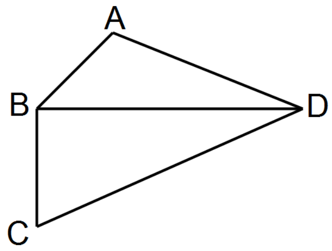
גיאומטריה

מרובעים

מרובעים

הגדרה: מרובע הוא צורה בעלת 4 צלעות.

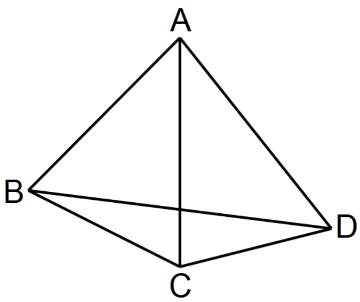


מרובע מורכב משני משולשים.

למשל: בסרטוט שלפניכם מרובע ABCD שמורכב מהמשולשים ABD ו- BCD.

מכך אנו למדים שסכום הזוויות הפנימיות במרובע שווה לפעמיים סכום הזוויות הפנימיות במשולש: $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

כלל: סכום הזוויות במרובע הוא 360°.



הגדרה: אלכסון הוא קו המחבר בין שני קדקודים שאינם סמוכים.

בכל מרובע ניתן להעביר שני אלכסונים.

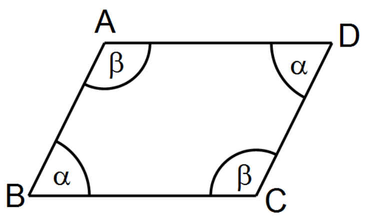
למשל, בסרטוט שלפניכם מרובע ABCD. הקטעים AC ו- BD הם אלכסוני המרובע.

לרוב, השאלות בבחינה הפסיכומטרית יעסקו במרובעים 'מיוחדים', בעלי תכונות מסוימות המייחדות אותם משאר המרובעים.

בשיעור זה נעסוק במרובעים אלה.

מקבילית

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו ושוות זו לזו באורכן.



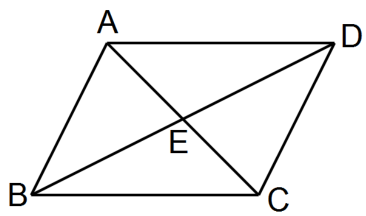
לדוגמה: בסרטוט שלפניכם ABCD מקבילית. לפיכך, מתקיים:

$AB = CD$, $AB \parallel CD$

$AD = BC$, $AD \parallel BC$

כלל: במקבילית זוויות נגדיות שוות זו לזו (ראה סרטוט).

אלכסון מקבילית

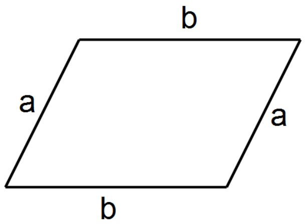


כלל: האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם AC ו- BD אלכסונים במקבילית ABCD ולכן מתקיים:

$BE = ED$, $AE = EC$.

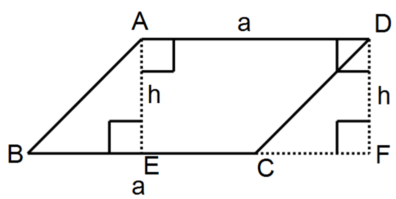
היקף מקבילית



כלל: היקף מקבילית שצלעותיה a ו- b הוא $2a + 2b$.

שטח מקבילית

הגדרה: גובה במקבילית הוא קטע המחבר שתי צלעות נגדיות (או המשכן) ומאונך להן.



לדוגמה: בסרטוט שלפניכם ABCD מקבילית.

AE ו- DF גבהים לצלעות BC ו- AD.

כלל: במקבילית שצלעה a והגובה לצלע זו h השטח הוא: $a \cdot h$

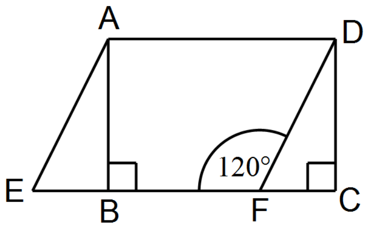
לדוגמה: במקבילית בה צלע שאורכה הוא 7 ס״מ ואורך הגובה לצלע זו הוא 4 ס״מ השטח הוא: $7 \cdot 4 =$ 28 סמ״ר

שאלה לדוגמה - מקבילית

בסרטוט שלפניכם מקבילית ABCD ששטחה 18 סמ"ר.

נתון: $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$

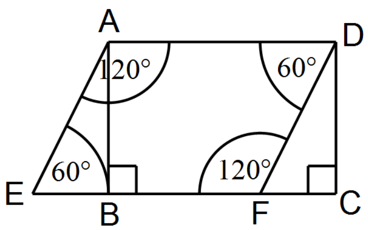
AEFD מקבילית.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה היקף המקבילית AEFD ?

(1) $4(3+\sqrt{3})$ ס"מ
(2) $4\sqrt{3}$ ס"מ
(3) $8\sqrt{3}$ ס"מ
(4) 18 ס"מ

פתרון: על מנת לחשב את היקף המקבילית אנו צריכים לדעת את אורכי צלעותיה.
נבחין כי אחת מצלעות המקבילית היא גם צלע במקבילית הנוספת (AD).
נמצא את צלעות המקבילית ABCD בעזרת שטחה והיחס $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$. לצורך הנוחות נסמן $AB=x$, ומכאן ש- $BC=2x$.
BC ו- AD צלעות נגדיות במקבילית ולכן שוות. לכן, גם $AD=2X$.
נוסחת שטח מקבילית היא **גובה · צלע**.
נשווה נוסחה זו לשטח הידוע לנו: $AB\cdot AD=18$. נציב את הערכים שקבענו: $x\cdot 2x=18$, ונפתור:
$2x^2=18$, נצמצם את שני אגפי המשוואה ב- 2 ונקבל כי $x^2=9$. נוציא שורש לשני אגפי המשוואה ונמצא כי $x=3$.
לכן, $AB=3$ ס"מ ו- $AD=6$ ס"מ.



כעת, על מנת למצוא את צלע המקבילית הנוספת, נתבונן על זוויות המקבילית:
הזווית EAD שווה לזווית FED ולכן בת $120°$. הזוויות EAD ו- AEB צמודות בין ישרים מקבילים (צלעות נגדיות במקבילית מקבילות) ולכן משלימות ל- $180°$.
לפיכך, זווית AEB בת $180-120=60°$.
נתבונן על משולש AEB: זהו משולש $30°,60°,90°$.

