

בעיות כמותיות

בעיות אחוזים

בעיות אחוזים

אחוזים נפוצים ושימוש במתווכים

מבוא

נתחיל בהגדרה הבסיסית ביותר של אחוז - שבר שהמכנה שלו הוא 100. התחלנו בהגדרה זו משום שאחוזים הם בסך הכול שברים, ובעיות המערבות שברים או כבר יודעים לפתור. כעת, נשתמש במספר אחוזים נפוצים אשר מרבים להופיע בבחינה, וזאת על מנת להמחיש את העיקרון המופיע לעיל - את האחוזים הנפוצים הללו אנו ממליצים לזכור בעל-פה. כאמור, אחוז הוא שבר שהמכנה שלו הוא 100, ואילו המונה שלו הוא המספר המופיע ליד הסימן שמייצג את האחוזים (%).

$$\text{לפיכך, } 1\% \text{ שווה ל- } \frac{1}{100}.$$

אחוזים נפוצים

אם נישאל כמה הוא 1% מתוך 400 שקלים, יהיה עלינו לכפול את 400 ב- $\frac{1}{100}$: $400 \cdot \frac{1}{100} = \frac{400}{100} = 4$. כלומר, 1% מ-400 שקלים הוא 4 שקלים.

לפי האמור לעיל, 5% שווים ל- $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. לפיכך, אם נישאל כמה הם 5% מתוך 80 שקלים, יהיה עלינו לכפול את 80 ב-

$$\frac{5}{100} : \frac{5}{100} = 80 \cdot \frac{1}{20} = 80 \cdot \frac{1}{20} = 4.$$

10% הם $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. אם יבקשו מאיתנו למצוא כמה הם 10% מ-18, יהיה עלינו לכפול את 18 ב- $\frac{1}{10}$, כלומר לחלק את 18

ב-10. משמעותה של פעולה זו היא להזיז את הנקודה העשרונית ב-18 פעם אחת שמאלה: $18 \cdot \frac{10}{100} = \frac{18}{10} = 1.8$. שימו לב

שכאשר נתבקש למצוא 10% מערך מסוים, פשוט נחלק אותו ב-10.

כמו כן, שימו לב כי 10% יכולים לשמש אותנו כגורם מתווך נוח למציאת ערכם של אחוזים נוספים.

לדוגמה, אם נישאל כמה הם 20% מתוך 300, נוכל למצוא כמה הם 10% מתוך 300 (לחלק את 300 ב-10): $\frac{300}{10} = 30$.

לאחר מכן, לכפול את התוצאה שהתקבלה ב-2: $30 \cdot 2 = 60$.

25% הם אחוז נפוץ גם כן והם שווים ל- $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. לפיכך, 25% מ-16 הם 4, שכן: $16 \cdot \frac{1}{4} = 4$.

50% הם $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. אגב, בכל אחוז ניתן להשתמש כגורם מתווך, כלומר אם בדוגמה הקודמת ראינו ש-25% מ-16 הם 4, אזי

50% (פי 2 מ-25%) מ-16 הם פי 2 - כלומר 8.

בהתאם לכך, 75% ($\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$) מ-16 הם פי 3 מ-4, כלומר 12.

האחוזים האחרונים שנוכרי הם 12.5% אשר שווים ל- $\frac{1}{8}$, וכן $33\frac{1}{3}\%$ אשר שווים ל- $\frac{1}{3}$.

לסיכום, אחוז הוא בסך הכול שבר שהמונה שלו הוא הערך שמופיע ליד סימן האחוז, ואילו המכנה שלו הוא תמיד 100.

נסכם ונציג את האחוזים הנפוצים להלן - כאמור, אותם אנו ממליצים לזכור בעל-פה:

$$10\% \text{ הם } \frac{1}{10} = \frac{10}{100} \text{ מהשלם}$$

$$5\% \text{ הם } \frac{1}{20} = \frac{5}{100} \text{ מהשלם}$$

$$1\% \text{ הוא } \frac{1}{100} \text{ מהשלם}$$

$$20\% \text{ הם } \frac{1}{5} = \frac{20}{100} \text{ מהשלם}$$

$$50\% \text{ הם } \frac{1}{2} = \frac{50}{100} \text{ מהשלם}$$

$$75\% \text{ הם } \frac{3}{4} = \frac{75}{100} \text{ מהשלם}$$

$$25\% \text{ הם } \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \text{ מהשלם}$$

$$33\frac{1}{3}\% \text{ הם } \frac{1}{3} = \frac{33\frac{1}{3}}{100} \text{ מהשלם}$$

$$12\frac{1}{2}\% \text{ הם } \frac{1}{8} = \frac{12\frac{1}{2}}{100} \text{ מהשלם}$$

שאלה לדוגמה - אחוזים נפוצים ושימוש במתווכים

בחוג טיסנאות 85% מהמשתתפים הינם בנים, ומשתתפות בו 3 בנות.

