אלגברה

נוסחאות כפל מקוצר

נוסחאות כפל מקוצר

<u>מבוא</u>

בבחינה הפסיכומטרית אין צורך להוכיח את נוסחאות הכפל המקוצר, כי אם לזכור אותן בלבד.

לפיכך, בשיעור הקרוב נציג את הנוסחאות בקצרה, ובעיקר נתמקד באופן שבו הן באות לידי ביטוי בבחינה.

<u>הערה:</u> אם אינכם זוכרים את מקורן של הנוסחאות, פתיחתן המלאה מוצגת בספר "יסודות מתמטיים".

כפל מקוצר בביטויים

כאמור, נציג בקצרה את שלוש הנוסחאות:

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

ההבדל בין הנוסחה הראשונה לשנייה הוא הסימן.

בנוסחה הראשונה יש **חיבור** בין האיברים, ואילו בנוסחה השנייה **חיסור**.

שימו לב כי האיברים a^2 ו-b^2 זהים מבחינת המקדם שלהם (חיובי), ואילו האיבר $2ab$ שונה מבחינת המקדם שלו - בנוסחה הראשונה הוא חיובי ובשנייה שלילי.

3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

2 נקודות חשובות:

- אין הכרח שהנוסחאות יכילו שני נעלמים, כלומר הן עשויות להכיל מספר ונעלם כמו גם שני מספרים.
  לדוגמה: $(x+7)^2$; $(\sqrt{2}+7)^2$.

- חשוב מאוד שנזכור את הנוסחאות בעל-פה משני הכיוונים.
  לדוגמה: אם אנו נתקלים בביטוי x^2+6x+9, עלינו לזהות כי מדובר ב-$(x+3)^2$.

לסיכום, זכרו את הנוסחאות בעל-פה הן לאחר הפתיחה והן לפניה.

זאת ועוד, שימו לב לתבנית בסוגריים ולא לאיברים בה.

<u>לדוגמה:</u>

$(a-b)^2=(-b+a)^2$.

מתקיים שוויון בין האיברים משום שבשניהם הנעלם a בסימן חיובי והנעלם b בסימן שלילי.

אם כן: $(a-b)^2=(-b+a)^2=a^2-2ab+b^2$.

שאלה לדוגמה - כפל מקוצר בביטויים

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)+(x+y)^2}=? \quad , \quad x,y\neq 0 \;, x\neq \pm y$$

(1) $\frac{x+y}{x}$

(2) $\frac{x-y}{2x}$

(3) $\frac{2x+2y}{y}$

(4) $\frac{x}{x+y}$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - הצבת מספרים:</u>

מאחר שהתשובות מכילות את הנעלמים בביטוי, ניתן להציב במקומם מספרים נוחים.

נציב $x=2$ ו-$y=1$ בביטוי: $\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)+(x+y)^2}=\frac{2^2-1^2}{(2-1)(2+1)+(2+1)^2}=\frac{4-1}{(1)(3)+(3)^2}=\frac{3}{3+9}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

כעת, נציב $x=2$ ו-$y=1$ בתשובות, **ונפסול** את אלו שערכן **אינו** $\frac{1}{4}$:

תשובה (1): $\frac{x+y}{x}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{x-y}{2x}=\frac{2-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $\frac{2x+2y}{y}=\frac{2\cdot 2+2\cdot 1}{1}=\frac{4+2}{1}=6$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{x}{x+y}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$. התשובה נפסלת.

<u>דרך ב' - פתרון אלגברי:</u>

לפי נוסחאות הכפל המקוצר, ניתן להציג את מונה הביטוי כך: $\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)+(x+y)^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)+(x+y)^2}$.

כדי שנוכל לצמצם את הביטוי $(x+y)$ במונה ובמכנה, נוציא אותו כגורם משותף במכנה:

$$\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)+(x+y)^2}=\frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x-y+x+y)}=\frac{(x-y)}{(x-y+x+y)}=\frac{x-y}{2x}.$$

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - כפל מקוצר בביטויים

$$\frac{x^4-4x^3+4x^2}{x^2(x-2)}=?$$

(1) x

(2) x^2

(3) $x-1$

(4) $x-2$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - הצבת מספרים:</u>

מאחר שהתשובות מכילות את הנעלם בביטוי, ניתן להציב במקומו מספר נוח.