במשולש מסוג זה יחס הצלעות הוא $1:\sqrt{3}:2$. אורכה של הצלע AB הוא 3 ס"מ, מכאן ש- $EB=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, ולכן יתר המשולש, הצלע AE שווה $2\sqrt{3}$ ס"מ.
היקף המקבילית $=AE+EF+FD+AD$. צלעות נגדיות במקבילית שוות ומכאן ש- $AE=DF$ ו- $AD=EF$.

כעת, ניתן לרשום כי היקף המקבילית הוא $2\cdot AE+2\cdot AD$. נציב בביטוי את הערכים שמצאנו ונגלה כי הוא שווה ל- $2\cdot AE+2\cdot AD=2\cdot 6+2\cdot 2\sqrt{3}=12+4\sqrt{3}=4(3+\sqrt{3})$ ס״מ. התשובה הנכונה היא (1).

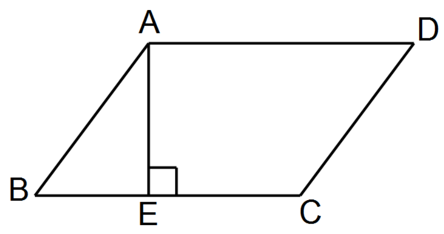
שאלה לדוגמה - שטח מקבילית

בסרטוט שלפניכם מקבילית $ABCD$.

נתון: $AB=5$ ס״מ

$BE=3$ ס״מ

$AE=EC$



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה שטח המקבילית $ABCD$ (בסמ״ר)?

(1) 14
(2) 16
(3) 28
(4) 35

פתרון: נוסחת שטח מקבילית היא $a\cdot h$. הקטע AE הוא גובה לצלע המקבילית BC, ולכן נחפש את אורכי קטעים אלה.

AE היא צלע במשולש ישר הזווית ABE בו אורכי שתי צלעות ידועים לנו. נשתמש במשפט פיתגורס במשולש ABE:

$AE^2+EB^2=AB^2$ נציב את אורכי הצלעות: $AE^2+3^2=5^2$.

מבידוד הנעלם AE^2 עולה כי $AE^2=16$ ס״מ, ומהוצאת שורש משני אגפי המשוואה נמצא כי $AE=4$ ס״מ.

על מנת למצוא את אורך הצלע BC נמצא את אורכי הקטעים BE ו- EC המרכיבים אותה:

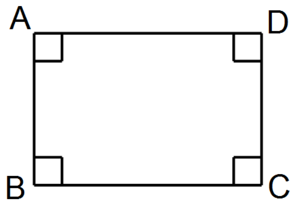
אורך הקטע BE ידוע לנו והקטע EC שווה באורכו לקטע AE הידוע לנו.

נחשב את הקטע BC לפי הקטעים מהם הוא בנוי: $BC=BE+EC$. נציב את ערכיהם ונגלה כי $BC=3+4=7$ ס״מ

נחשב את שטח המקבילית בעזרת הנוסחה $a\cdot h$. נציב את הערכים ונקבל כי $BC\cdot AE=7\cdot 4=28$ סמ״ר

התשובה הנכונה היא (3).

מלבן



הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות. מלבן הוא מקרה פרטי של מקבילית, ומקיים את כל תכונותיה.

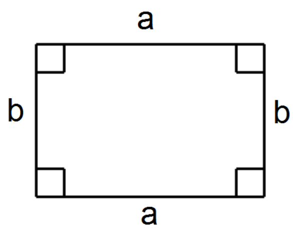
כלל: במלבן כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו באורכן.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם:

$AB = DC$

$AD = BC$

היקף מלבן

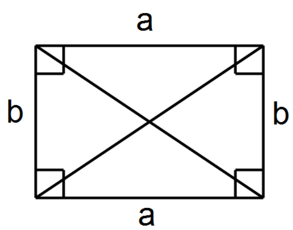


הגדרה: היקף מלבן שאורכי צלעותיו a ו- b הוא $2a+2b$.

לדוגמה: היקף מלבן שאורכי צלעותיו 3 ס"מ ו-5 ס"מ הוא:

$2\cdot5+2\cdot3=10+6=$ 16 ס"מ

אלכסון מלבן

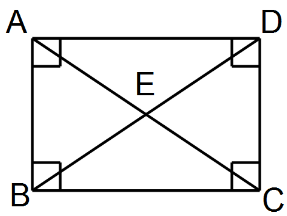


אלכסון במלבן הוא היתר במשולש ישר זווית שצלעות המלבן הן ניצביו.

כלל: אורך אלכסון מלבן שצלעותיו a ו- b הוא $\sqrt{a^2+b^2}$ (לפי משפט פיתגורס).

לדוגמה: אורך אלכסון מלבן שאורכי צלעותיו 5 ס"מ ו- 12 ס"מ הוא:

$\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=$ 13 ס"מ

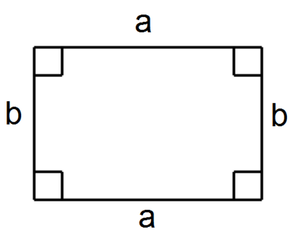


כלל: האלכסונים במלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם AC ו- BD אלכסונים במלבן $ABCD$ ולכן מתקיים:

$AC = BD$, $AE = EC$, $BE = ED$.

שטח מלבן



שטח מלבן שווה למכפלת האורכים של שתי צלעות סמוכות.

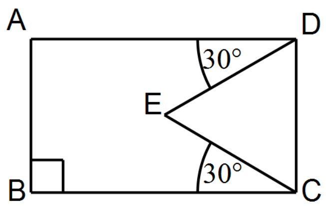
הגדרה: שטח מלבן שאורכי צלעותיו a ו- b הוא $a\cdot b$.

לדוגמה: שטח מלבן שאורכי צלעותיו 7 ס"מ ו-5 ס"מ הוא:

$7 \cdot 5 =$ סמ״ר 35

שאלה לדוגמה - מלבן

בסרטוט שלפניכם ECD משולש שווה צלעות ששטחו $4\sqrt{3}$ סמ״ר.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$AB = ?$

(1) 1 ס״מ

(2) 2 ס״מ

(3) 8 ס״מ

(4) 4 ס״מ

פתרון: נחשב את אורך צלע המשולש בעזרת נוסחת שטח משולש שווה צלעות : $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

נשווה את הנוסחה לשטח הידוע לנו : $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- 4 ונקבל כי $a^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

מחלוקה ב- $\sqrt{3}$ של שני אגפי המשוואה עולה כי $a^2 = 16$. נוציא שורש ונמצא כי 4 ס״מ $= a$.

במשולש שווה צלעות כל הזוויות בנות $60°$. לפיכך, זוויות BCD ו-ADC בנות $30° + 60° = 90°$ כל אחת.

במרובע ABCD שלוש זוויות בנות $90°$. כתוצאה מכך, גם הזווית הרביעית ישרה (סכום זוויות במרובע שווה ל- $360°$)

והמרובע הוא מלבן. במלבן, כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו ומכאן ש- $AB = CD$.