כמה משתתפים (בנים ובנות) יש בחוג הטיסנאות?

(1) 10

(2) 20

(3) 15

(4) 40

פתרון

נתון שבחוג ישנן 3 בנות. כמו כן, נתון ש-85% מהמשתתפים הם בנים, ועל כן 15% הם בנות ($100\% - 85\% = 15\%$).

מכאן ש- $15\% = 3$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $1 = 5\%$. כעת, נכפול ב-20 את שני אגפי המשוואה:

$100\% = 20$. 100%, אשר שווים ל-20, הם כל המשתתפים בחוג הטיסנאות.

הערה: כמובן שניתן היה לפתור את השאלה בדרכים אחרות (כפי שנלמד בהמשך), אך רצינו להדגים את השימוש באחוזים הנפוצים ואת השימוש בגורמים מתווכים.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - אחוזים נפוצים ושימוש במתווכים

ליטר של מילקשייק וניל מכיל 40% חלב.
מערבבים 5 ליטרים של מילקשייק וניל עם 4 ליטרים של חלב.

כמה ליטרים של חלב יש בתערובת שנוצרה?

(1) 7

(2) 6

(3) 5

(4) 4

פתרון

למדנו בשיעור ש-10% הם $\frac{1}{10}$ ולכן ניתן לחלק את השלם (5) ב-10. אם כן, 10% מ-5 ליטרים הם: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

כמו כן, למדנו שניתן להשתמש באחוזים כגורם מתווך, ולכן אם 10% הם $\frac{1}{2}$, 40% הם 2 (כפלנו פי 4).

כלומר, ב-5 ליטרים של מילקשייק וניל יש 2 ליטרים של חלב.

לפיכך, יש בתערובת: $4 + 2 = 6$. כלומר, 6 ליטרים של חלב.

התשובה הנכונה היא (2).

נוסחת האחוז

נוסחת האחוז מורכבת מ-3 מרכיבים: האחוז, השלם והחלק.
כפי שלמדנו, **האחוז** הוא בסך הכול שבר **והחלק** שווה לאחוז מתוך **השלם**:

$$\text{חלק} = \text{שלם} \cdot \text{אחוז}$$

שימו לב שניתן לחלק את הנוסחה ברכיב "האחוז" ולקבל:

$$\text{שלם} = \frac{\text{חלק}}{\text{אחוז}}$$

כמו כן, ניתן לחלק את הנוסחה ברכיב "השלם" ולקבל:

$$\text{אחוז} = \frac{\text{חלק}}{\text{שלם}}$$

כך למשל, אם אנו מעוניינים לקנות חולצה שעליה הנחה של 10%, נוכל לחשב את החלק לו שווה האחוז מהחולצה ולחסר אותו מהמחיר המקורי.

שימו לב כי האות מ' מודגשת, וזאת משום שהיא יכולה לעזור לנו במקרים רבים לזהות את **השלם**.

נוסחים נוספים שיעזרו לנו לזהות את השלם:

כמה הם 30% מתוך 400. מכאן שהשלם בדוגמה הזו הוא 400.

כמה הם 10% של 200. מכאן שהשלם בדוגמה הזו הוא 200.

לדוגמה:

כמה הם 8% מ-200?

מאחר שהאות מ' צמודה ל-200, עלינו לכפול את האחוז (8%) בשלם (200) וכך נגלה כמה הם 8% מ-200:

$$\frac{8}{100} \cdot 200 = 8 \cdot 2 = 16$$

באותו אופן, 16% מ-400 הם: $\frac{16}{100} \cdot 400 = 16 \cdot 4 = 64$

שימו לב: הואיל ומדובר בנוסחה הכוללת שלושה מרכיבים, כאשר שניים מהם יהיו נתונים, נוכל למצוא את השלישי.

כלומר, ייתכנו שאלות כגון אלו שהוצגו לעיל - בהן נתונים לנו **השלם והאחוז**, ויהיה עלינו למצוא את **החלק**.

כמו כן, ייתכנו שאלות בהן **החלק והאחוז** יהיו נתונים, ויהיה עלינו למצוא את **השלם**.

נוסף על כך, ייתכנו שאלות בהן **השלם והחלק** יהיו נתונים, ויהיה עלינו למצוא את **האחוז**.

אל לנו לחשוש מנתונים אשר כוללים נעלמים, אלא להציב אותם כפי שהם בנוסחה.

לדוגמה:

כמה הם 20% מ-50x?

כל שעלינו לעשות הוא לכפול את האחוז (20%) בשלם (50x): $\frac{20}{100} \cdot 50x = 2y \cdot 5x = 10xy$

לסיכום, שימוש בנוסחת האחוז הוא נוח ביותר, ועל כן - בדומה לאחוזים הנפוצים - אנו ממליצים לזכור אותה בעל-פה.