נציב $x=1$ בביטוי: $\frac{x^4-4x^3+4x^2}{x^2(x-2)}=\frac{1^4-4\cdot1^3+4\cdot1^2}{1^2(1-2)}=\frac{1-4+4}{1(-1)}=\frac{1}{-1}=-1$.

כעת, נציב $x=1$ בתשובות, **ונפסול** את אלו שערכן **אינו** -1:

תשובה (1): $x=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $x^2=1^2=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x-1=1-1=0$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $x-2=1-2=-1$. זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב' - פתרון אלגברי:</u>

כדי להיפטר מ-x^2 במכנה, נוציא גורם משותף x^2 במונה: $\frac{x^4-4x^3+4x^2}{x^2(x-2)}=\frac{\cancel{x^2}(x^2-4x+4)}{\cancel{x^2}(x-2)}=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$.

לפי נוסחת הכפל המקוצר, ניתן להציג את מונה הביטוי כך: $\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}$.

נצמצם את הביטוי $x-2$ במונה ובמכנה: $\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}=x-2$.

התשובה הנכונה היא (4).

כפל מקוצר במספרים

בנושא הקודם של השיעור ציינו כי אין הכרח שנוסחאות הכפל המקוצר יכילו נעלמים.
חשוב לזכור כי גם אם הנוסחאות יכילו מספרים בלבד, פתיחתן נותרת זהה.

לדוגמה:
$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2=?$$

התבנית הזו מתאימה לנוסחת הכפל המקוצר השנייה $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, שכן יש בה חיסור בין איברים אשר מועלה בריבוע.

לפי הנוסחה השנייה, ניתן לפשט את הביטוי כך:
$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{7}^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=7-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+3=10-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}.$$

בכפל בין שורשים מסדר זהה, ניתן לכפול בין הבסיסים: $10-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=10-2\cdot\sqrt{7\cdot3}=10-2\cdot\sqrt{21}$.

שאלה לדוגמה - כפל מקוצר במספרים

$$\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)=?$$

(1) 14 (2) 8 (3) $3\sqrt{11}$ (4) $\sqrt{33}$

פתרון

משום שבכפל אין חשיבות לסדר האיברים, ניתן להחליף בין האיברים ולהציג את הביטוי המבוקש כך: $\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)$.

כעת, נפתח את הסוגריים לפי נוסחת הכפל המקוצר $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ונקבל: $\sqrt{11}^2-\sqrt{3}^2=11-3=8$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - כפל מקוצר במספרים

$$\sqrt{40}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=?$$

(1) 7 (2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{40}+3$ (4) 4

פתרון

את האיבר בסוגריים ניתן לפשט באמצעות נוסחת הכפל המקוצר $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ כך:
$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2=7-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}.$$

בכפל בין שורשים מסדר זהה, ניתן לכפול בין הבסיסים: $7-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=7-2\cdot\sqrt{5\cdot2}=7-2\sqrt{10}$.

ניתן להכניס את 2 אל תוך השורש כך: $7-2\sqrt{10}=7-\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}=7-\sqrt{4\cdot10}=7-\sqrt{40}$.

נציב את ערכו של הביטוי בסוגריים לאחר פישוטו בביטוי המקורי: $\sqrt{40}+7-\sqrt{40}=7$.

התשובה הנכונה היא (1).

כפל מקוצר במשוואות

עד כה עסקנו בנוסחאות הכפל המקוצר בביטויים, וראינו שהן יכולות להכיל נעלמים או מספרים.
כמו כן, ראינו שכאשר הביטויים הכילו נעלם, ניתן היה להיעזר בטכניקת הצבת מספרים.
בשונה מביטויים, במשוואות הצבת מספרים אינה נוחה והיא אף עלולה לסרבל את הפתרון, אך בחלק מהן ניתן יהיה לבצע בדיקת תשובות.
ראוי להזכיר כי נוסחאות הכפל המקוצר אינן משפיעות על האופן שבו אנו פותרים משוואה אחת או מערכת משוואות, כלומר הכלים אותם למדנו בשיעור משוואות בהחלט תקפים גם כאשר המשוואות כוללות נוסחאות כפל מקוצר.