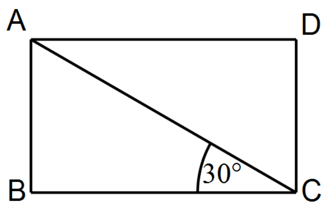
CD צלע במשולש ECD ולכן אורכה 4 ס״מ. 4 ס״מ $= AB = CD$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת- מלבן

בסרטוט שלפניכם ABCD מלבן.

נתון: $AC = 4$ ס״מ.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה היקף המלבן ABCD (בס״מ)?

(1) $2(1+\sqrt{3})$

(2) $4(1+\sqrt{3})$

(3) 8

(4) 16

פתרון:

נוסחת היקף מלבן היא $2a+2b$. נמצא את אורכי צלעות המלבן ונציב בנוסחה זו.

אלכסון המלבן, שאורכו 4 ס״מ לפי נתוני השאלה, הוא יתר במשולש ישר זווית שניצביו משמשים בתור צלעות המלבן (משולש ABC).

במשולש ABC, זווית ABC היא זווית במלבן ולכן בת 90°. פרט לזווית זו, מסומנת על גבי הסרטוט זווית נוספת בת 30°.

מכך אנו מסיקים ש- ABC הוא משולש שזוויותיו $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. במשולש כזה יחס הצלעות הוא $1:\sqrt{3}:2$.

כאמור לעיל, אורך היתר 4 ס״מ ולפיכך אורך הניצב הקצר AB הוא 2 ס״מ ואורך הניצב הארוך BC הוא $2\sqrt{3}$ ס״מ.

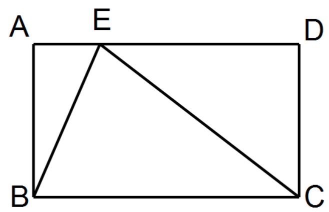
ניצבים אלה הם, כאמור, צלעות המלבן. נציב את הנתונים שמצאנו בנוסחת היקף מלבן, $2a+2b$ ונמצא כי היקפו שווה ל-

$2\cdot 2+2\cdot 2\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}$ ס״מ. התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - מלבן

בסרטוט שלפניכם מלבן ABCD ובתוכו משולש EBC ששטחו 7 סמ״ר.

הנקודה E נמצאת על צלע המלבן AD.



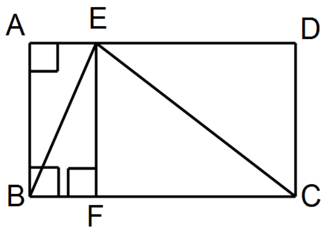
על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה שטח המלבן ABCD (בסמ״ר)?

(1) 10
(2) 12
(3) 14
(4) 21

פתרון: שטח מלבן הוא מכפלת הרוחב באורך. לכן, במקרה זה שטח המלבן ABCD הוא $AB \cdot BC$.

שטחו של המשולש EBC נתון. נזכר כי שטח משולש הוא הגובה לצלע כפול הצלע חלקי 2.



נוריד גובה מצלע BC לקדקוד E מפני שצלע זו היא גם צלע במלבן ABCD (ראה סרטוט).

נשים לב כי המרובע שנוצר, ABFE, הוא מלבן (שתיים מזוויותיו הן זוויות המלבן ABCD ולכן ישרות, והזווית EFB היא הזווית בין הגובה EF לצלע BC ולכן ישרה גם היא). במלבן צלעות נגדיות שוות ומכאן שהצלע EF שווה לצלע AB.

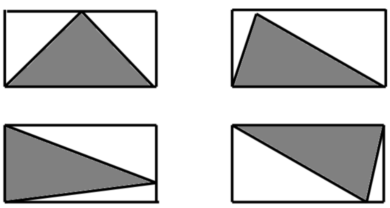
שטח משולש הוא כאמור $\frac{\text{גובה} \cdot \text{צלע}}{2}$, ולכן, שטח המשולש EBC הוא: $\frac{BC \cdot EF}{2}$.

מצאנו כי $EF = AB$, נציב זאת בנוסחת שטח המשולש EBC כדי לקשור את שטח המשולש הידוע לנו אל שטח המלבן שאינו ידוע עדיין: $\frac{BC \cdot AB}{2}$. נשווה לשטח המשולש הידוע לנו $7 = \frac{BC \cdot AB}{2}$. נכפיל את שני אגפי המשוואה ב- 2 על מנת לחלץ את שטח המלבן, ונמצא כי הוא שווה ל- 14 סמ״ר $= AB \cdot BC$.

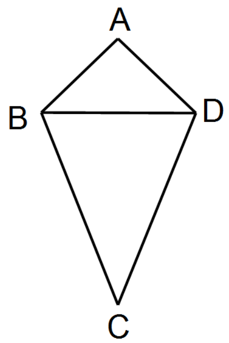
מצאנו כי שטח המלבן כפול בגודלו משטח המשולש. התשובה הנכונה היא (3).

כלל: משולש שצלעו האחת היא צלע מלבן וקדקודו על צלע המלבן הנגדית שווה בשטחו למחצית משטח המלבן.

במלבן ניתן לבנות אינסוף משולשים כאלה וכולם שווים בשטחם(ראו סרטוטים).



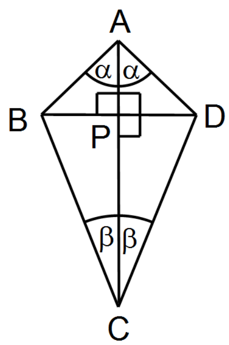
דלתון



הגדרה: דלתון הוא מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים המחוברים בבסיסם.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם הדלתון ABCD מורכב מהמשולשים ABD ו- BCD,
ולכן: $AB = AD$, $CB = CD$.

אלכסונים בדלתון

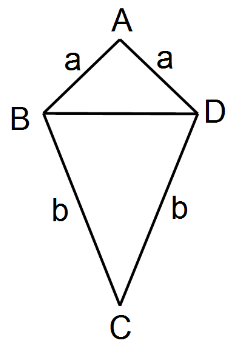


כלל: האלכסון המחבר בין שני הקדקודים של המשולשים שווי השוקיים חוצה את האלכסון שהוא בסיסם של משולשים אלה, ומאונך לו.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם AC חוצה את BD ‏($PB = PD$) וגם $AC \perp BD$.

כלל: האלכסון המחבר בין שני הקדקודים של המשולשים חוצה גם את זוויות המשולשים.