שאלה לדוגמה - נוסחת האחוז

כמה הם 33% מ-300:

(1) 100

(2) 90

(3) 99

(4) 103

פתרוןדרך א' - שימוש בנוסחת האחוז:

נתונים לנו בשאלה האחוז והשלם, ומבקשים מאיתנו למצוא את החלק. כפי שלמדנו בשיעור, כאשר נתונים לנו שני מרכיבים מנוסחת האחוז, ניתן למצוא את השלישי - נציב את הנתונים בנוסחת האחוז:

$$\frac{33}{100} \cdot 300 = 33 \cdot 3 = 99$$

דרך ב' - שימוש בגורמים מתוכים:

אנו יודעים כי השלם הוא 300 ולכן ניתן לקבוע ש- $100\% = 300$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-100 ונקבל:
 $3 = 1\%$. בכדי לבצע מעבר ל- 33% נכפול את שני אגפי המשוואה ב-33: $99 = 33\%$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - נוסחת האחוז

$(50 + x)$ אחוזים מ-60 הם 90.

$x = ?$

100 (1)

200 (2)

150 (3)

50 (4)

פתרון
דרך א' - שימוש בנוסחת האחוז:

נתונים לנו שלושת המרכיבים של נוסחת האחוז כאשר אחד מהם, האחוז, מכיל נעלם (X).

על מנת למצוא אותו, נציב את שלושת המרכיבים בנוסחה: $\frac{(50 + x)}{100} \cdot 60 = 90$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-10:

$6 \cdot (50 + x) = 90 \cdot 10$. לאחר מכן נפתח סוגריים: $300 + 6x = 900$. נעביר אגפים: $6x = 600$. כעת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-6: $x = 100$.

דרך ב' - בדיקת תשובות:

כל אחד מהערכים בתשובות מייצג את X, ולכן נציבו בשאלה ונבדוק באמצעות נוסחת האחוז האם הנתונים מתקיימים:

תשובה (1): $\frac{(50 + 100)}{100} \cdot 60 = 1.5 \cdot 60 = 90$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): $\frac{(50 + 200)}{100} \cdot 60 = 2.5 \cdot 60 = 150$. תשובה זו לא מקיימת את נתוני השאלה. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\frac{(50 + 150)}{100} \cdot 60 = 2 \cdot 60 = 120$. תשובה זו לא מקיימת את נתוני השאלה. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{(50 + 50)}{100} \cdot 60 = 1 \cdot 60 = 60$. תשובה זו לא מקיימת את נתוני השאלה. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

ערך משולש/טבלת יחסים

דרך נוספת של פתרון שאנו רוצים להציג בפניכם נקראת "ערך משולש/טבלת היחסים" (ייתכן שחלקכם מכיר אותה בשמות אחרים, אך הטכניקה היא אותה טכניקה). על-פי דרך זו, נבנה טבלה אשר מהווה צורת הצגה גרפית שונה של נוסחת האחוז, אך עשויה להקל עלינו בחישוב.

לדוגמה:

כמה הם 20% מ-400:

נזכיר שניתן לפתור שאלה זו באמצעות גורם מתווך, כלומר למצוא כמה הם 10% מ-400 ($\frac{400}{10} = 40$) ולאחר מכן לכפול ב-2:

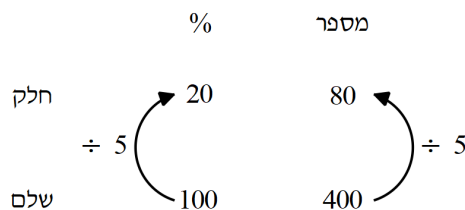
$$40 \cdot 2 = 80$$

כעת, נציג את הפתרון לשאלה בדרך של "ערך משולש/טבלת היחסים".

נבנה טבלה ובה נציג את החלק ואת השלם, וכן את האחוז שכל אחד מהם מייצג. בשאלה זו, נשאלנו לגבי החלק ואנו יודעים כי הוא מהווה 20% מהשלם. כמו כן, אנו יודעים כי השלם הוא 400, וכן שהוא 100% (השלם הוא 100% תמיד). נציב את הנתונים בטבלה:

	מספר	%
חלק	20	
שלם	400	100

כדי לבצע מעבר מ-100% (השלם באחוזים) ל-20% (החלק באחוזים) עלינו לחלק ב-5. באופן זה, נחלק את 400 (השלם במספר) ב-5 ונקבל את החלק (במספר):



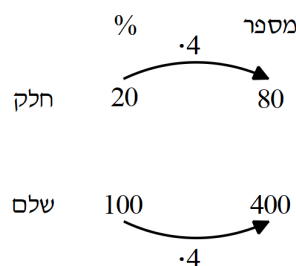
לפיכך, 20% מ-400 הם 80.

