2<x<2$.

המספר $-\frac{9}{4}$ שווה ל- $-2\frac{1}{4}$. הוא קטן מ-(-2) ולכן הוא לא מקיים את אי-השוויון.

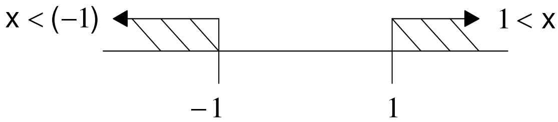
התשובה הנכונה היא (1).

כלל: כאשר נתון אי-שוויון בצורה $x^2<a$, מתקיים $x<\sqrt{a}$ וגם $\left(-\sqrt{a}\right)<x$, כלומר, תחום עם חפיפה.

במילים אחרות, התחום שמקיים אי-השוויון הוא $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$.

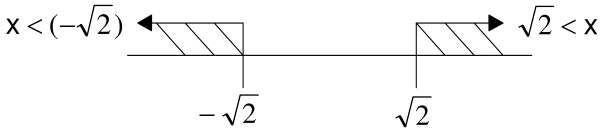
<u>אי-שוויונות ללא חפיפה:</u>

לדוגמה: נתון כי $x > 1$ **או** $x < (-1)$
בצורה גרפית, התחום יראה כך:



אי-שוויונות ללא חפיפה בין התחומים קיימים גם באי-שוויונות מעריכיים (עם חזקה).

לדוגמה: אם: $2 < x^2$, אז: $\sqrt{2} < x$ **או** $x < -\sqrt{2}$



שאלה לדוגמה – ללא חפיפה

נתון: $2ab < a^2 - 16 + b^2$

מה מהבאים אינו אפשרי?

(1) $a - b < -4$ (2) $8 < 2b - 2a$ (3) $4 < a - b$ (4) $\sqrt{2ab} < a - 4 + b$

ראשית, נבודד את הנעלמים לאגף ימין של אי-השוויון ואת המספרים לאגף שמאל של אי-השוויון לצורך נוחות.

כעת, לפנינו אי-השוויון הבא: $16 < a^2 - 2ab + b^2$.

באגף ימין של אי-השוויון מופיע פיתוח של נוסחת הכפל המקוצר $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

מכאן, אי-השוויון הוא למעשה $16 < (a - b)^2$.

כפי שלמדנו, לאי-שוויון עם חזקה ריבועית פתרון עם שני תחומים. כאשר הנעלם בריבוע גדול מהמספר, מדובר במצב "או", לפיו אפשרות אחת היא שהנעלם גדול משורש המספר ואפשרות שניה היא כי הוא קטן ממינוס שורש המספר:

לכן, הפתרון של אי-השוויון הנוכחי הוא: $\sqrt{16} < a - b$ **או** $a - b < -\sqrt{16}$, כלומר: $4 < a - b$ **או** $a - b < -4$.

נבדוק איזו מהתשובות **אינה** תואמת את הנתונים שמצאנו:

תשובה (1): אי-השוויון $a - b < -4$ מתקיים. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם נחלק ב- 2 את שני אגפי אי-השוויון: $8 < 2b - 2a$, נקבל: $4 < b - a$. אם נעביר את הנעלמים לאגף שמאל באי-השוויון ואת המספר לאגף ימין, נקבל את אי-השוויון: $a - b < -4$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): אי-השוויון $4 < a - b$ מתקיים. התשובה נפסלת.

תשובה (4): תשובה זו לא יכולה להתקבל מאף פעולה שנבצע. מקור אי-השוויון הוא בהוצאת שורש שגויה משני האגפים.
זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כאשר נתון אי-שוויון בצורת $a < x^2$ מתקיים $\sqrt{a} < x$ או $x < -\sqrt{a}$, כלומר, תחום שאין בו חפיפה.

שילוב תחומים

בשאלות אלו עלינו לשלב מספר אי-שוויונות למציאת תחום הגדרה אחד.

דוגמה: אם $1 < 2$ וגם $2 < 3$ אז בהכרח $1 < 3$.

שאלה לדוגמה – שילוב תחומים

נתון: $2 < \frac{6-a}{a}$, $0 < a$

מה מהבאים נכון **בהכרח**?

(1) $a < -2$

(2) $0 < a < 2$

(3) $2 < a$

(4) $0 < a < 1$

פתרון: נתונים שני אי-שוויונות. באחד מהם נתון תחום מסוים של a, ובשני עלינו לבודד את a ולמצוא את התחום הנוסף שלו.

נבודד את a באי-השוויון $2 < \frac{6-a}{a}$. שימו לב, אנו יודעים ש-a חיובי (הוא גדול מאפס) ולכן ניתן לכפול את שני האגפים ב- a.

