אלגברה

שלמים וחלוקה

מספרים שלמים וסימני חלוקה

הנושא הבא בו נעסוק רחב ומגוון למדי, והוא למעשה נושא האלגברה הנפוץ ביותר בפרק הכמותי.
במסגרת השיעור נעסוק בהגדרות של מספרים, בתכונות שלהם, במספרים מיוחדים, בחלוקה, במושג השארית ועוד.

מספרים שלמים ועוקבים

כפי שניתן לראות, כותרתו של תת-הנושא בו נעסוק כעת היא מספרים **שלמים** ו**עוקבים**, ולכן נתחיל בהגדרתם של המושגים:

מספר **שלם** - כל מספר שמורכב מיחידות שלמות (1, 2, 80...).
למען הסר ספק, מספרים שליליים (1-, 2-, 80-) אף הם **שלמים** וכך גם 0.

מספר ש**אינו** שלם - מספר שכולל יחידות ש**אינן** שלמות (1.3, $2\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ וכך הלאה).

מספרים **עוקבים** הם מספרים שלמים מעצם הגדרתם, וההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בערך מוחלט הוא 1.
לדוגמה: (0, 1, 2); (1-, 2-, 3-); (6, 7, 8, 9, 10).
אם, לדוגמה, נתון לנו מספר שלם a, המספר העוקב ה**גדול** ממנו הוא $a+1$ והבא אחריו הוא $a+2$.
לעומת זאת, המספר העוקב ה**קטן** מ-a הוא $a-1$ והבא אחריו הוא $a-2$.

שאלה לדוגמה - מספרים עוקבים

a, b ו-c הם מספרים עוקבים, $a<b<c$.

$a+c=?$

(1) a

(2) 2a

(3) b

(4) 2b

<u>**פתרון**</u>

<u>**דרך א' - פתרון אלגברי:**</u>

משום שהתשובות הן בערכים של a ושל b, נבטא את הסכום המבוקש ($a+c$) באמצעותם תוך שאנו זוכרים כי הם עוקבים וכי $a<b<c$. נבטא את c באמצעות a: $c=a+2$.
כעת, נמצא את ערכו של הביטוי המבוקש: $a+c=a+a+2=2a+2$. אין תשובה כזו.
לפיכך, נבטא את הסכום באמצעות b. נבטא את a באמצעות b: $a=b-1$. נבטא את c באמצעות b: $c=b+1$.
נמצא את ערכו של הביטוי המבוקש: $a+c=b-1+b+1=2b$.

<u>**דרך ב' - הצבת מספרים:**</u>

נציב מספרים נוחים אשר מקיימים את הנתונים: $a=1$, $b=2$ ו- $c=3$. לפי הצבה זו, ערכו של הביטוי המבוקש הוא: $a+c=1+3=4$. כעת, נציב את ערכם של הנעלמים בתשובות, ונפסול את אלו שערכן **אינו** 4:
תשובה (1): $a=1$. התשובה נפסלת.
תשובה (2): $2a=2\cdot1=2$. התשובה נפסלת.
תשובה (3): $b=2$. התשובה נפסלת.
תשובה (4): $2b=2\cdot2=4$. זו התשובה הנכונה.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – מספרים עוקבים

תוצאת המכפלה של שני מספרים עוקבים שלפחות אחד מהם שלילי, **לא יכולה** להיות -

(1) חיובית

(2) שלילית

(3) שווה ל-0

(4) גדולה מ-1

פתרון

תחילה, נבין אילו מספרים מקיימים את נתוני השאלה (מספרים עוקבים ש**לפחות** אחד מהם שלילי):

- כל זוג מספרים שליליים ועוקבים (1-, 2-); (80-, 81-); (100-, 101-).
- זוג המספרים 1- ו-0 (1- הוא שלילי, ולכן שני המספרים הללו מקיימים את התנאי בשאלה).

כעת, נעבור לבחינת התשובות:

תשובה (1): כפל של כל זוג מספרים שליליים יניב תוצאה חיובית. התשובה נפסלת.

תשובה (2): כאמור, כפל של מספרים שליליים מניב תוצאה חיובית. כפל של 1- ב-0 מניב 0. לפיכך, לא ייתכן כי מכפלתם שלילית. זו התשובה הנכונה. בשלב הזה ניתן לסמן אותה ולעבור הלאה, אך נבדוק את יתר התשובות לשם שלמות ההסבר.

תשובה (3): כאמור, כפל של (1-) ב-0 מניב 0. התשובה נפסלת.

תשובה (4): כפל בין כל זוג מספרים שליליים עוקבים יניב תוצאה גדולה מ-1 בהכרח. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – מספרים עוקבים

נתונים 5 מספרים עוקבים שסכומם 5.

מה מכפלת 5 המספרים?

(1) 1

(2) 120

(3) 0

(4) 5

פתרון

דרך א' – הבנה אלגברית:

סכומם של חמשת המספרים העוקבים והחיוביים הקטנים ביותר (1, 2, 3, 4 ו-5) בהכרח גדול מ-5.

סכומם של חמשת המספרים העוקבים והשליליים הגדולים ביותר (1-, 2-, 3-, 4- ו-5-) בהכרח שלילי.

אם כן, חמשת המספרים בהכרח בטווח של החמישיות שהוצגו לעיל, ולכן ניתן לקבוע כי אחד מחמשת המספרים הוא בהכרח 0. תוצאתה של כל מכפלה שכוללת את המספר 0 היא 0.

דרך ב' – פתרון אלגברי:

נסמן את המספר הקטן ביותר מבין חמשת המספרים ב-a.

אם כן, האיבר השני בסדרה הוא $a+1$, השני הוא $a+2$, הרביעי הוא $a+3$ והחמישי הוא $a+4$.

לפיכך, סכומם של המספרים הוא: $a+a+1+a+2+a+3+a+4=5a+10$.

נתון כי סכומם של המספרים הוא 5 ולכן: $5a+10=5$. נעביר אגפים: $5a=-5$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-5 ונקבל: $a=-1$. לאור האמור לעיל, 5 המספרים הם: 1-, 0, 1, 2, 3. משום שאחד מהאיברים הוא 0, מכפלתם היא 0 גם כן.

התשובה הנכונה היא (3).

זוגי ואי-זוגי

בחלק הזה של השיעור נעסוק במספרים זוגיים, במספרים אי-זוגיים ובמסקנות שניתן להסיק באשר לתוצאות של פעולות חשבוניות ביניהם (חיבור, חיסור, כפל וחילוק).

כפי שעשינו בשיעור הקודם, נתחיל בהגדרות:

<u>מספר **זוגי**</u> - כל מספר **שלם**, חיובי או שלילי, שמתחלק ב-2 ללא שארית.
כלומר, כל מספר שחלוקה שלו ב-2 תניב מספר שלם.

למען הסר ספק, 0 הוא מספר זוגי היות שהוא מתחלק ב-2 ללא שארית ($\frac{0}{2}=0$).

למעשה, ניתן לקבוע כי מספר זוגי הוא כל כפולה של 2.
אם אנו מזהים שמספר כלשהו הוא כפולה של 2, ניתן מיד לקבוע כי מדובר במספר **זוגי**.
לפיכך, ניתן להציג כל מספר זוגי שהוא כך: $2\cdot n$. זאת, בהנחה ש-n הוא מספר שלם.