שימו לב שעל פי "ערך משולש" (נקרא כך משום שהפעולות החשבוניות נעשות בצורה של משולש), נכפול את אחד הערכים - אין זה משנה באיזה ערך נבחר - בערך שנמצא מאלכסונו, ואת התוצאה נחלק בערך שנותר.

מכאן שניתן היה לכפול את 20 ב-400 ולחלק את התוצאה ב-100:

$$\frac{20 \cdot 400}{100} = 20 \cdot 4 = 80$$

המעבר שהצגנו בטבלה לעיל הוא מעבר **אנכי**. שימו לב שניתן לבצע גם מעבר **אופקי**. כדי לבצע מעבר מ-100% (השלם באחוזים) ל-400 (השלם במספר) עלינו לכפול פי 4. באופן זה, נכפול את 20% (החלק באחוזים) ב-4 ונקבל את החלק (במספר):

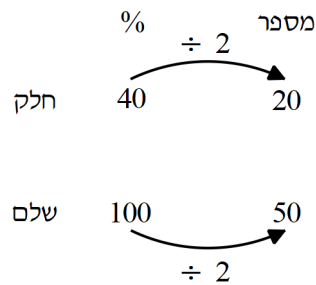


דוגמה נוספת:

40% מ-x הם 20. כדי למצוא את x, נעמוד על הרכיבים השונים ונציב אותם בטבלה. האות מ' נמצאת לפני x ולכן הוא השלם. כמו כן, 40% הם החלק והוא שווה ל-20:

	מספר	%
חלק	20	40
שלם	x	100

כדי לבצע מעבר מ-40% (החלק באחוזים) ל-20 (החלק במספר) עלינו לחלק ב-2. באופן זה, נחלק את 100% (השלם באחוזים) ב-2 ונקבל את השלם (במספר):

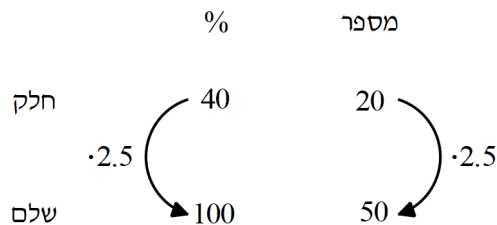


לפיכך, $x = 50$.

שימו לב שעל פי "ערך משולש", ניתן היה לכפול את 100 ב-20 ולחלק ב-40:

$$\frac{100 \cdot 20}{40} = \frac{200}{4} = 50$$

שימו לב כי בטבלה שהצגנו לעיל ביצענו מעבר **אופקי**, אך ניתן היה לבצע מעבר **אנכי** גם כן. מכיוון שבכדי לבצע מעבר מ-40% ל-100% עלינו לכפול פי 2.5, נכפול את 20 פי 2.5 גם כן:



לסיכום, ניתן להשתמש בטבלה ולבצע הן מעבר אופקי והן מעבר אנכי - בחרו באפשרות הנוחה מבין השתיים. נוסף על כך, ניתן לבצע כפל על-פי "ערך משולש", כלומר לכפול את אחד הערכים (אין זה משנה באיזה ערך תבחרו) בערך שנמצא מאלכסונו, ואת התוצאה לחלק בערך שנותר.

שאלה לדוגמה - ערך משולש/טבלת יחסים

יוני קנה כובע אדום בהנחה של 30% ושילם תמורתו 84 שקלים.
מיכל קנתה כובע כחול בהנחה של 40% ושילמה תמורתו 72 שקלים.

$$? = \frac{\text{מחיר כובע אדום לפני הנחה}}{\text{מחיר כובע כחול לפני הנחה}}$$

1 (1)

2 (2)

$\frac{1}{2}$ (3)

$\frac{6}{7}$ (4)

פתרון

יוני קנה את הכובע בהנחה של 30%, ועל כן הוא שילם 70% ממחירו המקורי ($100\% - 30\% = 70\%$).
לפיכך, 70% הם 84 שקלים. על מנת למצוא את השלם (100%), נציב את הנתונים בטבלה ולאחר מכן נבצע כפל-על-פי "ערך משולש":

	מספר	%
חלק	84	70
שלם	100	

$$\frac{84 \cdot 100}{70} = \frac{100 \cdot 84}{70} = 120$$

נכפול את 84 ב-100 ונחלק את התוצאה ב-70: 120 שקלים. מחירו של הכובע האדום לפני הנחה הוא 120 שקלים.

מיכל קנתה את הכובע בהנחה של 40%, ועל כן היא שילמה 60% ממחירו המקורי ($100\% - 40\% = 60\%$).
לפיכך, 60% הם 72 שקלים. על מנת למצוא את השלם (100%), נציב את הנתונים בטבלה ולאחר מכן נבצע כפל-על-פי "ערך משולש":

	מספר	%
חלק	72	60
שלם	100	

$$\frac{72 \cdot 100}{60} = \frac{100 \cdot 72}{60} = 120$$

לפיכך, מחירו של הכובע הכחול לפני הנחה הוא 120 שקלים גם כן.