זכרו, אם היינו יודעים ש-a בעל ערך שלילי היינו יכולים לכפול בו את שני אגפי אי-השוויון ולהפוך את סימן אי-השוויון, ואם לא היינו יודעים אם הוא שלילי או חיובי לא היינו יכולים לכפול בו כלל את שני אגפי אי-השוויון.

כך נקבל: $2a < 6 - a$. כעת, על ידי הוספה של a לשני האגפים נקבל: $3a < 6$. נחלק את שני האגפים ב- 3 ונקבל: $a < 2$.

כיוון שנתון כי: $0 < a$, התשובה היא התחום החופף בין תחום זה והתחום שמצאנו, כלומר: $0 < a < 2$ (קיבלנו תחום חופף ולכן ניתן לאחד את התחומים).

הערה: בתשובה (4) מופיע תחום המקיים את הנתונים אך הוא אינו נכון בהכרח, שכן ייתכן מצב בו a גדול יותר מ-1 ועדיין יקיים את הנתונים, למשל כאשר $a = 1\frac{1}{2}$.

התשובה הנכונה היא (2).

כלל: כשעוסקים בתחומים, ואנו נשאלים מה נכון **בהכרח**, נבדוק מה **תמיד** מתקיים, ולא מה יכול להתקיים.

שאלה נוספת – שילוב תחומים

נתון: מחיר 2 מכוניות גבוה ממחירם של 4 אופנועים.

מחיר 2 סירות גבוה ממחיר 6 מכוניות אך נמוך ממחיר 18 אופנועים.

מחיר סירה אחת **יכול להיות** שווה למחירם של -

(1) 5 אופנועים
(2) 7 אופנועים
(3) 5 מכוניות
(4) 3 מכוניות

נביע את הנתונים באמצעות מספר אי-שוויונות.

נסמן מחיר מכונית באות c, מחיר אופנוע באות m ומחיר סירה באות b (הסימון הוא לפי האות הראשונה של המילה באנגלית במקרה זה, אפשר גם לבחור סימון אחר כמובן).

לכן, ניתן לומר כי $4m < 2c$ וכן כי $6c < 2b < 18m$.

נצמצם את אי-השוויון הראשון והשני ב-2 ונמצא כי $2m < c$ וגם כי $3c < b < 9m$.

לא ברור עדיין מה הקשר בין מחיר מכונית למחיר אופנוע.

לכן, עלינו לקשר בין אי-השוויונות באמצעות היחסיות כדי למצוא את טווח המחירים של מחיר סירה.

כיוון ש- $2m < c$, ניתן להסיק מהרחבה פי 3 של אי-השוויון כי $6m < 3c$.

כאשר נאחד בין אי-השוויון $6m < 3c$ לבין אי-השוויון $3c < b < 9m$ נקבל כי $6m < 3c < b < 9m$.

בין היתר, לפי אי השוויון אליו הגענו, ניתן לראות כי: $6m < b < 9m$.

מחיר סירה נע בין מחיר 6 אופנועים למחיר 9 אופנועים. לכן, הוא יכול להיות שווה למחיר 7 אופנועים.

הערה לגבי תשובה (3): נשים לב שמחירה של סירה קטן ממחירם של 9 אופנועים ומחירן של 5 מכוניות גדול ממחירם של 10 אופנועים. ולכן בהכרח גם ממחירם של 9 אופנועים. לפיכך, מחירן של 5 מכוניות בהכרח גדול ממחירה של סירה אחת.

התשובה הנכונה היא (2).

כלל: אם נתון $a < b$ וגם נתון $b < c$ אז $a < b < c$ ולכן $a < c$.

שאלה נוספת – שילוב תחומים

נתון: $8 \le x \le 10$
$0 \le y \le 2$

איזו מהמשוואות הבאות **אינה** מקיימת את נתוני השאלה?

(1) $xy = 4\frac{1}{2}$

(2) $\frac{x+y^2}{x} = 1$

(3) $x + y - xy = 13$

(4) $x + xy = 8$

__פתרון:__

נבדוק את כל התשובות האפשריות:

תשובה (1): y הוא לכל הפחות 0, ולכן במקרה ש- $y = 0$ הרי ש- $x \cdot y = 0$.
x הוא לכל היותר 10 ו- y הוא לכל היותר 2, ולכן $x \cdot y$ הוא לכל היותר $2 \cdot 10 = 20$.

כל מספר בין שני הערכים הללו ($0 - 20$) אפשרי, ומכאן שהמשוואה $x \cdot y = 4\frac{1}{2}$ יכולה להתקיים (לדוגמה כאשר $y = 0.5$, $x = 9$).

התשובה נפסלת.