<u>מספר **אי-זוגי**</u> - כל מספר **שלם**, חיובי או שלילי, ש**אינו** מתחלק ב-2 ללא שארית.
אגב, חלוקה של מספר אי-זוגי ב-2 תמיד מניבה תוצאה עם שארית 1 (לדוגמה: $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$).

כעת, נתמקד בכל אחת מארבע הפעולות החשבוניות בין איברים זוגיים ואי-זוגיים, ונציג את המסקנות שניתן להסיק לגביהן:

<u>חיבור</u>

- ✓ חיבור של שני מספרים זוגיים מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (זוגי + זוגי = זוגי). לדוגמה: $2+4=6$.
- ✓ חיבור של שני מספרים אי-זוגיים מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (אי-זוגי + אי-זוגי = זוגי). לדוגמה: $3+5=8$.
- ✓ חיבור של מספר זוגי ושל מספר אי-זוגי (למותר לציין שסדר האיברים אינו משנה) מניב תוצאה **אי-זוגית** בהכרח (אי-זוגי + זוגי = אי-זוגי). לדוגמה: $2+3=5$.

<u>חיסור</u>

החוקיות בחיסור **זהה** לזו בחיבור:

- ✓ חיסור בין שני מספרים זוגיים מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (זוגי - זוגי = זוגי). לדוגמה: $2-4=-2$.
- ✓ חיסור בין שני מספרים אי-זוגיים מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (אי-זוגי - אי-זוגי = זוגי). לדוגמה: $7-3=4$.
- ✓ חיסור מספר זוגי ממספר אי-זוגי (גם כאן סדר האיברים אינו משנה) מניב תוצאה **אי-זוגית** בהכרח (אי-זוגי - זוגי = אי-זוגי). לדוגמה: $5-2=3$.

<u>כפל</u>

- כפל בין מספרים זוגיים מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (זוגי · זוגי = זוגי). לדוגמה: $4\cdot 6=24$.
- כפל בין מספרים אי-זוגיים מניב תוצאה **אי-זוגית** בהכרח (אי-זוגי · אי-זוגי = אי-זוגי). לדוגמה: $3\cdot 5=15$.
- כפל בין מספר זוגי למספר אי-זוגי (סדר האיברים אינו משנה) מניב תוצאה **זוגית** בהכרח (אי-זוגי · זוגי = זוגי). לדוגמה: $4\cdot 7=7\cdot 4=28$.

חשוב להדגיש! כפל של כל מספר שלם במספר זוגי מניב תוצאה זוגית בהכרח.
ולכן, אם נתונה לכם מכפלה של איברים שלמים, לא משנה מספרם, שתוצאתה זוגית, ניתן להסיק כי **לפחות** אחד מהאיברים זוגי. מאותה סיבה - אם נתונה לכם מכפלה של איברים שלמים שתוצאתה אי-זוגית, ניתן להסיק כי אף לא אחד מהאיברים זוגי.

חילוק

בשלוש פעולות החשבון חיבור, חיסור וכפל התוצאות בהכרח שלמות.
לעומתן, חילוק בין מספרים שלמים לא בהכרח מניב תוצאות שלמות.

- חילוק בין מספרים זוגיים יכול להניב תוצאה זוגית (לדוגמה: $\frac{8}{2}=4$), תוצאה אי-זוגית (לדוגמה: $\frac{6}{2}=3$) ושבר (לדוגמה: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$).

$$\frac{\text{זוגי}}{\text{זוגי}} = \text{זוגי\textbackslash אי-זוגי\textbackslash שבר}.$$

- חילוק בין מספרים אי-זוגיים יכול להניב תוצאה אי-זוגית (לדוגמה: $\frac{9}{3}=3$) או שבר (לדוגמה: $\frac{3}{7}$).

$$\frac{\text{אי-זוגי}}{\text{אי-זוגי}} = \text{אי-זוגי\textbackslash שבר}.$$

- חילוק של מספר זוגי במספר אי-זוגי יכול להניב תוצאה זוגית (לדוגמה: $\frac{6}{3}=2$) או שבר (לדוגמה: $\frac{2}{3}$).

$$\frac{\text{זוגי}}{\text{אי-זוגי}} = \text{זוגי\textbackslash שבר}.$$

- חילוק של מספר אי-זוגי במספר זוגי מניב שבר **בהכרח** (לדוגמה: $\frac{9}{4}$; $\frac{5}{8}$).

$$\frac{\text{אי-זוגי}}{\text{זוגי}} = \text{שבר}.$$

שאלה לדוגמה - זוגי ואי-זוגי

נתון: x הוא מספר זוגי.

הביטוי $\frac{x^2-x}{2}$ הוא בהכרח מספר -

(1) חיובי (2) שלילי (3) לא שלם (4) שלם

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

תחילה, נבחן את מונה הביטוי (x^2-x). משום ש-x זוגי, האיבר x^2 זוגי אף הוא (מספר זוגי בכל חזקה שהיא נשאר זוגי).
כפי שלמדנו בשיעור, חיסור בין שני מספרים זוגיים (x^2-x) מניב תוצאה זוגית בהכרח.
אם כן, הביטוי הנתון הוא חלוקה של מספר זוגי ב-2. מספר זוגי בהגדרתו הוא מספר שמתחלק ב-2 ללא שארית.
לפיכך, תוצאת הביטוי $\frac{x^2-x}{2}$ היא מספר שלם.

דרך ב' - הצבת מספרים:

נציב בביטוי את המספר הזוגי הנמוך ביותר $x=0$ ונקבל: $\frac{x^2-x}{2}=\frac{0^2-0}{2}=\frac{0-0}{2}=\frac{0}{2}=0$.
0 הוא מספר שלם שאינו חיובי או שלילי. לפיכך, ניתן לפסול את התשובות (1), (2) ו-(3).
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - זוגי ואי-זוגי

a, b ו-c מספרים שלמים.

נתון: $2c-1=a(b-1)$

איזה מהמספרים הבאים הוא בהכרח **זוגי**?

(1) a (2) b (3) c (4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרון

כפי שלמדנו בשיעור, כפל של מספר זוגי בכל מספר שלם מניב תוצאה זוגית. לפיכך, האיבר 2c זוגי בהכרח.

כאשר מחסרים 1 מאיבר זוגי, מתקבלת תוצאה אי-זוגית בהכרח. לפיכך, הביטוי $2c-1$ אי-זוגי בהכרח.

משום שהאגף השמאלי במשוואה הנתונה אי-זוגי, האגף הימני במשוואה אי-זוגי גם כן.

אם כן, ניתן להסיק כי האיברים a ו-$b-1$ אי-זוגיים. ניתן לפסול את תשובה (1).

משום שהאיבר $b-1$ אי-זוגי, ניתן להסיק כי b זוגי בהכרח.

הערה: אין לנו כל דרך לדעת אם c זוגי או אי-זוגי.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - זוגי ואי-זוגי

x ו-y מספרים שלמים וחיוביים.

נתון: הביטוי $(x+1)(y-1)$ זוגי.

מה נכון **בהכרח** לגבי x ולגבי y?

(1) לפחות אחד מהם זוגי

(2) לפחות אחד מהם אי-זוגי

(3) שניהם מספרים זוגיים

(4) שניהם מספרים אי-זוגיים

פתרון

כדי שמכפלה של שני מספרים תהיה זוגית, על אחד מהם **לפחות** להיות זוגי. אם כן, ישנם 3 מצבים אפשריים בשאלה הזו:

1. $(x+1)$ ו-$(y-1)$ זוגיים.