נזכיר כי נתבקשנו לחלק את מחיר הכובע האדום לפני הנחה, במחיר הכובע הכחול לפני הנחה: $\frac{120}{120} = 1$.

התשובה הנכונה היא (1).

אחוזים גדולים ממאה

עד כה, עבדנו עם דוגמאות בהן האחוז היה קטן מ-100, ובהתאם לכך החלק היה קטן מהשלם. אולם, בבחינה יכולות להופיע שאלות שכוללות עבודה עם אחוזים אשר גדולים מ-100, ובהתאם לכך החלק יהיה גדול מהשלם.

לדוגמה:

נתון לנו שמספר האגוזים של דני מהווה 200% ממספר האגוזים של יוסי.

מכך נוכל להסיק כי מספר האגוזים של דני גדול פי 2 ממספר האגוזים של יוסי, שכן: $200\% = \frac{200}{100} = 2$.

כמו כן, מהעובדה הזו ניתן להסיק שהוא גדול ב-100%.

נמחיש את האמור לעיל בעזרת מספרים.

אם מספר האגוזים של יוסי הוא 10, מספר האגוזים של דני הוא: $10 \cdot 200\% = 10 \cdot \frac{200}{100} = 10 \cdot 2 = 20$.

כאמור, מספר האגוזים של דני גדול פי 2.

נוסף על כך, מספר האגוזים של דני גדול ב-10 (10 = 20 - 10) ממספר האגוזים של יוסי, כלומר ב-100%.

שכן את ההפרש בין מספר האגוזים שלהם (10) אנו מחלקים בשלם, כלומר במספר האגוזים של יוסי (10) - $\frac{10}{10} = 1 = 100\%$.

דוגמה נוספת:

מספר השקלים של דני מהווה 150% ממספר השקלים של יוסי. נוסף על כך, מספר השקלים של יוסי הוא 100.

לפיכך, מספר השקלים של דני הוא: $100 \cdot 150\% = 100 \cdot \frac{150}{100} = 100 \cdot 1.5 = 150$.

ניתן לראות כי מספר השקלים של דני גדול פי 1.5 ממספר השקלים של יוסי.

כמו כן, מספר השקלים של דני גדול ב-50 (50 = 150 - 100) ממספר השקלים של יוסי, כלומר ב-50%.

שכן את ההפרש בין מספר השקלים שלהם (50) אנו מחלקים בשלם, כלומר במספר השקלים של יוסי (100) - $\frac{50}{100} = 50\%$.

דוגמה נוספת:

מספר השקלים של דני מהווה 500% ממספר השקלים של יוסי. נוסף על כך, מספר השקלים של יוסי הוא 60.

לפיכך, מספר השקלים של דני הוא: $60 \cdot 500\% = 60 \cdot \frac{500}{100} = 60 \cdot 5 = 300$.

ניתן לראות כי מספר השקלים של דני גדול פי 5 ממספר השקלים של יוסי.

כמו כן, מספר השקלים של דני גדול ב-240 (240 = 300 - 60) ממספר השקלים של יוסי, כלומר ב-400%.

שכן את ההפרש בין מספר השקלים שלהם (240) אנו מחלקים בשלם, כלומר במספר השקלים של יוסי (60) -

$$\frac{240}{60} = 4 = 400\%$$

בכל הדוגמאות המופיעות לעיל ראינו שעל מנת למצוא פי כמה גדול ערך כלשהו משלם מסוים, עלינו לכפול את השלם באחוז חלקי 100 - למעשה, כפי שלמדנו עד כה.

לעומת זאת, בכדי למצוא בכמה גדול או קטן ערך כלשהו משלם מסוים, עלינו למצוא את ההפרש בין אותו ערך לשלם, ולחלק את ההפרש בשלם.

שאלה לדוגמה - אחוזים גדולים ממאה

משכורתו של ניר מהווה 25% ממשכורתו של יאיר.

בכמה אחוזים גדולה משכורתו של יאיר ממשכורתו של ניר?

(1) 75%

(2) 125%

(3) 300%

(4) 400%

פתרון
דרך א' - פתרון אלגברי:

משכורתו של ניר שווה ל- $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ממשכורתו של יאיר.

לפיכך, ניתן לקבוע כי משכורתו של יאיר גדולה פי 4, ועל כן ניתן לסמן את משכורתו של ניר ב-100% ומכאן שמשכורתו של יאיר היא 400%.

אם כן, ההפרש בין משכורותיהם הוא: $400\% - 100\% = 300\%$. כלומר, משכורתו של יאיר גדולה ב-300% ממשכורתו של ניר.

דרך ב' - הצבת מספרים:

מאחר שהשאלה עוסקת באחוזים ואינה כוללת מספרים ממשיים, ניתן להציב מספרים.

נקבע שמשכורתו של יאיר היא 100 שקלים. לפיכך, משכורתו של ניר היא $25 = 100 \cdot \frac{25}{100}$. כלומר, 25 שקלים.