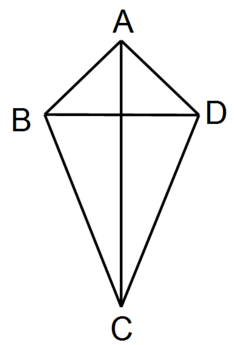
היקף דלתון



כלל: היקף דלתון שווה לסכום השוקיים של שני המשולשים המרכיבים את הדלתון.

לדוגמה: היקף הדלתון בסרטוט שלפניכם הוא: $2a + 2b$.

שטח דלתון



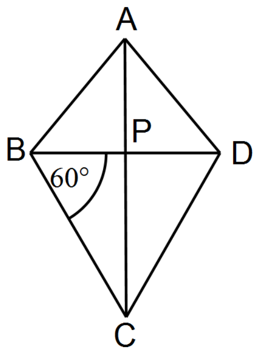
כלל: שטח דלתון שווה למחצית המכפלה של אורכי האלכסונים.

לדוגמה: שטח הדלתון בסרטוט שלפניכם הוא: $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

שאלה לדוגמה - דלתון

בסרטוט שלפניכם דלתון ABCD שהיקפו 22 ס״מ.

נתון: $DP = 3$ ס״מ.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הדלתון ABCD (בסמ״ר)?

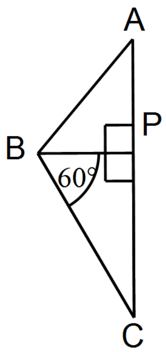
(1) $2(4+3\sqrt{2})$

(2) 30

(3) $3(4+3\sqrt{3})$

(4) $6(4+3\sqrt{3})$

פתרון: שטח דלתון הוא מחצית ממכפלת אלכסוניו. לכן, על מנת לחשב שטח דלתון אנו צריכים לדעת את אורכי אלכסוניו.
האלכסון AC חוצה את האלכסון BD, ולכן אורך האלכסון BD הוא פעמיים אורך DP ושווה 6 ס״מ.
נחפש את אורך האלכסון AC: דלתון בנוי משני משולשים שווי שוקיים. המשולש BDC הוא משולש שווה שוקיים בו אחת מהזוויות בת $60°$ ומכאן כי הוא בהכרח משולש שווה צלעות (אורך BD הוא 6 ס״מ, ומכאן כי זהו גם אורכן של יתר הצלעות).
ניעזר בהיקף הדלתון על מנת למצוא את אורך השוקיים במשולש ABD:
היקף הדלתון הוא 22 ס״מ. נוסחת היקף דלתון היא $2a+2b$ (a ו-b הם אורכי השוקיים של המשולשים המוצמדים בבסיסם). במקרה שלפנינו $b=6$ ס״מ. נציב בנוסחה ונמצא את a: $2a+2\cdot 6=22$, נפשט את הביטוי ונקבל כי $2a+12=22$, נבודד את הנעלמים והערכים המספריים לאגפים שונים ונמצא כי $2a=10$. מצמצום של שני אגפי המשוואה ב-2 עולה כי 5 ס״מ $= a$.
מצאנו כי $AD=AB=5$ ס״מ.

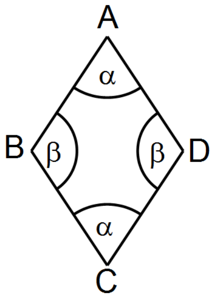


האלכסון AC מורכב מהקטעים AP ו- PC. האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה וכל אחד מהקטעים הללו הוא ניצב במשולש ישר זווית בו אנו יודעים את אורך היתר והניצב השני (ראה סרטוט).
נמצא בעזרת משפט פיתגורס את אורכי חלקי האלכסון AC:
במשולש ABP: על-פי משפט פיתגורס ניתן מתקיים כי $AB^2=AP^2+BP^2$.
נציב את האורכים הידועים לנו: $5^2=AP^2+3^2$.
נזהה ׳שלשה פיתגורית׳ המוכרת לנו (או שנפתור את המשוואה) ונקבל כי $AP=4$ ס״מ.
במשולש BPC, עפ״י משפט פיתגורס: $BC^2=PB^2+PC^2$. נציב את האורכים הידועים לנו:
$6^2=3^2+PC^2$, כלומר היתר כפול באורכו מאחד הניצבים, ומכאן כי לפנינו משולש שזוויותיו $30°,60°,90°$ ולכן אורך הניצב השני במשולש, PC, הוא $3\sqrt{3}$ ס״מ. נחבר את אורכי חלקי האלכסון שמצאנו על מנת למצוא את אורך האלכסון כולו:
נציב: $AC=AP+PC$ $AC=4+3\sqrt{3}$ ס״מ

שטח דלתון שווה למחצית המכפלה של אורכי אלכסוניו : $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

נציב הנתונים בנוסחה : $3(4+3\sqrt{3})$ סמ"ר $= \frac{6\cdot(4+3\sqrt{3})}{2}$. התשובה הנכונה היא (3).

מעוין

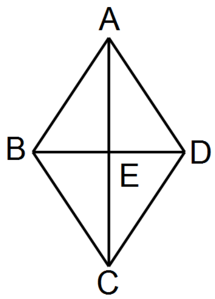


הגדרה : מעוין הוא מרובע שכל ארבע צלעותיו שוות זו לזו באורכן.
במעוין כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו וכל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו
ולכן הוא למעשה גם מקבילית שכל צלעותיה שוות.

לדוגמה : בסרטוט שלפניכם $ABCD$ מעוין. לפיכך, מתקיים :

$AB = BC = CD = DA$, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

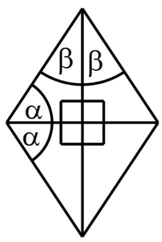
אלכסוני מעוין



כלל : מעוין הוא סוג של מקבילית, ולכן גם בו האלכסונים חוצים זה את זה.

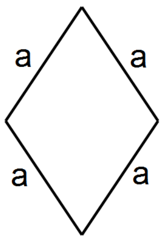
לדוגמה : בסרטוט שלפניכם $ABCD$ מעוין. AC ו- BD אלכסוניו. לפיכך, מתקיים :

$BE = ED$, $AE = EC$.



כלל : במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.

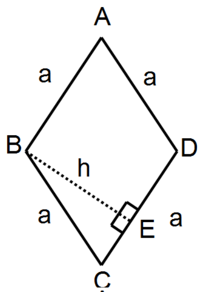
היקף מעוין



כלל : היקף מעוין שצלעו a הוא $4a$.

לדוגמה : היקף מעוין שאורך צלעו 3 ס"מ הוא 12 ס"מ $= 3 \cdot 4$

שטח מעוין

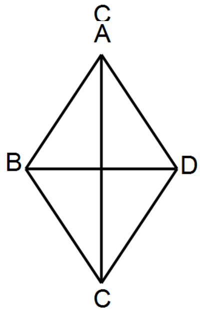


מכיוון שמעוין הוא סוג של מקבילית גם את שטחו ניתן לחשב כמכפלת צלע בגובה.