2. $(x+1)$ זוגי ו-$(y-1)$ אי-זוגי.

3. $(x+1)$ אי-זוגי ו-$(y-1)$ זוגי.

דרך א' - פתרון אלגברי:

מצב 1: אם הביטוי $(x+1)$ זוגי, x **אי-זוגי**. אם הביטוי $(y-1)$ זוגי, y **אי-זוגי**.

מצב 2: אם הביטוי $(x+1)$ זוגי, x **אי-זוגי**. אם הביטוי $(y-1)$ אי-זוגי, y **זוגי**.

מצב 3: אם הביטוי $(x+1)$ אי-זוגי, x **זוגי**. אם הביטוי $(y-1)$ זוגי, y **אי-זוגי**.

לאור האמור לעיל, לפחות אחד מהנעלמים אי-זוגי.

דרך ב' - הצבת מספרים:

נציב מספרים שמכפלתם זוגית (כפי שנתון), ונפסול תשובות שאינן נכונות בהכרח:

מצב 1: אם $(x+1)=4$, אזי $x=3$. אם $(y-1)=6$, אזי $y=7$. ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(3).

מצב 2: אם $(x+1)=4$, אזי $x=3$. אם $(y-1)=5$, אזי $y=6$. ניתן לפסול את תשובה (4).

התשובה הנכונה היא (2).

מספרים ראשוניים

מספר ראשוני הוא מספר **טבעי ושלם** אשר לו שני מחלקים **שונים** זה מזה **בלבד**: 1 ועצמו.
לפי ההגדרות של המרכז הארצי לבחינות ולהערכה, כשנאמר על מספר חיובי מסוים (x) שיש לו **מחלק** חיובי (y), הכוונה היא ש-x מתחלק ב-y **ללא שארית**.

מספר נקודות שמוטב לזכור בעל-פה לגבי מספרים ראשוניים:

- 1 אינו מספר ראשוני משום שאין לו 2 מחלקים **שונים** זה מזה.
- המספר הראשוני הקטן ביותר הוא 2.
- בהמשך לנקודה הקודמת - 2 הוא המספר הראשוני **הזוגי היחיד**.
זאת משום שכל מספר זוגי שגדול מ-2 מתחלק בעצמו ב-1 וב-2, כלומר יש לו 3 מחלקים **שונים לפחות**.
- מוטב לזכור את המספרים הראשוניים הבאים בעל-פה: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ו-29.
אם תצליחו לזכור את כל המספרים הראשוניים עד 100 - מה טוב
(31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 ו-97).
שימו לב! גם אינכם זוכרים בעל-פה את המספרים, זה בסדר גמור - ניתן לבדוק אם מספר מסוים מתחלק בגורם אחר לפי סימני החלוקה שעליהם נרחיב בהמשך.

שאלה לדוגמה - מספרים ראשוניים

בין 21 לבין a יש בדיוק 3 מספרים ראשוניים.

איזה מהמספרים הבאים **אינו** יכול להיות a?

(1) 32
(2) 12
(3) 36
(4) 10

__פתרון__
נשאלנו "מה **אינו** יכול להיות", ולכן יש 3 תשובות שכן יכולות להתקיים. נבדוק כל אחת מהתשובות, ונפסול את אלו שייתכנו:
תשובה (1): בין 21 ל-32 ישנם 3 מספרים ראשוניים: 23, 29 ו-31. התשובה נפסלת.
תשובה (2): בין 12 ל-21 ישנם 3 מספרים ראשוניים: 13, 17 ו-19. התשובה נפסלת.
תשובה (3): בין 21 ל-36 ישנם 3 מספרים ראשוניים: 23, 29 ו-31. התשובה נפסלת.
משום שהצלחנו לפסול 3 תשובות, ניתן בשלב הזה לסמן את הרביעית, אולם נבדוק אותה לשם שלמות ההסבר.
תשובה (4): בין 10 ל-21 ישנם 4 מספרים ראשוניים: 11, 13, 17 ו-19. זו התשובה הנכונה.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - מספרים ראשוניים

x ו-y הם מספרים ראשוניים.

נתון: $x < y$

$3x + y = 14$

$x = ?$

(1) 5

(2) 2

(3) 3

(4) 7

פתרון

משום שהמספר באגפה הימני של המשוואה אינו גדול במיוחד (14), ניתן לבדוק עבור אילו ערכים היא מתקיימת עוד לפני שאנו מביטים בתשובות. נתחיל מבדיקת הערך הקטן ביותר ש-x יכול להיות (2).

כאשר $x = 2$ מתקבל: $3x + y = 14 \Rightarrow 3 \cdot 2 + y = 14 \Rightarrow 6 + y = 14 \Rightarrow y = 8$.

המספר 8 אינו ראשוני ולכן מצב זה אינו ייתכן.

כאשר $x = 3$ מתקבל: $3x + y = 14 \Rightarrow 3 \cdot 3 + y = 14 \Rightarrow 9 + y = 14 \Rightarrow y = 5$.

המספר 5 ראשוני ולכן ניתן לסמן את תשובה (3).

שימו לב! ניתן היה לבדוק את התשובות לפי סדר הופעתן ולהגיע לתשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (3).

נגדיים והופכיים

מספרים **נגדיים** הם מספרים שהסכום שלהם הוא 0.
למעשה, ניתן פשוט לזכור שמספר נגדי של מספר מסוים הוא אותו מספר עם סימן מינוס.

<u>לדוגמה:</u>
המספר הנגדי של 2 הוא (2-) והסכום שלהם הוא: $2+(-2)=2-2=0$.
המספר הנגדי של x הוא (x-) והסכום שלהם הוא: $x+(-x)=x-x=0$.
המספר הנגדי של (3-) הוא 3 ($-(-3)=+3=3$) והסכום שלהם הוא: $-3+3=0$.
שימו לב! המספר הנגדי של 0 הוא 0.

מספרים **הופכיים** הם מספרים שמכפלתם שווה ל-1.
למעשה, ניתן פשוט להפוך בין המונה למכנה.

<u>לדוגמה:</u>
המספר ההופכי של 3 ($\frac{3}{1}$) הוא $\frac{1}{3}$ ומכפלתם שווה ל- $1=\frac{3}{3}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}$.
המספר ההופכי של $\frac{2}{5}$ הוא $\frac{5}{2}$ ומכפלתם שווה ל- $1=\frac{10}{10}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}$.
המספר ההופכי של x ($\frac{x}{1}$) הוא $\frac{1}{x}$ ומכפלתם שווה ל- $1=\frac{x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1}$.
שימו לב! למספר 0 אין מספר הופכי.

שאלה לדוגמה - נגדיים והופכיים

נתון: $x, y, z \neq 0$
x ו-y הם מספרים נגדיים.
x ו-z הם מספרים הופכיים.