תשובה (2): נוכל לפשט את המשוואה כך: $x + y^2 = x$. מכאן, נחסר משני האגפים x ונקבל $y^2 = 0$, לכן בהכרח $y = 0$. כאשר $y = 0$ כל ערך של x, ובין השאר הערכים הנתונים בשאלה, יקיימו את המשוואה. $\frac{8+0^2}{8} = 1$ התשובה נפסלת.

תשובה (3): התוצאה המקסימלית של $x + y$ מתקבלת כאשר $x = 10, y = 2$ ותוצאתה: $x + y = 10 + 2 = 12$.

כדי ש: $12 - xy = 13$, אחד מהנעלמים חייב לקבל ערך שלילי, אך מכיוון ששני הנעלמים בשאלה זו הם שווים או גדולים מאפס נוכל להסיק כי מצב זה אינו יכול להתקיים. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): x הוא לכל הפחות 8. כאשר $y = 0$, מתקיים $x \cdot y = 0$, ואז $x + x \cdot y = 8 + 0 = 8$.
המשוואה אפשרית. התשובה נפסלת.
התשובה הנכונה היא (3).

שילוב של משוואה ואי-שוויון

לעיתים מופיעות במבחן שאלות שמערבות שני נתונים, כאשר אחד מהם הוא אי-שוויון והשני הוא משוואה.
שאלות מסוג זה מזכירות במקצת את נושא מערכת משוואות. דרך הפתרון גם כן תהיה דומה, ובדרך כלל תהיה מורכבת מבידוד משתנה אחד במשוואה והצבתו באי-השוויון על מנת לקבל אי-שוויון עם משתנה אחד בלבד.
לחלופין, לעתים ניתן לפתור שאלות אלה גם באמצעות הצבה.

שאלה לדוגמה – משוואה ואי-שוויון

נתון: $-1 < x < 0$

$2x = 3y$

איזה מאי-השוויונות הבאים נכון **בהכרח**?

(1) $y^2 < x^2$ (2) $x^2 < y^2$ (3) $y < x$ (4) $1 < y^2$

פתרון:

כדי לבדוק איזה מאי-השוויונות מתקיים בהכרח, נציב מספרים מתאימים לפי נתוני השאלה ונפסול תשובות.

נתון כי $-1 < x < 0$, ולכן נציב: $x = -\frac{1}{2}$.

נציב $x = -\frac{1}{2}$ במשוואה השנייה ונקבל: $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3y$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב- 3 ונקבל $-\frac{1}{3} = y$.

נבדוק את התשובות האפשריות: (ונזכור שככל ששבר קרוב יותר ל 0 הוא גדול יותר).

תשובה (1): לפי אי-שוויון זה, $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 < \left(-\frac{1}{2}\right)^2$. נפעיל את החזקה בשני האגפים ונקבל $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): לפי אי-שוויון זה, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 < \left(-\frac{1}{3}\right)^2$. נפעיל את החזקה בשני האגפים ונקבל אי-שוויון שגוי $\frac{1}{4} < \frac{1}{9}$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): לפי אי-שוויון זה, $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$. אי-שוויון זה שגוי. התשובה נפסלת.

תשובה (4): לפי אי-שוויון זה, $1 < \left(-\frac{1}{3}\right)^2$. נעלה את אגף שמאל בחזקה ונקבל את אי-השוויון השגוי $1 < \frac{1}{9}$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

<u>מציאת תחום אפשרי</u>

בשאלות מסוג זה עלינו לחשב מה תחום הערכים שיכולים לקבל משתנה אחד או יותר, לפי הנתונים.
חלק משאלות אלו נוכל לפתור על ידי הצבה של התשובות.

שאלה לדוגמה – תחום אפשרי

נתון: a ו-b הם מספרים שלמים

$$a-b=4$$
$$1 \le a \le 7$$

מה תחום הערכים האפשרי עבור b?

(1) $-3 < b < 3$
(2) $-3 \le b \le 3$
(3) $-2 \le b \le 5$
(4) $-2 < b < 5$

<u>פתרון:</u>
נוכל לפתור על ידי הצבת הערכים הקיצוניים של a, והם: $a=1$ או $a=7$.
אם נציב $a=1$, נקבל $1-b=4$. כלומר $b=(-3)$.
אם נציב $a=7$ נקבל $7-b=4$, ומכאן $b=3$.
לכן, b יכול לקבל ערכים שלמים בין 3 ל- (-3), כולל 3 ו-(-3).
כלומר, $-3 \le b \le 3$.
דרך נוספת היא לבודד את a על ידי הוספה של b לשני צדדי המשוואה כך: $a=4+b$. כעת נציב את a באי השוויון השני ונקבל: $1 \le 4+b \le 7$. על ידי העברת אגפים פשוטה נקבל שני אי שוויונות: $-3 \le b$ וגם $b \le 3$.
התשובה הנכונה היא (2).

<u>סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!</u>