כלל : שטח מעוין שצלעו a והגובה לצלע זו h הוא : $a \cdot h$.

לדוגמה : במקבילית בה צלע שאורכה 7 ס"מ ואורך הגובה לצלע זו 4 ס"מ השטח הוא :

28 סמ"ר $= 7 \cdot 4$



כלל : שטח מעוין הוא גם מחצית המכפלה של אורכי האלכסונים.

בסרטוט שלפניכם מעוין ABCD. לכן, שטחו הוא: $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

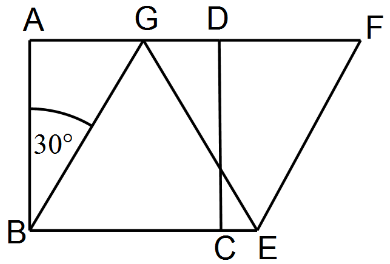
לדוגמה: שטח מעוין שאורך אלכסונו האחד 4 ס"מ ואורך אלכסונו השני 9 ס"מ הוא:

18 סמ"ר $= 2 \cdot 9 = \frac{4 \cdot 9}{2}$.

שאלה לדוגמה - מעוין

בסרטוט שלפניכם ריבוע ABCD שהיקפו $8\sqrt{3}$ ס"מ.

נתון: GBEF מעוין.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה היקף המשולש GEF (בס"מ)?

(1) $8+4\sqrt{2}$ ס"מ

(2) $4\sqrt{3}$ ס"מ

(3) $6\sqrt{3}$ ס"מ

(4) 12 ס"מ

פתרון: היקף המשולש GEF מורכב משתי צלעות המעוין (GF ו- EF) ומאלכסונו (GE).

על מנת למצוא את צלע המעוין נביט במשולש ABG: הצלע AB היא צלע משותפת למשולש זה ולריבוע. אורך צלע הריבוע הוא רבע מהיקפו, נחלץ את אורכה: $2\sqrt{3}$ ס"מ $= \frac{8\sqrt{3}}{4} = AB$.

זווית BAG היא זווית בריבוע ולכן בת $90°$ וזווית ABG בת $30°$. לפיכך, משולש ABG הוא משולש שזוויותיו $30°,60°,90°$. במשולש מסוג זה יחס הצלעות הוא $1:\sqrt{3}:2$.

הצלע שמול הזווית בת ה- $60°$ היא צלע AB השווה ל- $2\sqrt{3}$ ס"מ. מכאן שאורך היתר BG, שהוא גם צלע המעוין, 4 ס"מ.

כעת, נמצא את אורך אלכסון המעוין: זווית GBE שווה להפרש בין זווית ABE לבין זווית ABG.

זווית ABE היא זווית בריבוע ולכן ישרה. כתוצאה מכך, זווית GBE בת $90-30=60°$.

המשולש GBE הוא משולש שווה שוקיים (GB ו- BE צלעות במעוין ולכן שוות) בו אחת הזווית בת $60°$. לכן, משולש זה הוא שווה צלעות. מכאן שאורך הצלע GE, אלכסון המעוין, גם הוא 4 ס"מ.

היקף המשולש $GEF = GB+BE+GE$. נציב את האורכים שמצאנו: 12ס"מ $= 4+4+4$

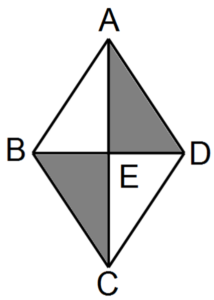
התשובה הנכונה היא (4).

כלל: משאלה זו למדנו כי אם אחת הזוויות במעוין היא בת $60°$, אז האלכסון הקצר שווה באורכו לאורך צלע המעוין.

שאלה נוספת - מעוין

בסרטוט שלפניכם מעוין ABCD שהיקפו 20 ס"מ.

נתון: BD = 6 ס"מ.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

(1) 6
(2) 12
(3) 15
(4) 24

פתרון: האלכסונים במעוין חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.
מכך ניתן כמובן להסיק כי ארבעת המשולשים הנוצרים מהעברת האלכסונים חופפים זה לזה.

השטח הכהה מורכב משטח של שני משולשים כאלה. לכן, נחשב את שטח אחד המשולשים ונכפיל אותו ב- 2 .

נתון כי היקף המעוין, המורכב מסכום אורכי הצלעות, הוא 20 ס"מ.

במעוין, אורכי כל הצלעות זהים ומכך נובע שאורך צלע המעוין הוא רבע מהיקפו. צלע המעוין: $5 = \frac{20}{4}$ ס"מ.

אורך האלכסון BD הוא 6 ס"מ ומכך שהקטעים השווים למחציתו, BE ו- ED, שווים $3 = \frac{6}{2}$ ס"מ כל אחד.

נביט במשולש AED: צלעו AD היא צלע המעוין ולכן אורכה הוא 5 ס"מ. כמו כן, מצאנו כי אורך הצלע ED הוא 3 ס"מ.
כיוון שהאלכסונים במעוין מאונכים זה לזה, זהו משולש ישר זווית.

לפי משפט פיתגורס, ניתן להסיק כי אורך ניצב המשולש השני, AE, הוא 4 ס"מ (רצוי לזכור את השלשה הפיתגורית (3,4,5).

נחשב את שטח המשולש לפי נוסחת שטח משולש ישר זווית: $\frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$ ונמצא כי הוא שווה ל- $6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$ סמ"ר.

השטח הכהה מורכב, כזכור, משני משולשים זהים ולכן גודלו שווה ל- 12 סמ"ר.
התשובה הנכונה היא (2).

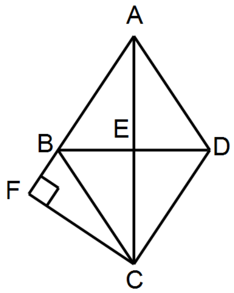
שאלה נוספת - מעוין

בסרטוט שלפניכם מעוין $ABCD$ שהיקפו 20 ס״מ.

נתון: $AE = 4$ ס״מ.

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$FC = ?$



(1) $5\frac{2}{5}$ ס״מ

(2) $4\frac{4}{5}$ ס״מ

(3) 5 ס״מ

(4) 4 ס״מ

פתרון: הקטע FC הוא גובה חיצוני לצלע המעוין AB ומכאן שתוצאת הכפלתו בצלע המעוין שווה לשטח המעוין.

דרך נוספת לחישוב שטח מעוין היא הכפלת האלכסונים וחלוקה ב- 2. נשווה בין הדרכים על מנת לחלץ את אורך הצלע FC:

$AB \cdot FC = \frac{AC \cdot BD}{2}$. כעת, עלינו למצוא את יתר הגורמים במשוואה.