$y\cdot z+1=?$

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) -1

<u>פתרון</u>
<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>
מהנתון לפיו x ו-y הם מספרים נגדיים, ניתן להסיק כי: $y=-x$.
מהנתון לפיו x ו-z הם מספרים הופכיים, ניתן להסיק כי: $z=\frac{1}{x}$.
נציב את שמצאנו בביטוי המבוקש: $y\cdot z+1=-x\cdot\frac{1}{x}+1=\frac{-x}{x}+1=-1+1=0$.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>
נציב מספר נוח במקום הנעלם x, ונמצא את ערכם של הנעלמים y ו-z לפי אותה הצבה. נציב $x=3$.
מהנתון לפיו x ו-y הם מספרים נגדיים, ניתן להסיק כי: $y=-3$.
מהנתון לפיו x ו-z הם מספרים הופכיים, ניתן להסיק כי: $z=\frac{1}{3}$.
נציב את שמצאנו בביטוי המבוקש: $y\cdot z+1=-3\cdot\frac{1}{3}+1=-1+1=0$.

התשובה הנכונה היא (3).

סימני חלוקה

בתת-הנושא הבא נלמד כיצד לקבוע אם מספר מסוים מתחלק באחד (או יותר) מהמספרים 2-11.
לפי ההגדרות של המרכז הארצי לבחינות ולהערכה, כאשר נתון שמספר מסוים מתחלק במספר אחר, הכוונה היא שהוא מתחלק בו **ללא שארית**.

<u>חלוקה ב-2</u>

כל מספר שספרות האחדות שלו היא זוגית (0, 2, 4, 6 ו-8) מתחלק ב-2.
<u>לדוגמה:</u> ספרת האחדות של המספר 896 היא זוגית (6), ולכן הוא מתחלק ב-2.

<u>חלוקה ב-3</u>

כל מספר שסכום הספרות שלו מתחלק ב-3, מתחלק אף הוא ב-3.
<u>לדוגמה:</u> סכום הספרות של המספר 891 הוא 18 ($8+9+1=18$).
18 מתחלק ב-3, ולכן גם 891 מתחלק ב-3.

<u>חלוקה ב-4</u>

כל מספר שספרות העשרות והאחדות שלו יוצרות מספר דו-ספרתי שמתחלק ב-4, מתחלק אף הוא ב-4.
<u>לדוגמה:</u> ספרות העשרות והאחדות של המספר 896 יוצרות את המספר 96.
96 מתחלק ב-4, ולכן גם 896 מתחלק ב-4.
שימו לב! אם אינכם זוכרים אם מספר מסוים מתחלק ב-4, חלקו אותו פעמיים ב-2.
אם מתקבלת תוצאה שלמה, סימן שהמספר מתחלק ב-4 (המספר שהתקבל הוא גם תוצאת החלוקה).
<u>לדוגמה:</u> ספרות העשרות והאחדות של המספר 876 יוצרות את המספר 76.
כשמחלקים את 76 ב-2 מקבלים 38, וכשמחלקים את 38 ב-2 מקבלים 19.
אם כן, 76 מתחלק פעמיים ב-2, ולכן הוא מתחלק ב-4.
כמו כן, זכרו כי כל מספר שמסתיים בספרות 00 מתחלק ב-4 (לדוגמה: 100, 8,000 וכך הלאה).

<u>חלוקה ב-5</u>

כל מספר שספרות האחדות שלו היא 0 או 5 מתחלק ב-5.
<u>לדוגמה:</u> ספרת האחדות של המספר 895 היא 5, ולכן הוא מתחלק ב-5.

שימו לב! כאשר מחלקים מספר שספרת האחדות שלו היא 0 ב-5, מתקבלת תוצאה **זוגית** (לדוגמה: $\frac{50}{5}=10$).

לעומת זאת, כאשר מחלקים מספר שספרת האחדות שלו היא 5 ב-5, מתקבלת תוצאה **אי-זוגית** (לדוגמה: $\frac{45}{5}=9$).

<u>חלוקה ב-6</u>

מספר מתחלק ב-6 אם הוא מתחלק **גם** ב-2 **וגם** ב-3, כלומר עליו להיות זוגי ועל סכום ספרותיו להתחלק ב-3.
<u>לדוגמה:</u> המספר 894 הוא זוגי.
כמו כן, סכום ספרותיו שווה ל-21 ($8+9+4=21$). 21 מתחלק ב-3, ולכן גם 894 מתחלק ב-3.
אם כן, 894 מתחלק **גם** ב-2 **וגם** ב-3, ולכן מתחלק גם ב-6.

<u>חלוקה ב-7</u>

כדי לבדוק אם מספר מתחלק ב-7, נכפול את ספרת האחדות שלו ב-2, נחסר את התוצאה מהמספר **ללא ספרת האחדות** ונבדוק אם התוצאה מתחלקת ב-7. אם היא אכן מתחלקת ב-7, ניתן לקבוע שהמספר מתחלק ב-7.
<u>לדוגמה:</u> ספרת האחדות של המספר 896 היא 6. נכפול אותה ב-2 ונקבל 12 ($6\cdot 2$). נחסר את 12 מ-89 (המספר **ללא ספרת האחדות**) ונקבל 77 ($89-12$).
77 מתחלק ב-7, ולכן 896 מתחלק ב-7.

<u>חלוקה ב-8</u>

כל מספר שספרות המאות, העשרות והאחדות שלו יוצרות מספר תלת-ספרתי שמתחלק ב-8, מתחלק אף הוא ב-8.
<u>לדוגמה:</u> ספרות המאות, העשרות והאחדות של המספר 1,840 יוצרות את המספר 840.
840 מתחלק ב-8, ולכן גם 1,840 מתחלק ב-8.
שימו לב! אם אינכם זוכרים אם מספר מסוים מתחלק ב-8, חלקו אותו 3 פעמים ב-2. אם מתקבלת תוצאה שלמה, סימן

שהמספר מתחלק ב-8 (המספר שהתקבל הוא גם תוצאת החלוקה).
כמו כן, כפי שלמדנו ביסודות מתמטיים, ניתן לפרק את המספר.
<u>לדוגמה:</u>
את המספר 848 ניתן לפרק ל-800 ול-48. משום שגם 800 וגם 48 מתחלקים ב-8, ניתן לקבוע כי 848 מתחלק ב-8.

<u>חלוקה ב-9</u>
כל מספר שסכום הספרות שלו מתחלק ב-9, מתחלק אף הוא ב-9.
<u>לדוגמה:</u> סכום הספרות של המספר 891 הוא 18 ($8+9+1=18$).
18 מתחלק ב-9, ולכן גם 891 מתחלק ב-9.

<u>חלוקה ב-10</u>
מספר מתחלק ב-10 אם ספרת האחדות שלו היא 0.
<u>לדוגמה:</u> ספרת האחדות של המספר 890 היא 0, ולכן הוא מתחלק ב-10.

<u>חלוקה ב-11</u>
מספר **דו-ספרתי** מתחלק ב-11 אם ספרות העשרות והאחדות שלו זהות (לדוגמה: 11, 22, 55 וכך הלאה).
כדי לדעת אם מספר **תלת-ספרתי**, או גדול יותר, מתחלק ב-11, נשים סימן פלוס (+) על הספרה הראשונה, סימן מינוס (–) על השנייה, פלוס (+) על השלישית וכך הלאה. לאחר מכן נבצע את החיבור והחיסור על פי הסימנים.
אם התקבלה תוצאה שמתחלקת ב-11, סימן שהמספר עצמו מתחלק ב-11.
<u>לדוגמה:</u> המספר 891:
$891 \Rightarrow +8-9+1=0$. המספר 0 מתחלק ב-11, ולכן 891 מתחלק ב-11.
שימו לב! 0 מתחלק בכל מספר שהוא (פרט ל-0).
<u>דוגמה נוספת:</u> המספר 9,350:
$9{,}350 \Rightarrow +9-3+5-0=11$. המספר 11 מתחלק ב-11, ולכן 9,350 מתחלק ב-11.