נמצא את ההפרש בין המספרים ונחלק אותו בשלם, כלומר במשכורתו של ניר: $\frac{100 - 25}{25} = \frac{75}{25} = 3 = 300\%$.

התשובה הנכונה היא (3).

שינויים באחוזים

בשיעור הקרוב נעסוק בשאלות בהן נתונים לנו שינויים לגבי ערך מסוים.

לדוגמה:

נתון לנו מחיר של חולצה ולגביו השינויים הבאים:

1. המחיר עלה ב-20%.
2. לאחר מכן, המחיר ירד ב-50%.
3. לאחר מכן, המחיר עלה ב-30%.

מה מחיר החולצה לאחר שלושת השינויים?

טעות תהיה לחשוב שמאחר שהמחיר ירד בסך הכול ב-50% ועלה בסך הכול ב-50%, הוא לא השתנה. זאת, כיוון שלאחר כל עלייה או ירידה במחיר ישנו שלם "חדש".

טכניקה נוחה אשר באמצעותה ניתן לפתור שאלות מהסוג הזה היא הצבת מספרים, ובהחלט ניתן להשתמש בה כאשר לא נתונים לנו מספרים ממשיים - הצבה נוחה כאשר השאלות עוסקות באחוזים היא 100.

אם כן, נקבע שמחיר החולצה היה 100 שקלים, ולאחר עלייה של 20%: $100 \cdot \frac{120}{100} = 120$.

לאחר ירידה של 50% (יש לזכור שהשלם החדש הוא 120, ולא 100): $120 \cdot \frac{50}{100} = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$.

כעת, לאחר עלייה של 30%: $60 \cdot \frac{130}{100} = 6 \cdot 13 = 78$.

כלומר, מחיר החולצה לאחר כל השינויים המתוארים לעיל הוא 78 שקלים.

אילו היינו נשאלים בכמה אחוזים המחיר החדש נמוך מהמחיר הישן, התשובה הייתה 22%, שכן: $100 - 78 = 22$.

כמו כן, $\frac{22}{100} = 22\%$.

שימו לב:

אילו השלב השלישי היה עלייה ב-100% במקום ב-30%, מחיר החולצה היה: $60 \cdot \frac{200}{100} = 60 \cdot 2 = 120$.

כלומר, מחיר החולצה היה 120 שקלים.

אילו היינו נשאלים בכמה אחוזים המחיר החדש גבוה מהמחיר הישן, התשובה הייתה 20%, שכן: $120 - 100 = 20$.

כמו כן, $\frac{20}{100} = 20\%$.

שתי נקודות שחשוב לזכור כאשר השאלה כוללת שינויים באחוזים הן:

1. כאשר אנו מחשבים שינוי שהתרחש, עלינו לזכור שישנו שלם "חדש".
2. כאשר השאלה עוסקת בשינויים בלבד ואין בה מספרים ממשיים, ניתן להציב מספר ולעבוד איתו - ההצבה הנוחה ביותר במקרה של אחוזים היא 100.

שאלה לדוגמה - שינויים באחוזים

ליאורה קנתה שתי גופיות בהנחה של 25% ושילמה עבור שתייהן יחד 120 שקלים. מחירן של שתי הגופיות זהה. מה היה מחירה המקורי של כל גופייה (בשקלים)?

(1) 70

(2) 75

(3) 80

(4) 90

פתרון
דרך א' - בדיקת תשובות:

נבדוק איזו מהתשובות מקיימת את נתוני השאלה - נבדוק מה מחיר הגופייה לאחר ההנחה של 25% האחוזים, כלומר נכפול את

$$\text{מחיר הגופייה ב-} \frac{3}{4} = 75\% = 100\% - 25\%.$$

לאחר מכן, נבדוק האם כפל המחיר ב-2 (מחיר שתי הגופיות זהה) ייתן לנו 120 (המחיר הכולל של שתייהן):

$$\text{תשובה (1): } 52.5 \cdot \frac{3}{4} = 70. \text{ כעת, נכפול את } 52.5 \text{ ב-} 2: 52.5 \cdot 2 = 105. \text{ התשובה נפסלת.}$$

$$\text{תשובה (2): } 56.25 \cdot \frac{3}{4} = 75. \text{ כעת, נכפול את } 56.25 \text{ ב-} 2: 56.25 \cdot 2 = 112.5. \text{ התשובה נפסלת.}$$

$$\text{תשובה (3): } 60 \cdot \frac{3}{4} = 80. \text{ כעת, נכפול את } 60 \text{ ב-} 2: 60 \cdot 2 = 120. \text{ זו התשובה הנכונה.}$$

$$\text{תשובה (4): } 67.5 \cdot \frac{3}{4} = 90. \text{ כעת, נכפול את } 67.5 \text{ ב-} 2: 67.5 \cdot 2 = 135. \text{ התשובה נפסלת.}$$

דרך ב' - פתרון אלגברי:

אנו יודעים כי ליאורה שילמה עבור שתי הגופיות 120 שקלים, וכן שמחירן זהה.

$$\text{לפיכך, מחיר כל גופייה הוא } \frac{120}{2} = 60. \text{ כלומר, } 60 \text{ שקלים.}$$

כמו כן, אנו יודעים כי המחיר הוא לאחר הנחה של 25%, כלומר $75\% = 60$ ($100\% - 25\% = 75\%$).