AB צלע המעוין. היקף המעוין 20 ס״מ ומכאן שאורך צלע המעוין שווה ל- 5 ס״מ $= \frac{20}{4}$.

AC אלכסון במעוין. אלכסונים במעוין חוצים זה את זה, ולכן מהנתון $AE = 4$ ס״מ, ניתן להסיק כי $AC = 8$ ס״מ.

נתבונן על משולש ABE: זהו משולש ישר זווית (מכיוון שאלכסונים במעוין מאונכים זה לזה), ולכן מתקיים בו משפט פיתגורס.

אורך הצלע AB הוא 5 ס״מ ואורך הצלע AE הוא 4 ס״מ. נזהה שלשה פיתגורית מוכרת- $3,4,5$. מכך ש- $BE = 3$ ס״מ.

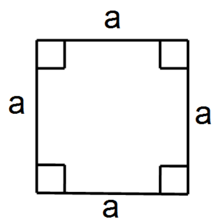
אלכסונים במעוין חוצים זה את זה ומכאן ש- BD כפול באורכו מ- BE. לכן, כי $BD = 6$ ס״מ.

נציב את כל הנתונים במשוואה: $AB \cdot FC = \frac{AC \cdot BD}{2}$:

$5 \cdot FC = \frac{6 \cdot 8}{2}$, נבודד את הנעלם FC, נמצא כי $FC = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{48}{10}$, ובצמצום נראה כי $FC = 4\frac{4}{5}$ ס״מ

התשובה הנכונה היא (2).

ריבוע



הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן וזוויותיו ישרות.
ריבוע הוא גם מעוין שכל זוויותיו ישרות ומלבן שכל צלעותיו שוות זו לזו.

היקף ריבוע

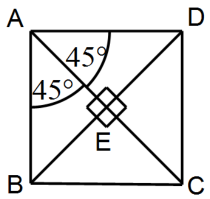
כלל: היקף ריבוע שצלעו a הוא 4a.

לדוגמה: היקף ריבוע שאורך צלעו 5 ס״מ שווה ל-20 ס״מ $= 4 \cdot 5$.

אלכסון ריבוע

כלל: אורך האלכסון בריבוע שצלעו a הוא $\sqrt{2} \cdot a$.

לדוגמה: אורך אלכסון ריבוע שאורך צלעו 4 ס״מ הוא: $4\sqrt{2}$ ס״מ.



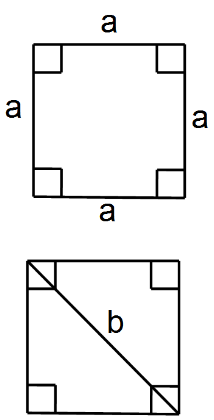
כלל: האלכסונים בריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם AC ו- BD אלכסונים בריבוע ABCD ולכן מתקיים:

$BE = ED$, $AE = EC$, $AC = BD$.

מכאן, ריבוע מורכב משני משולשים ישר זווית ושווי שוקיים גדולים (בסרטוט ABC ו-ACD)
או ארבעה משולשים ישרי זווית שווי שוקיים קטנים יותר (בסרטוט ABE ,BEC, AED ו-DEC).

שטח ריבוע



כלל: שטח ריבוע שצלעו a הוא a^2.

לדוגמה: שטח ריבוע שאורך צלעו 6 ס״מ שווה ל- 36 סמ״ר $= 6^2$.

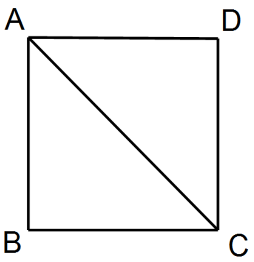
כלל: שטח ריבוע שאלכסונו b הוא $\frac{b^2}{2}$.

לדוגמה: שטח ריבוע שאורך אלכסונו 4 ס״מ שווה ל- 8 סמ״ר $= \frac{4^2}{2}$.

שאלה לדוגמה - ריבוע

בסרטוט שלפניכם ריבוע ABCD .

נתון: $AC = 2\sqrt{2}$ ס״מ.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה היקף הריבוע ABCD (בס״מ)?

(1) $4\sqrt{2}$
(2) $8\sqrt{2}$
(3) 8
(4) 4

פתרון:

האורך היחיד הידוע לנו הוא אורכו של AC , אלכסון הריבוע.
אלכסון הריבוע יוצר עם שתיים מצלעות הריבוע משולש ישר זווית שווה שוקיים, זהו משולש ABC .
משולש ישר זווית ושווה שוקיים הוא משולש שזוויותיו בנות $45°,45°,90°$. במשולש מסוג זה יחס הצלעות הוא $1:1:\sqrt{2}$.
אורך היתר במשולש (AC) הוא $2\sqrt{2}$ ס״מ. מכאן שאורך הניצבים הוא 2 ס״מ.
ניצבים אלה הם, כאמור, צלעות הריבוע. כעת, נוכל להשתמש בנוסחת היקף ריבוע: 4a , כאשר האות a מסמנת את אורך צלע הריבוע. נציב את אורך צלע הריבוע שמצאנו בנוסחת ההיקף ונמצא כי הוא שווה ל- 8 ס״מ $= 4 \cdot 2$
התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - ריבוע

שטחו של ריבוע זהה לשטח משולש ישר זווית ושווה-שוקיים, שאורך יתרו $4\sqrt{2}$ ס"מ.

מה אורך **אלכסון** הריבוע (בס"מ)?

(1) $2\sqrt{2}$

(2) $8\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{8}$

(4) 4

פתרון:

מציאת אורך אלכסון הריבוע מורכבת ממספר שלבים. ראשית, נעזר באורך יתר המשולש כדי למצוא את שטחו השווה לשטח הריבוע. באמצעות שטח הריבוע נוכל לגלות את אורך צלע הריבוע, ואז נעזר באורך צלע הריבוע כדי לחשב את אורך האלכסון.

נוסחת שטח משולש ישר זווית היא: $\frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$.

במשולש ישר זווית ושווה שוקיים יחס הצלעות הוא $1:1:\sqrt{2}$.

אורך היתר הוא $4\sqrt{2}$ ס"מ, ולכן אורך כל אחד מהניצבים 4 ס"מ.

נציב זאת בנוסחת שטח משולש ונמצא כי שטחו שווה ל- 8 סמ"ר $= 2 \cdot 4 = \frac{4 \cdot 4}{2}$.

ידוע כי שטח המשולש שווה לשטח הריבוע. לכן, עבור ריבוע שצלעו מסומנת באות a ניתן לרשום כי $a^2 = 8$.

נחלץ את אורך צלע הריבוע באמצעות הוצאת שורש משני אגפי המשוואה: $\sqrt{8}$ ס"מ $= a$.