<u>לדוגמה:</u>

נתון: $(x+y)^2=50$

$(x-y)^2=10$

$xy=?$

נפשט את המשוואה **הראשונה** באמצעות נוסחת הכפל המקוצר **הראשונה**: $(x+y)^2=50 \Rightarrow x^2+2xy+y^2=50$.

נפשט את המשוואה **השנייה** באמצעות נוסחת הכפל המקוצר **השנייה**: $(x-y)^2=10 \Rightarrow x^2-2xy+y^2=10$.

משום שאנו מעוניינים בערכו של הביטוי xy בלבד (עלינו להיפטר מ- x^2 ומ- y^2), נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה:

$$-\begin{cases} x^2+2xy+y^2=50 \\ x^2-2xy+y^2=10 \end{cases}$$
$$4xy=40$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-4 ונקבל: $xy=10$.

שאלה לדוגמה - כפל מקוצר במשוואות

נתון: $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=x^2$, $x\neq 0$

$y=?$

(1) x (2) $2x$ (3) $\frac{x}{2}$ (4) x^2-2

<u>פתרון</u>

נפשט את המונה לפי נוסחאות הכפל המקוצר: $\frac{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}{4}=x^2$.

נבצע את החיסור במונה: $\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{4}=x^2$.

נכנס איברים דומים במונה, ונצמצם את 4 במונה ובמכנה: $\frac{\cancel{4}xy}{\cancel{4}}=x^2 \Rightarrow xy=x^2$.

כעת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-x ונקבל: $y=x$.

התשובה הנכונה היא (1).

ראוי להזכיר כי נוסחאות הכפל המקוצר אינן משפיעות על האופן שבו אנו פותרים אי-שוויונות, כלומר הכלים אותם למדנו בשיעור אי-שוויונות בהחלט תקפים גם כאשר אי-השוויונות כוללים נוסחאות כפל מקוצר.

שאלה לדוגמה - כפל מקוצר באי-שוויונות

נתון: $\sqrt{a^2+16a+64}<10$, $-8<a$

a בהכרח **שונה** מ-

(1) 1

(2) 2

(3) -3

(4) 0

פתרון

דרך א' - בדיקת תשובות:

נשאלנו איזה ערך מבין התשובות בהכרח שונה מ-a.

לפיכך, אנו יכולים להציב כל אחת מהתשובות בנתון ולבדוק אם היא מקיימת אותו. אם כן, a לא בהכרח שונה מהערך בתשובה.

תשובה (1): $\sqrt{a^2+16a+64}<10 \Rightarrow \sqrt{1^2+16\cdot1+64}<10$. לאחר פישוט: $\sqrt{81}<10 \Rightarrow 9<10$.

הנתון מתקיים, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\sqrt{a^2+16a+64}<10 \Rightarrow \sqrt{2^2+16\cdot2+64}<10$. לאחר פישוט: $\sqrt{100}<10 \Rightarrow 10<10$.

10 לא קטן מ-10, אלא שווה לו. לפיכך, הנתון אינו מתקיים. זו התשובה הנכונה.

בבדיקת תשובות אין צורך לבדוק את יתר התשובות לאחר מציאת התשובה הנכונה.

דרך ב' - פתרון אלגברי:

לפי נוסחאות הכפל המקוצר, ניתן לכתוב את הביטוי אשר נמצא תחת השורש כך: $a^2+16a+64=(a+8)^2$.

לפיכך: $\sqrt{a^2+16a+64}<10 \Rightarrow \sqrt{(a+8)^2}<10$.

השורש מבטל את החזקה ולכן: $a+8<10$.