זכירת הכללים שהצגנו לעיל בעל-פה תסייע לכם רבות בפרק הכמותי, ולכן אנו ממליצים לעשות כן.

שאלה לדוגמה - סימני חלוקה

x הוא המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר שמתחלק ב-11 ללא שארית.

מה ספרת האחדות של x?

(1) 0 (2) 2 (3) 7 (4) 9

<u>פתרון</u>
המספר הדו-ספרתי הגדול ביותר שמתחלק ב-11 הוא 99. מכיוון ש-99 מתחלק ב-11, כל כפולה שלו מתחלקת ב-11 גם כן.
נכפול את 99 ב-10 ונקבל 990 ($99 \cdot 10$). אם נוסיף 11 ל-990 נקבל מספר ארבע-ספרתי. לפיכך: $x = 990$.
<u>דרך פתרון נוספת</u>
נוסיף למספר שספרות המאות והעשרות שלו הן 9 כל אחת מהתשובות בתור ספרת אחדות, ונבדוק אם מתקבל מספר שמתחלק ב-11, לפי הכללים שלמדנו בשיעור.
משום שאנו מעוניינים למצוא את המספר הגדול ביותר, נתחיל מבדיקת התשובות הגדולות ביותר:
תשובה (4): 999
$+9-9+9=9$. המספר 9 לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.
תשובה (3): 997
$+9-9+7=7$. המספר 7 לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.
תשובה (2): 992
$+9-9+2=2$. המספר 2 לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.
תשובה (1): 990
$+9-9+0=0$. המספר 0 מתחלק ב-11. זו התשובה הנכונה.
התשובה הנכונה היא (1).

מחלקים ומחלקים ראשוניים

בתת-נושא הבא נעסוק במחלקים של מספר.

כאמור, לפי ההגדרה של המרכז הארצי, הכוונה במחלק של מספר היא שאותו מספר מתחלק במחלק **ללא שארית**.

(**שימו לב!** ברוב המוחלט של השאלות המרכז הארצי משתמש במונח "מחלק", אולם לעיתים רחוקות יותר נעשה שימוש במונח "גורם" - שני המונחים **זהים** זה לזה).

<u>לדוגמה:</u>

המספר 8 מתחלק בעצמו וב-1. אגב, זו נקודת המוצא שלנו - כל מספר מתחלק קודם כל ב-1 ובעצמו.

כמו כן, המספר 8 מתחלק ב-2.

למעשה, על ידי כך שזיהינו ש-8 מתחלק ב-2, אנו יכולים למצוא מחלק נוסף של 8, והוא 4 שכן $2\cdot4=8$.

כדי למצוא את מחלקיו ה**ראשוניים** של מספר מסוים, עלינו לפרקו למכפלות עד שנגיע למספרים ראשוניים **בלבד**.

<u>לדוגמה:</u>

נפרק את המספר 54 כדי למצוא את מחלקיו:

נחלק את 54 ב-2 ונקבל 27.

את 2 לא ניתן לפרק עוד משום שהוא מספר **ראשוני**.

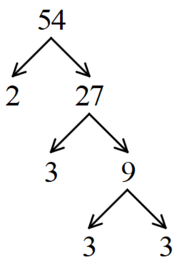
נחלק את 27 ב-3 ונקבל 9.

את 3 לא ניתן לפרק עוד משום שהוא מספר **ראשוני**.

נחלק את 9 ב-3 ונקבל 3.

כאמור, את 3 לא ניתן לפרק עוד משום שהוא מספר **ראשוני**.

אם כן, המחלקים **הראשוניים** של המספר 54 הם 3, 3, 3 ו-2 ($2\cdot3\cdot3\cdot3=54$).

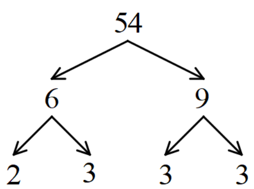


שימו לב! כדי למצוא את המחלקים הנוספים של 54, אלו שטרם מצאנו, עלינו לבצע כפל בין המחלקים הראשוניים - כל קומבינציה של כפל בין המחלקים הראשוניים תביא למחלק נוסף של המספר 54. אם כן, המחלקים שטרם מצאנו הם:

$2\cdot3=6$; $2\cdot3\cdot3=18$.

לאור האמור לעיל, המחלקים של 54 הם: 54, 27, 18, 9, 6, 3, 2 ו-1.

זכרו! גם אם היינו בוחרים לפרק את 54 בדרך אחרת, ל-9 ול-6 למשל, היינו מוצאים כמובן את אותם מחלקים:



לו היינו נשאלנו כמה מחלקים ראשוניים **שונים** יש למספר 54, התשובה הייתה 2 - שהרי קבענו כי המחלקים הראשוניים שלו הם: 3, 3, 3 ו-2. אם כן, המחלקים הראשוניים אשר **שונים** זה מזה הם 2 ו-3.

לסיכום, כדי למצוא מחלקים של מספר, נפרק אותו למחלקיו הראשוניים.

לאחר מכן נזכור כי כל קומבינציה של כפל בין המחלקים הראשוניים תביא למחלק נוסף.

שאלה לדוגמה - מחלקים ומחלקים ראשוניים

לאיזה מן המספרים הבאים מספר המחלקים הראשוניים ה**שונים** הגדול ביותר?

(1) 20

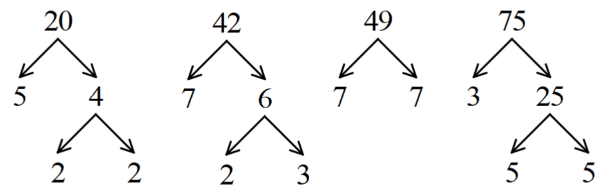
(2) 42

(3) 49

(4) 75

<u>פתרון</u>

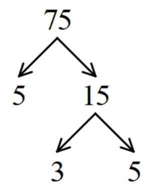
נפרק כל אחד מהמספרים בתשובות כפי שלמדנו בשיעור:



אם כן, מחלקיו הראשונים ה**שונים** של 20 הם 2 ו-5, של 42 הם 2, 3 ו-7, של 49 הוא 7 ושל 75 הם 3 ו-5.

לפיכך, ל-42 מספר המחלקים הראשוניים השונים הגדול ביותר.

זכרו! הדרך שבה נבחר לפרק את המספר אינה משנה - בכל דרך שנבחר נגיע לאותם מחלקים. למשל:



התשובה הנכונה היא (2).

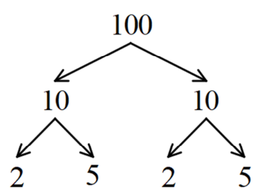
שאלה נוספת - מחלקים ומחלקים ראשוניים

כמה מחלקים **שונים** יש למספר 100?

(1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10

<u>פתרון</u>

ראשית, נזכיר כי כל מספר מתחלק בעצמו וב-1. כעת, נפרק את 100 כפי שלמדנו בשיעור:



אם כן, המחלקים של 100 שמצאנו עד כה הם: 1, 2, 5, 10 ו-100. כלומר, 5 מחלקים שונים.