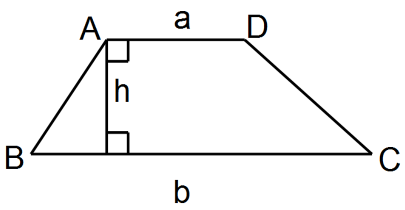
אלכסון בריבוע ארוך פי $\sqrt{2}$ מצלע הריבוע ולכן אורכו שווה ל- 4 ס"מ $= \sqrt{16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

התשובה הנכונה היא (4).

טרפז

טרפז הוא מרובע מיוחד שאינו דומה בתכונותיו למרובע אחר.

כלל: בטרפז **רק זוג אחד** של צלעות המקבילות זו לזו.



הצלעות המקבילות נקראות בסיסים. שתי הצלעות הנותרות נקראות שוקיים.
בסיסי הטרפז אינם שווים זה לזה ולכן מכנים אותם לעיתים 'הבסיס הגדול' ו'הבסיס הקטן'.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם $ABCD$ טרפז ובו מתקיים כי $AD \parallel BC$.

גובה הטרפז הוא קטע המחבר בין בסיסי הטרפז ומאונך להם.

כלל: שטח הטרפז שווה למחצית המכפלה של סכום אורכי הבסיסים בגובה הטרפז.

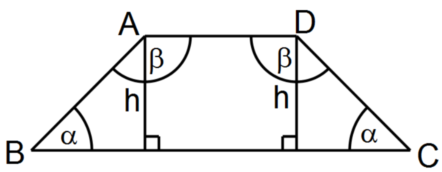
שטח טרפז שבסיסיו a ו- b וגובהו h הוא: $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

כלל: בטרפז סכום זוג זוויות הנשענות על אותה השוק 180° (זוויות צמודות בין ישרים מקבילים).

טרפז שווה שוקיים

הגדרה: טרפז שווה שוקיים הוא טרפז שבו השוקיים שוות זו לזו באורכן.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם $ABCD$ טרפז שווה שוקיים ולכן $AB = CD$ ו- $AD \parallel BC$.

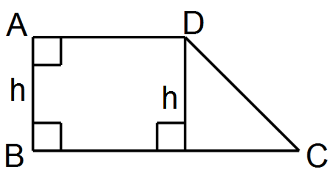


כלל: בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס הקטן שוות זו לזו וזוויות הבסיס הגדול שוות זו לזו.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם זווית ABC שווה לזווית DCB
וזווית BAD שווה לזווית CDA.

בניית עזר נפוצה בשאלות בהן מופיע טרפז שווה שוקיים היא הורדת שני גבהים מקצות הבסיס הקטן לעבר הבסיס הגדול.
מבניית עזר זו נקבל מלבן ושני משולשים ישרי זווית זהים.

טרפז ישר זווית



הגדרה: טרפז ישר זווית הוא טרפז שבו אחת השוקיים אנכית לבסיסים.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם $ABCD$ טרפז ישר זווית.

הזוויות ABC ו- BAD ישרות.

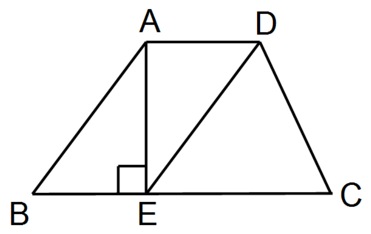
בניית עזר נפוצה בשאלות בהן מופיע טרפז ישר זווית היא הורדת גובה מקצה הבסיס הקטן (בצד של הזווית שאינה ישרה) לעבר הבסיס הגדול.
מבניית עזר זו נקבל מלבן ומשולש ישר זווית.

שאלה לדוגמה - טרפז

בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ששטחו 22 סמ"ר ובתוכו מקבילית $ABED$.

נתון: $AD = 3$ ס"מ

$DE = 5$ ס"מ



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$EC = ?$

(1) 5 ס"מ
(2) 6 ס"מ
(3) 8 ס"מ
(4) 4 ס"מ

פתרון: אנו נשאלים על EC שהוא חלק מבסיס הטרפז BC. בסיס הטרפז מהווה גורם בנוסחת שטח טרפז $\left(\frac{(a+b)\cdot h}{2}\right)$.

שטח הטרפז נתון ולכן נוכל להיעזר בו כדי לחשב את EC. לפני כן, עלינו למצוא את ערכם של שאר הגורמים בנוסחת השטח.

אורכו של בסיס הטרפז הקטן, AD, ידוע לנו מנתוני השאלה.

בסיס הטרפז הגדול מורכב מחיבור שני קטעים: $EC + BE$.

BE צלע במקבילית $ABED$. במקבילית צלעות נגדיות שוות ולכן אורך BE שווה לאורך $AD = 3$ ס"מ.

כתוצאה מכך, אורך בסיס הטרפז הגדול הוא $EC + 3$.

כעת, נחפש אחרי הנתון החסר לנו להשלמת נוסחת שטח הטרפז, גובה הטרפז, AE.

הגובה AE הוא ניצב במשולש ישר זווית ABE. במשולש ABE ידוע לנו כי אורך הניצב BE הוא 3 ס"מ.

נתון כי $DE = 5$ ס"מ. כיוון שצלעות נגדיות במקבילית שוות, אורך היתר במשולש $AB = DE = 5$ ס"מ.

נזהה 'שלשה פיתגורית' המוכרת לנו- $3,4,5$ ומכאן שאורך הניצב $EA = 4$ ס"מ.

כעת, נציב את הנתונים בנוסחת שטח טרפז ונשווה לשטח הידוע לנו מנתוני השאלה: $22 = \frac{(3+3+EC)\cdot 4}{2}$,

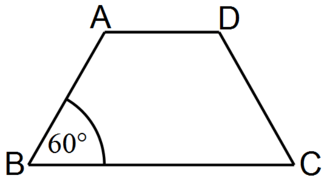
נצמצם את השבר באגף השמאלי ונקבל כי $(6+EC)\cdot 2 = 22$ ומצמצום של שני אגפי המשוואה ב- 2 עולה כי $6 + EC = 11$

נבודד את הנעלם ונמצא כי 5 ס"מ $= EC$. התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - טרפז

בסרטוט שלפניכם טרפז שווה שוקיים ABCD שאורך כל אחת משוקיו 4 ס״מ.

נתון: AD = 3 ס״מ.

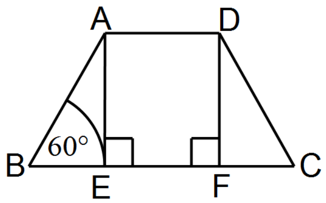


על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הטרפז ABCD (בסמ״ר)?