אנו רוצים למצוא את מחירה של הגופייה לפני ההנחה, דהיינו את ה-100%.

על מנת לעשות זאת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3: $25\% = 20$.

כעת, נכפול את שני אגפי המשוואה ב-4 ונקבל: $100\% = 80$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - שינויים באחוזים

מחירה החדש של מכונת גבוה ב-50% ממחירה המקורי.

כמה אחוזים יש להפחית מהמחיר החדש כדי שמחיר המכונת יהיה גבוה ב-20% ממחירה המקורי?

- (1) 10%
- (2) 20%
- (3) 30%
- (4) 25%

פתרון

היות שלא נתונים בשאלה מספרים ממשיים והיא עוסקת בשינוי באחוזים בלבד, ניתן להציב מספרים. כפי שראינו בשיעור, ההצבה הנוחה ביותר במקרה של אחוזים היא 100. על כן, נקבע שמחירה המקורי של המכונת הוא 100 שקלים. אם כן, מחירה החדש הוא: $100 \cdot \frac{150}{100} = 150$. כלומר, 150 שקלים.

כדי שמחיר המכונת יהיה גבוה ב-20% ממחירה המקורי, עליו להיות $100 \cdot \frac{120}{100} = 120$. כלומר, 120 שקלים.

עתה, עלינו למצוא את ההפרש בין 150 ל-120 ($150 - 120 = 30$), וכן למצוא כמה אחוזים הוא מהווה מ-150

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 20\% \text{ (השלם ה"חדש")}$$

לפיכך, יש להפחית 20% מהמחיר החדש כדי שמחירה יהיה גבוה ב-20% ממחירה המקורי.

התשובה הנכונה היא (2).

אחוז מתוך אחוז

בשאלות מסוימות בבחינה נידרש למצוא אחוז מתוך אחוז, כלומר יכולים לתת לנו שלם ולשאול לכמה שווה אחוז מסוים מתוך אחוז אחר.

לדוגמה:

5% מתוך 40% של X הם 4. מה ערכו של X?

נשתמש בנוסחת האחוז, ונציב את הנתונים בה:

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5} \cdot X = 4 \quad \frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot X = 4$$

$$\text{כעת, נבצע כפל בין האיברים באגף השמאלי: } \frac{1 \cdot 2 \cdot X}{50 \cdot 100} = 4$$

$$X = 200$$

לסיכום, כאשר אתם נדרשים למצוא אחוז מתוך אחוז, עליכם ליצור משוואה אחת על-פי הנתון לכם בשאלה.

שאלה לדוגמה - אחוז מתוך אחוז

20% מ-25% של X הם 20.

כמה שווים $\frac{5}{8}$ מ-X?

(1) 50

(2) 40

(3) 250

(4) 450

פתרון

על מנת למצוא את X, נבנה משוואה על פי הנתונים:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot X = 20 \quad \text{נצמצם את האחוזים לשברים המוכרים לנו: } \frac{20}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot X = 20$$

נבצע את הכפל באגף השמאלי של המשוואה: $\frac{X}{20} = 20$. לאחר מכן, נכפול את שני אגפי המשוואה ב-20 ונקבל:

$$X = 400 \quad \text{כעת, משידוע לנו ערכו של X, נוכל למצוא כמה הם } \frac{5}{8} \text{ מתוכו: } \frac{50}{100} \cdot 400 = 50 \cdot 5 = 250$$

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - אחוז מתוך אחוז

בחודש מסוים, עלה המחיר של ק"ג תירס ב-60%.
לאחר העלאה זו, מחיר ק"ג תירס עלה פעם נוספת ב-100%.
כעת, מחירו של ק"ג תירס הוא 64 שקלים.

מה היה מחירו ההתחלתי (בשקלים)?