כעת, נבדוק אילו מחלקים ניתן למצוא באמצעות כפל בין המחלקים הראשוניים:

$2\cdot2=4$; $2\cdot2\cdot5=20$; $5\cdot5=25$; $2\cdot5\cdot5=50$.

לאור האמור לעיל, ל-100 ישנם 9 מחלקים שונים (1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ו-100).

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - מחלקים ומחלקים ראשוניים

נתון: $a = 2^3 \cdot 6^4 \cdot 15$

באיזה מהמספרים הבאים a **אינו** מתחלק ללא שארית?

(1) 21

(2) 8

(3) 36

(4) 18

פתרון

כדי שמספר מסוים (a) יתחלק במספר אחר (התשובות) על המספר בתשובות להכיל את אותם מחלקים של המספר a.

את המספר a ניתן להציג כך: $a = 2^3 \cdot 6^4 \cdot 15 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 15 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$.

שימו לב! בדוגמה הזו לא היה צורך ממש לפרק את המספר כפי שעשינו. מספיק היה להבין שהמספר 6 מורכב מהמחלקים 2 ו-3, ושהמספר 15 מורכב מהמחלקים הראשוניים 3 ו-5.

נעבור לבדיקת התשובות:

תשובה (1): את המספר 21 ניתן לפרק ל- $3\cdot 7$. ל-a אין את המחלק הראשוני 7, ולכן הוא לא מתחלק ב-21.

זו התשובה הנכונה. בשלב הזה כבר ניתן לסמנה, אולם נבדוק את יתר התשובות לשם שלמות ההסבר.

תשובה (2): את המספר 8 ניתן לפרק ל- $2\cdot 2\cdot 2$. המספר a מכיל את המספר 2 יותר מ-3 פעמים. לפיכך, a מתחלק ב-8. התשובה נפסלת.

תשובה (3): את המספר 36 ניתן לפרק ל- $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 9\cdot 4$.

המספר a מכיל את 2 יותר מפעמיים וכך גם לגבי 3. לפיכך, a מתחלק ב-36. התשובה נפסלת.

תשובה (4): את המספר 18 ניתן לפרק ל- $2\cdot 3\cdot 3 = 9\cdot 2$. המספר a מכיל את 3 יותר מפעמיים וכך גם לגבי 2. לפיכך, a מתחלק ב-18. התשובה נפסלת.

אגב, משמצאנו ש-a מתחלק ב-36 ניתן היה לקבוע כי הוא מתחלק ב-18 גם מבלי לפרק אותו, שכן $18\cdot 2 = 36$.

התשובה הנכונה היא (1).

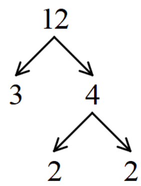
מחלקים משותפים

בתת-הנושא הבא נעסוק במחלקים משותפים של מספרים.

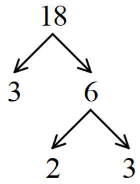
<u>לדוגמה:</u>

כמה מחלקים ראשוניים משותפים **שונים** יש ל-12 ול-18?

כפי שלמדנו קודם, נמצא את המחלקים הראשוניים של 12:



כמו כן, נמצא את המחלקים הראשוניים של 18:

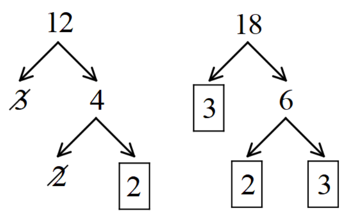


אם כן, ל-12 ול-18 שני מחלקים ראשוניים משותפים שונים: 2 ו-3.

שימו לב כי מציאת המחלקים הראשוניים המשותפים של שני מספרים עשויה לעזור לנו גם במציאת המכנה המשותף הנמוך ביותר שלהם.
לעיתים, כדי למצוא מכנה משותף של שני מספרים אנו נוטים לכפול ביניהם.
אולם, לא תמיד פעולה זו תוביל אותנו למכנה המשותף הנמוך ביותר, ולעיתים הכפל יהיה לא פשוט.

כדי למצוא את המכנה המשותף הנמוך ביותר של שני מספרים, כלומר את המספר הנמוך ביותר שמתחלק בשניהם, אנו יכולים לכפול בין המחלקים הראשוניים השונים של כל אחד מהמספרים תוך שאנו מצמצמים כפילויות.
שימו לב! צמצום הכפילויות צריך להיעשות **פעם אחת בלבד** ו**באחד המספרים בלבד**.

ניקח לדוגמה את המספרים שאיתם עבדנו קודם לכן.
המחלקים הראשוניים של 12 הם: 3, 2 ו-2.
המחלקים הראשוניים של 18 הם: 3, 2 ו-3.
המספר 3 הוא מחלק ראשוני משותף של 12 ושל 18, ולכן נתעלם ממנו באחד מהם (לא משנה באיזה מספר נבחר כל עוד נעשה כן בצורה מסודרת).
המספר 2 הוא מחלק ראשוני משותף של 12 ושל 18, ולכן נתעלם ממנו באחד מהם.
אם כן, המחלקים שנותרו לנו הם: 2, 2, 3 ו-3.
מכפלתם של ארבעת המחלקים הללו היא: $2\cdot2\cdot3\cdot3=36$.
לפיכך, המכנה המשותף הנמוך ביותר של 18 ושל 12 הוא 36.
נמחיש זאת על גבי סרטוט:



שאלה לדוגמה - מחלקים משותפים

אור: כל מספר שמתחלק ב-8 וב-6 מתחלק גם ב-24.
לירון: כל מספר שמתחלק ב-8 וב-6 מתחלק גם ב-48.

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) רק אור צודק

(2) רק לירון צודק

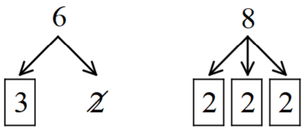
(3) גם אור וגם לירון צודקים

(4) גם אור וגם לירון טועים

פתרון

המספר 24 מתחלק ב-8 ($\frac{24}{8}=3$) וב-6 ($\frac{24}{6}=4$).

לפיכך, ניתן כבר בשלב הזה לקבוע שלירון טועה, שהרי 24 מתחלק ב-8 וב-6, אך לא ב-48.
אם כן, ניתן לפסול את התשובות (2) ו-(3).
כעת, נמצא את המכנה המשותף הנמוך ביותר של 6 ושל 8, כפי שלמדנו בשיעור - נזכור לצמצם כפילויות ובאחד המספרים בלבד.
המחלקים הראשוניים של 6 הם: 2 ו-3.
המחלקים הראשוניים של 8 הם: 2, 2, ו-2.
המספר 2 הוא מחלק ראשוני משותף של 6 ושל 8, ולכן נתעלם ממנו באחד מהם.
אם כן, המחלקים שנותרו לנו הם: 2, 2, 2 ו-3.
מכפלתם של ארבעת המחלקים הללו היא: $2\cdot2\cdot2\cdot3=24$.
לפיכך, המכנה המשותף הנמוך ביותר של 6 ושל 8 הוא 24.
נמחיש זאת על גבי סרטוט:



היות שהמכנה המשותף הנמוך ביותר של 6 ושל 8 הוא 24, כל מספר שמתחלק ב-6 וב-8 מתחלק ב-24.
התשובה הנכונה היא (1).

שארית

עד כה עסקנו במקרים שבהם התוצאות שהתקבלו בחלוקה בין מספרים היו שלמות, כלומר תוצאות ללא שארית.
בתת-הנושא הבא נסביר את המושג שארית, ונלמד כיצד למצוא את השארית בחלוקה בין מספרים.