(1) $20\sqrt{2}$
(2) $10\sqrt{2}$
(3) $6\sqrt{3}$
(4) $10\sqrt{3}$

פתרון: שטח הטרפז הוא מחצית ממכפלת סכום הבסיסים בגובה הטרפז. אורך הבסיס הקטן ידוע לנו, ולכן על מנת לחשב את שטח הטרפז נמצא את אורך הגובה ואורך הבסיס הגדול.

נעזר בבניית עזר מוכרת על מנת למצוא את אורכם של הגובה והבסיס הגדול.



נוריד גבהים מקצוות הבסיס הקטן לעבר הבסיס הגדול (ראו סרטוט).

מבנייה זו התקבלו שני משולשים ישרי זווית ומלבן.

נתון כי זווית הבסיס בטרפז בת $60°$ וידוע כי זווית בין גובה לבסיס ישרה.

מכאן שהמשולשים שנוצרו, ABE ו-DFC, הם משולשים שזוויותיהם $30°,60°,90°$.

נביט באחד המשולשים (הם זהים ולכן אין זה משנה במי מהם).

היתר במשולש ABE, AB, הוא גם שוק הטרפז ואורכו הוא 4 ס״מ.

במשולש מסוג זה יחס הצלעות הוא $1:\sqrt{3}:2$. לכן, אורך הניצב הקצר BE הוא 2 ס״מ.

כמו כן, הניצב הארוך במשולש, AE, הוא גובה בטרפז שאורכו $2\sqrt{3}$ ס״מ.

מצאנו את אורך גובה הטרפז וכעת נחפש את אורך הבסיס הארוך.

הבסיס הארוך מורכב מפעמיים אורך הניצב הקצר במשולשים (BE ו-FC) ועוד אורך צלע המלבן FE.

כל האורכים הללו ידועים לנו. נחבר אותם ונמצא כי אורכו הוא 7 ס״מ $= 2 \cdot 2 + 3$.

נציב בנוסחת שטח טרפז $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ את ערכי הצלעות המתאימות $\frac{(AD+BC)\cdot AE}{2}$, ונמצא כי שטחו שווה

ל- $10\sqrt{3}$ ס״מ $= \frac{(3+7)\cdot 2\sqrt{3}}{2}$.

התשובה הנכונה היא (4).

לסיכום,

על מנת לשלוט בתכונות המרובעים, זכרו:

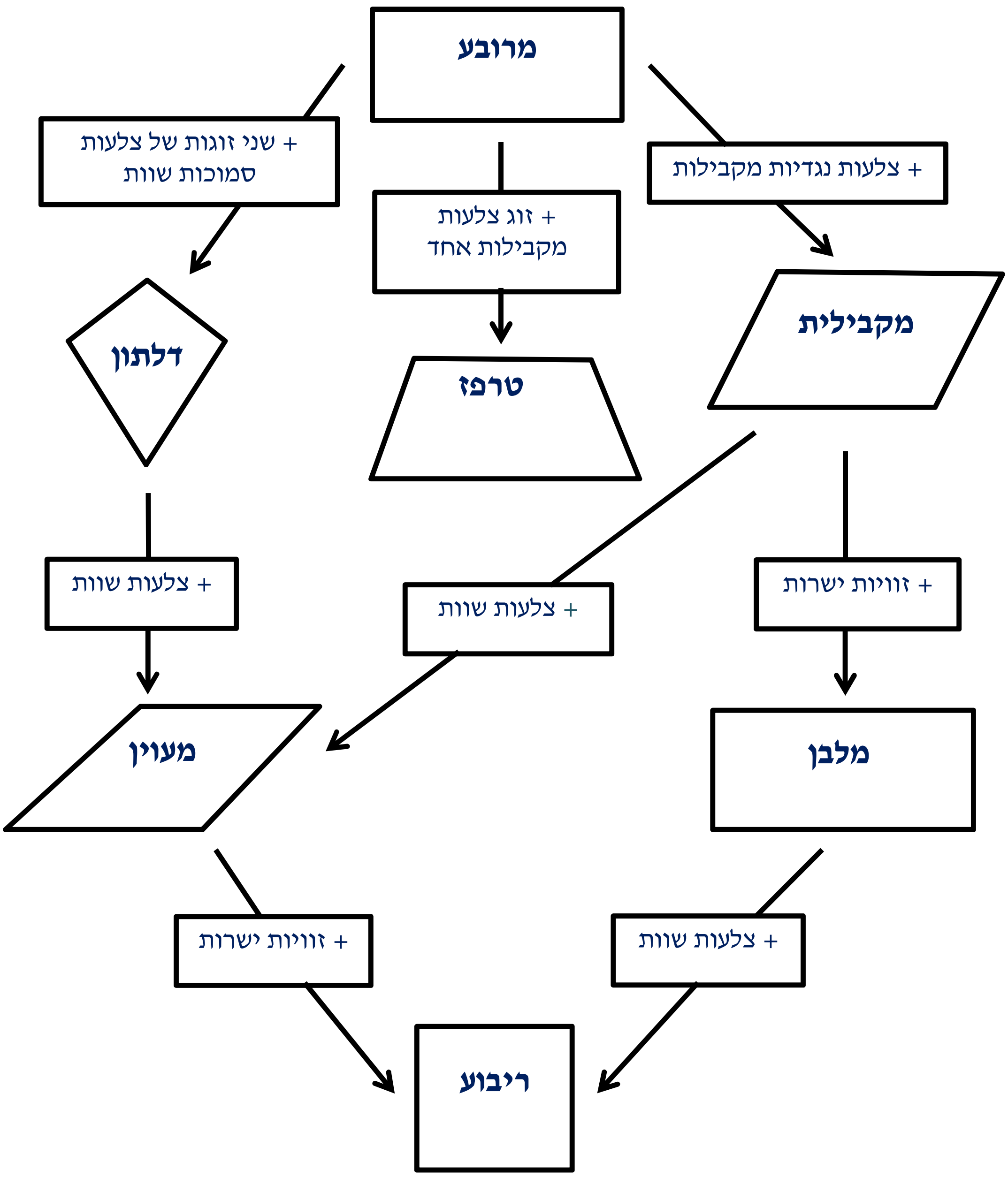
כלל: כל מרובע שהוא מקרה פרטי של מרובע אחר מקיים את תכונותיו של המרובע האחר ובנוסף אליהן תכונות נוספות.

לדוגמה: מלבן מקיים את כל תכונות המקבילית ומוסיף עליהן תכונות נוספות.

כלל: כל עוד לא נאמר אחרת – מרובע מסוג מסוים יכול להיות גם מקרה פרטי יותר.

לדוגמה: כל מעוין מקיים את כל תכונות המקבילית והדלתון, אך מעוין **עשוי** להיות גם ריבוע.

<u>עץ משפחת המרובעים:</u>



<u>סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!</u>