- (1) 10
(2) 5
(3) 15
(4) 20

פתרון
דרך א' - בדיקת תשובות:

מאחר שהתשובות הן המחיר ההתחלתי של התירס, ניתן להשתמש בהן ולבדוק מי מהן מקיימת את נתוני השאלה.
כלומר, לבדוק האם לאחר שתי ההעלאות הנתונות, המחיר שמתקבל הוא 64 שקלים:

תשובה (1): לאחר ההעלאה הראשונה - $160 \cdot \frac{10}{100} = 16$. לאחר ההעלאה השנייה - $32 = 16 \cdot \frac{200}{100}$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): לאחר ההעלאה הראשונה - $8 = \frac{80}{10} = 5 \cdot \frac{160}{100}$. לאחר ההעלאה השנייה - $16 = 8 \cdot \frac{200}{100}$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): לאחר ההעלאה הראשונה - $24 = \frac{240}{10} = 15 \cdot \frac{160}{100}$. לאחר ההעלאה השנייה - $48 = 24 \cdot \frac{200}{100}$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): לאחר ההעלאה הראשונה - $32 = 20 \cdot \frac{160}{100}$. לאחר ההעלאה השנייה - $64 = 32 \cdot \frac{200}{100}$. זו התשובה הנכונה.

דרך ב' - פתרון אלגברי:

אנו מחפשים את מחירו ההתחלתי של התירס. נסמן אותו ב-X.

כעת, נחשב את מחירו של X לאחר שתי ההעלאות, ואת התוצאה נשווה למחיר שנתון לנו בשאלה (64):

$$64 = \frac{160}{100} \cdot \frac{200}{100} \cdot X. \text{ נבצע את הכפל בין האיברים באגף השמאלי: } \frac{32X}{10} = 64$$

לאחר מכן, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-32: $\frac{X}{10} = 2$. כעת, נכפול את שני אגפי המשוואה ב-10: $X = 20$.

התשובה הנכונה היא (4).

סיכום

1. אחוזים נפוצים ושימוש במתווכים:

- אחוז הוא בסך הכול שבר עם מכנה 100. כלומר, 5% הם $\frac{5}{100}$.
- בבחינה הפסיכומטרית ישנם אחוזים שהשימוש בהם הוא נפוץ יותר, ועל כן אנו ממליצים לזכור את הטבלה שנמצאת בעמוד השני בעל-פה.
- לעתים נוח לעשות שימוש במתווכים. לדוגמה, אם אנו נדרשים למצוא 40% משלם מסוים, נוכל למצוא לכמה שווים 10% מאותו שלם, ולכפול את התוצאה ב-4.

2. נוסחת האחוז:

נוסחת האחוז היא:

$$\text{חלק} = \text{שלם} \cdot \text{אחוז}$$

שימו לב כי ניתן להציגה בשתי דרכים נוספות:

$$1. \text{ חלק} = \frac{\text{חלק}}{\text{אחוז}} = \text{שלם}$$

$$2. \text{ שלם} = \frac{\text{חלק}}{\text{אחוז}}$$

הערה: בכל פעם שנתונים לנו שני רכיבים מנוסחת האחוז, ניתן למצוא את הרכיב השלישי על ידי שימוש באחת מהתצורות המופיעות לעיל.

3. ערך משולש/טבלת יחסים:

דרך נוספת לפתרון היא הצגת הנתונים בטבלה כזו (הנתונים המוצגים בה הם לצורך המחשה):

	מספר	%
חלק	20	10
שלם	200	100

כאשר הנתונים מסודרים בטבלה, תוכלו לבצע כפל\חילוק **אופקי**, כלומר מימין לשמאל ולהפך, או כפל\חילוק **אנכי**, כלומר מלמעלה למטה ולהפך. כמו כן, תוכלו לבצע כפל ב"ערך משולש" - לכפול את אחד מהערכים בערך שנמצא מאלכסונו, ואת התוצאה המתקבלת לחלק בערך שנותר.

4. אחוזים גדולים ממאה:

- כאשר מספר מהווה 200% ממספר אחר, הוא גדול ממנו פי 2, $\frac{200}{100} = 2$, וגדול ממנו ב-100%.
אגב, מומלץ לזכור את העיקרון הבא בעל-פה:
כאשר מספר גדול פי 3 ממספר אחר, הוא גדול ממנו ב-200%.
כאשר מספר גדול פי 4 ממספר אחר, הוא גדול ממנו ב-300%.
כאשר מספר גדול פי 5 ממספר אחר, הוא גדול ממנו ב-400% וכך הלאה.
- בכדי למצוא בכמה גדול או קטן ערך כלשהו משלם מסוים, עלינו למצוא את ההפרש בין אותו ערך לשלם, ולחלק את ההפרש בשלם.

5. שינויים באחוזים:

- כאשר אנו מחשבים שינוי שהתרחש, עלינו לזכור שישנו שלם "חדש".
- כאשר השאלה עוסקת בשינויים בלבד ואין בה מספרים ממשיים, ניתן להציב מספר ולעבוד איתו - ההצבה הנוחה ביותר במקרה של אחוזים היא 100.

6. אחוז מתוך אחוז:

כאשר אתם נדרשים למצוא לכמה שווה אחוז מתוך אחוז, פשוט צרו משוואה אחת על פי הנתונים בשאלה. לדוגמה:
כמה הם 60% מ-50% מ-40% מ-x?

$$x \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100}$$

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!