<u>**שארית:**</u> המספר שנשאר לאחר חלוקה, ושלא ניתן לחלקו ולקבל מספר שלם.

<u>לדוגמה:</u>

כשמחלקים את 8 ב-7 מקבלים 1 עם שארית של 1 ($\frac{8}{7}=\frac{7+1}{7}=\frac{7}{7}+\frac{1}{7}=1+\frac{1}{7}=1\frac{1}{7}$).

לחלופין, ניתן להסביר זאת כך: 7 נכנס ב-8 פעם אחת בלבד עם שארית 1.

<u>דוגמה נוספת:</u>

לאורי 50 שקלים והוא מעוניין לקנות בכל כספו מספר גדול ככל האפשר של ארטיקים. מחיר כל ארטיק הוא 8 שקלים.

50 לא מתחלק ב-8. המספר הקרוב ביותר ל-50 אשר מתחלק ב-8 הוא 48: $\frac{48}{8}=6$.

לפיכך, אורי יכול לקנות בכספו 6 ארטיקים, והעודף שיישאר לו לאחר קנייתם הוא 2 שקלים ($50-48$).

העודף שאורי קיבל, 2 השקלים, הם למעשה השארית. ניתן להסתכל על כך גם באופן הבא:

$$\frac{50}{8}=\frac{48+2}{8}=\frac{48}{8}+\frac{2}{8}=6+\frac{2}{8}=6\frac{2}{8}.$$

<u>**הערה:**</u> אומנם את השבר $\frac{2}{8}$ ניתן לצמצם ($\frac{1}{4}$), אך במקרה של שארית אין לעשות כן משום שהדבר יוביל אותנו לתוצאה **שגויה**.

באופן כללי, תמיד ניתן להתייחס לחלוקה בין מספרים כאל רכישה שאנו מבצעים, ולעודף שלו אנו זכאים כאל שארית.

<u>דוגמה נוספת - הצגת שארית כביטוי אלגברי:</u>

כאשר אנו יודעים שמספר מסוים מתחלק ב-8 עם שארית 2, ניתן להציגו כך (עבור כל n שלם): $8n+2$.

זאת, משום ש-8n בהכרח מתחלק ב-8, והחלק שיישאר לאחר החלוקה הוא 2 ($\frac{8n+2}{8}=\frac{8n}{8}+\frac{2}{8}=n+\frac{2}{8}$).

נציב $n=3$ לדוגמה: $8n+2=8\cdot 3+2=24+2=26$.

26 הוא מספר שמתחלק ב-8 עם שארית 2 ($\frac{26}{8}=3\frac{2}{8}$).

<u>דוגמה נוספת - הצגת שארית כביטוי אלגברי:</u>

לאורי 50 שקלים והוא מעוניין לקנות בכל כספו מספר גדול ככל האפשר של מסטיקים. מחיר כל מסטיק הוא 7 שקלים.

המספר הקרוב ביותר ל-50 אשר מתחלק ב-7 הוא 49: $\frac{49}{7}=7$.

לפיכך, אורי יכול לקנות בכספו 7 מסטיקים, והעודף שיישאר לו לאחר קנייתם הוא שקל אחד ($50-49$).

אם כן, 50 מתחלק ב-7 עם שארית 1.

באופן זהה לדוגמה שהוצגה קודם, כאשר אנו יודעים שמספר מסוים מתחלק ב-7 עם שארית 1,
ניתן להציגו כך (עבור כל n שלם): $7n+1$.

<u>דוגמה נוספת - הצגת שארית כביטוי אלגברי:</u>

לאורי 50 שקלים והוא מעוניין לקנות בכל כספו מספר גדול ככל האפשר של סוכריות. מחיר כל סוכרייה הוא 4 שקלים.

המספר הקרוב ביותר ל-50 אשר מתחלק ב-4 הוא 48: $\frac{48}{4}=12$.

לפיכך, אורי יכול לקנות בכספו 12 סוכריות, והעודף שיישאר לו לאחר קנייתן הוא 2 שקלים ($50-48$).

אם כן, 50 מתחלק ב-4 עם שארית 2.

כאשר אנו יודעים שמספר מסוים מתחלק ב-4 עם שארית 2, ניתן להציגו כך (עבור כל n שלם): $4n+2$.

שימו לב!

בשברים בהם המונה קטן מהמכנה - **המונה הוא השארית**.

<u>לדוגמה:</u> השארית של $\frac{3}{4}$ היא 3. זאת משום ש-4 נכנס ב-3 אפס פעמים עם שארית 3.

<u>דוגמה נוספת:</u> השארית של $\frac{2}{6}$ היא 2. זאת משום ש-6 נכנס ב-2 אפס פעמים עם שארית 2.

כמו כן, כאשר אנו מוסיפים למונה את המכנה, לא משנה כמה פעמים, השארית נשמרת.

<u>לדוגמה:</u> השארית של $\frac{3}{4}$ היא 3. נוסיף למונה (3) את המכנה (4) ונקבל: $\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{\boxed{3}}{4}$.

<u>דוגמה נוספת:</u> השארית של $\frac{2}{6}$ היא 2. נוסיף למונה (2) את המכנה (6) ונקבל: $\frac{2+6}{6}=\frac{8}{6}=1\frac{\boxed{2}}{6}$.

נוסיף למונה החדש (8) את המכנה (6) ונקבל: $\frac{8+6}{6}=\frac{14}{6}=2\frac{\boxed{2}}{6}$.

שאלה לדוגמה - שארית

a הוא מספר שלם וחיובי.

שארית החלוקה של a ב-2 היא 1.

מה שארית החלוקה של $(a+1)$ ב-3?

(1) 1

(2) 2

(3) 0

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

בתחילת השיעור קבענו כי חלוקה של כל מספר אי-זוגי ב-2 מניבה תוצאה עם שארית 1.

לפיכך, ניתן לקבוע כי a אי-זוגי. אם כן, ניתן לקבוע כי $(a+1)$ הוא מספר זוגי.

אין לנו כל דרך לדעת את שארית החלוקה של מספר זוגי כלשהו ב-3 מבלי לדעת את ערכו.

לדוגמה: $\frac{4}{3}=1\frac{\boxed{1}}{3}$; $\frac{8}{3}=2\frac{\boxed{2}}{3}$; $\frac{12}{3}=4$.

שימו לב כי 12 מתחלק ב-3 ללא שארית, וכאשר מספר מתחלק במספר אחר ללא שארית, השארית היא 0.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>

נציב מספר ששארית החלוקה שלו ב-2 היא 1: $a=3$.

כעת, נחלק את $(a+1)=3+1=4$ ב-3 ונקבל: $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$, כלומר שארית 1.

כעת, נבצע הצבה נוספת: $a=5$.

נחלק את $(a+1)=5+1=6$ ב-3 ונקבל: $\frac{6}{3}=2$, כלומר שארית 0.

לא ייתכן כי ישנן 2 תשובות נכונות, ולכן לא ניתן לדעת לפי הנתונים.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - שארית

כמה מספרים **אי-זוגיים** בין 0 ל-40 מתחלקים ב-4 עם שארית 3?

(1) 11

(2) 10

(3) 6

(4) 5

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

משום ש- $10=\frac{40}{4}$ ניתן לקבוע כי ישנם 10 מספרים חיוביים שמתחלקים ב-4.