נעביר את 8 אגף ונקבל: $a<2$.

בתשובה (2) ערך שאינו קטן מ-2.

התשובה הנכונה היא (2).

כפל מקוצר ב"תחפושת"

שאלות מסוימות בבחינה עשויות להכיל אלמנטים של נוסחאות הכפל המקוצר, אך לא יהיה פשוט לזהות את אותם אלמנטים.

<u>לדוגמה:</u>
$64 \cdot 56 = ?$

הסבירות להופעה של שאלה כזו בבחינה לא גבוהה, ואם היא תופיע יהיה זה, ככל הנראה, בתחילת הפרק.
זאת, משום שניתן לפתור את התרגיל באמצעות כפל ארוך, וכן להיעזר בעובדה שספרת האחדות של תוצאת המכפלה צריכה להיות 4 (כאשר אנו כופלים מספר שמסתיים ב-4 במספר שמסתיים ב-6, על ספרת האחדות של התוצאה להיות 4, שכן $4 \cdot 6 = 24$).

לצד הדברים שנכתבו קודם, ישנה דרך פשוטה הרבה יותר לפתור את השאלה הזו:
$64 = 60 + 4$ וכן $56 = 60 - 4$.
לפיכך: $64 \cdot 56 = (60+4)(60-4)$.
ניתן לפשט את הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:
$(60+4)(60-4) = 60^2 - 4^2 = 3{,}600 - 16 = 3{,}584$.

שאלה לדוגמה - כפל מקוצר "בתחפושת"

$203 \cdot 197 - 204 \cdot 196 = ?$

(1) 7

(2) 25

(3) -1

(4) 0

<u>פתרון</u>
באופן זהה לדוגמה בשיעור, את 203 ניתן להציג כך: $203 = 200 + 3$ ואת 197 ניתן להציג כך: $197 = 200 - 3$.
לפי נוסחת הכפל המקוצר השלישית ולפי האמור לעיל: $203 \cdot 197 = (200+3)(200-3) = 200^2 - 3^2 = 40{,}000 - 9$.
באופן זהה, את 204 ניתן להציג כך: $204 = 200 + 4$ ואת 196 ניתן להציג כך: $196 = 200 - 4$.
לפי נוסחת הכפל המקוצר השלישית ולפי האמור לעיל: $204 \cdot 196 = (200+4)(200-4) = 200^2 - 4^2 = 40{,}000 - 16$
אם כן: $203 \cdot 197 - 204 \cdot 196 = 40{,}000 - 9 - (40{,}000 - 16) = 40{,}000 - 9 - 40{,}000 + 16 = 7$.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - כפל מקוצר "בתחפושת"

נתון: $a^2+b^2=45$

$a-b=-3$

$a\cdot b=?$

(1) 36

(2) 18

(3) 3

(4) 9

פתרון

כדי לקבל את הביטוי ab נעלה את שני אגפי המשוואה השנייה בריבוע, ונפתח את הסוגריים באמצעות נוסחת הכפל המקוצר השנייה:

$(a-b)^2=(-3)^2 \Rightarrow a^2-2ab+b^2=9$.

כעת, נציב את סכומם של a^2 ושל b^2 (המשוואה הראשונה) במשוואה שהתקבלה: $45-2ab=9$.

נעביר אגפים: $2ab=36$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $ab=18$.

התשובה הנכונה היא (2).

סיכום

- זכרו בעל-פה את שלוש נוסחאות הכפל המקוצר הן לאחר הפתיחה והן לפניה:

  1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

  2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

  3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

- זכרו כי אין הכרח שנוסחאות הכפל המקוצר יכילו נעלמים בלבד.
  הן עשויות להכיל נעלמים בלבד, מספרים בלבד וכן נעלמים ומספרים.
- נוסחאות הכפל המקוצר עשויות להופיע במשוואות ובאי-שוויונות, אך הן לא משפיעות על האופן שבו יש לפתור את השאלות.
- שימו לב כי לא תמיד יהיה ברור שהשאלות מכילות את נוסחאות הכפל המקוצר.

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!