אולם, עלינו לזכור כי 0 מתחלק בכל המספרים (פרט ל-0), ולכן עלינו להתחשב גם בו.

אם כן, ישנם 11 מספרים בין 0 ל-40 שמתחלקים ב-4 ללא שארית.

אם נוסיף 3 לכל אחד מהמספרים שמתחלקים ב-4 (0, 4, 8, 12 וכך הלאה), נקבל מספר אי-זוגי שמתחלק ב-4 עם שארית 3 (למשל: $\frac{3}{4}=\frac{0+3}{4}$; $1\frac{\boxed{3}}{4}=\frac{7}{4}=\frac{4+3}{4}$; $2\frac{\boxed{3}}{4}=\frac{11}{4}=\frac{8+3}{4}$; $3\frac{\boxed{3}}{4}=\frac{15}{4}=\frac{12+3}{4}$ וכך הלאה).

לכאורה, אם ישנם 11 מספרים בין 0 ל-40 שמתחלקים ב-4 ללא שארית, ישנם 11 מספרים שנוסיף להם 3 ונקבל מספר אי-זוגי שמתחלק ב-4 עם שארית 3.

למרות זאת, בחישוב שתואר לעיל נכלל המספר 40.

כאשר מוסיפים 3 ל-40 מתקבל 43, מספר אשר לא נמצא בתחום הנתון השאלה.

לאור האמור לעיל, ישנם 10 מספרים אי-זוגיים אשר מתחלקים ב-4 עם שארית 3.

דרך ב' - בדיקה "ידנית":

משום שהמספרים בתשובות אינם גדולים, ניתן למנות את המספרים שעונים על תנאי השאלה, גם אם איננו זוכרים את שתואר בדרך א'. כפי שלמדנו בשיעור, בשבר שבו המונה הקטן מהמכנה, **המונה הוא השארית**.

לפיכך, המספר הקטן ביותר שמתחלק ב-4 עם שארית 3 הוא 3 ($\frac{3}{4}$).

כמו כן, כפי שלמדנו בתת-הנושא הזה, ניתן להוסיף למונה את המכנה והשארית תישמר.

לפיכך, נוסיף 4 ל-3, כך גם לתוצאה וכך נעשה עד שנגיע ל-40.

אם כן, המספרים האי-זוגיים שמתחלקים ב-4 עם שארית 3 הם:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 ו-39. סך הכול 10 מספרים.

התשובה הנכונה היא (2).

סיכום

1. מספרים שלמים ועוקבים:

- מספר **שלם** הוא כל מספר שמורכב מיחידות שלמות.
- מספר ש**אינו** שלם הוא מספר שכולל יחידות ש**אינן** שלמות.
- מספרים **עוקבים** הם מספרים שלמים מעצם הגדרתם, וההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בערך מוחלט הוא 1.

2. זוגי ואי-זוגי:

- מספר זוגי הוא כל מספר שלם, חיובי או שלילי, שמתחלק ב-2 ללא שארית (גם 0 הוא מספר זוגי).
- מספר אי-זוגי הוא כל מספר שלם, חיובי או שלילי, שאינו מתחלק ב-2 ללא שארית.
למעשה, חלוקה של כל מספר אי-זוגי ב-2 מניבה תוצאה עם שארית 1.
- אנו ממליצים לזכור בעל-פה את המסקנות שניתן להסיק לגבי התוצאות בכל אחת מארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) בין מספרים זוגיים ואי-זוגיים.

3. מספרים ראשוניים:

- מספר ראשוני הוא מספר טבעי (חיובי ושלם) אשר לו שני מחלקים שונים זה מזה בלבד: 1 ועצמו.
- 1 אינו מספר ראשוני.
- המספר הראשוני הקטן ביותר הוא 2, והוא גם המספר הראשוני הזוגי היחיד.
- אנו ממליצים לזכור בעל-פה את כל המספרים הראשוניים בין 2 ל-100.

4. נגדיים והופכיים:

- מספרים **נגדיים** הם מספרים שהסכום שלהם הוא 0.
למעשה, ניתן פשוט לזכור שמספר נגדי של מספר מסוים הוא אותו מספר עם סימן מינוס.
למשל, 3 ו-(3-) הם מספרים נגדיים.
- מספרים **הופכיים** הם מספרים שמכפלתם שווה ל-1.
למעשה, ניתן פשוט להפוך בין המונה למכנה.
למשל, 2 ו- $\frac{1}{2}$ הם מספרים הופכיים, ומשום כך מכפלתם שווה ל-1 ($2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$).

5. סימני חלוקה:

אנו ממליצים לזכור בעל-פה כיצד לקבוע אם מספר מסוים מתחלק בכל אחד מהמספרים 2-11.

6. מחלקים ומחלקים ראשוניים:

- מחלק של מספר הוא איבר שהמספר מתחלק בו ללא שארית. למשל, 2 הוא מחלק של 8.
- **זכרו!** כל מספר קודם כל מתחלק בעצמו וב-1. כדי למצוא את יתר מחלקיו, נפרק אותו לגורמיו הראשוניים. לאחר שנמצא אותם, נבדוק לאילו תוצאות ניתן להגיע באמצעות קומבינציות הכפל בין המחלקים הראשוניים.
- **שימו לב!** הדרך שבה אנו בוחרים לפרק את המספר אינה משנה - בין אם נפרק את 72 ל-24 ול-3, ובין אם נפרק אותו ל-9 ול-8 נמצא את אותם מחלקים.

7. <u>מחלקים משותפים:</u>

כדי למצוא את המכנה המשותף הנמוך ביותר של שני מספרים, כלומר את המספר הנמוך ביותר שמתחלק בשניהם, אנו יכולים לכפול בין המחלקים הראשוניים השונים של כל אחד מהמספרים תוך שאנו מצמצמים כפילויות.
שימו לב! צמצום הכפילויות צריך להיעשות **פעם אחת בלבד** ו**באחד המספרים בלבד**.

8. <u>שארית:</u>

- שארית היא המספר שנשאר לאחר חלוקה, ושלא ניתן לחלקו ולקבל מספר שלם.
- תמיד ניתן להתייחס לחלוקה בין מספרים כאל רכישה שאנו מבצעים, ולעודף שלו אנו זכאים כאל שארית.
  למשל, כדי למצוא את השארית של $\frac{22}{5}$ - נתייחס לכך כמקרה שבו אנו מעוניינים לקנות ב-22 שקלים מספר רב ככל האפשר של מוצרים שמחיר כל אחד מהם 5 שקלים.
  מספר המוצרים שנוכל לקנות הוא 4, והעודף שלו אנו זכאים, השארית, הוא 2 ($\frac{22}{5}=4\frac{\boxed{2}}{5}$).
- כאשר אנו יודעים, לדוגמה, שמספר מסוים מתחלק ב-8 עם שארית 2, ניתן להציגו כך (עבור כל n שלם): $8n+2$.
- בשברים בהם המונה קטן מהמכנה - **המונה הוא השארית** (שימו לב ש**אין** לצמצם את השבר).
  לדוגמה: השארית של $\frac{3}{6}$ היא 3 אף שניתן לצמצם אותו ל- $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$.
- כאשר אנו מוסיפים למונה את המכנה, לא משנה כמה פעמים, השארית נשמרת.

<u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>