

אלגברה

משוואה אחת

שיעור משוואה

את מושג המשוואה הכרנו בספר "יסודות מתמטיים".
בשיעור זה נכיר את סוגי המשוואות שיופיעו בבחינה הפסיכומטרית ונלמד את הכלים שיאפשרו לנו להתמודד איתן.

ריבוי נעלמים במשוואה אחת

כשיש יותר מנעלם אחד במשוואה אחת, ככל הנראה, אי-אפשר להגיע לערך המספרי של כל הנעלמים.
יחד עם זאת, עדיין ניתן לבטא את אחד הנעלמים באמצעות הנעלמים האחרים או למצוא יחס בין מספר נעלמים.

שאלה לדוגמה – ריבוי נעלמים

$$\frac{(k+3)}{m} = \frac{x}{(k+3)} \quad \text{נתון:}$$

$$m \neq 0, k \neq (-3), x \neq 0$$

$$m = ?$$

$$\frac{x}{(k+3)^2} \quad (4)$$

$$\frac{(k+3)^2}{k} \quad (3)$$

$$(k+3)^2 - x \quad (2)$$

$$\frac{(k+3)^2}{x} \quad (1)$$

פתרון: על אף שבשאלה זו מופיעים מספר נעלמים במשוואה אחת בלבד, אנו מעוניינים רק בערכו של הנעלם m .
לכן, נתייחס לכל שאר הנעלמים כאילו היו מספרים רגילים לכל דבר – נחבר, נחסר, נכפול ונחלק בהם לפי הצורך,
זאת כדי לבודד את הנעלם m .

נכפול את המכנה של האגף הימני במונה האגף השמאלי, ואת המכנה של האגף השמאלי במונה של האגף הימני.
על ידי כפל בהצלבה זה נקבל את הביטוי: $(k+3) \cdot (k+3) = x \cdot m$.

$$\text{נחלק את שני האגפים ב-} x \text{ ונמצא כי } \frac{(k+3) \cdot (k+3)}{x} = m, \text{ כלומר: } \frac{(k+3)^2}{x} = m$$

התשובה הנכונה היא (1).

הצבת תשובות

בשאלות בהן נתוני המשוואה נתונים באופן מילולי, לעתים יהיה קל להציב תשובות ולבדוק האם הן מקיימות את נתוני השאלה.

שאלה לדוגמה – הצבת תשובות

רחל בחרה מספר כלשהו x וביצעה את הפעולות הבאות, בזו אחר זו.
היא חילקה את x ב-5, מהתוצאה שהתקבלה חיסרה 6,
את ההפרש שהתקבל כפלה ב-10, ולמכפלה שהתקבלה הוסיפה 40.
לאחר כל הפעולות שעשתה, קיבלה רחל שוב את המספר שבחרה, את x .

$$x = ?$$

0 (4)

6 (3)

20 (2)

15 (1)

פתרון: כאשר אנו מזהים כי בניית המשוואה הינה תהליך מורכב, או כאשר אנו מזהים כי פעולות החשבון בשאלה הינן בסיסיות, ופשוטות לבדיקה זריזה, נוכל לנסות להציב תשובות ולבדוק מי מהן מקיימת את תנאי השאלה:

תשובה (1): נחלק את 15 ב-5 ונקבל 3, נחסר מ-3 את המספר 6 ונקבל (-3) , נכפול את ההפרש שהתקבל ב-10 ונקבל (-30) .

לאחר שנוסיף למספר זה 40 לא נקבל בחזרה 15, אלא 10. התשובה נפסלת.

תשובה (2): נחלק את 20 ב-5 ונקבל 4, נחסר מ-4 את המספר 6 ונקבל (-2) , נכפול את ההפרש שהתקבל ב-10 ונקבל (-20) .

לאחר שנוסיף למספר זה 40 נקבל בחזרה את המספר 20. זו התשובה הנכונה.

כאשר הגענו לתשובה הנכונה מתוך הצבת תשובות אין צורך להמשיך בבדיקת התשובות, אך נמשיך לשם התרגול.

תשובה (3): נחלק את 6 ב-5 ונקבל מספר שאינו שלם $\frac{6}{5}$, גם כשנחסר ממנו את המספר 6 נקבל מספר שאינו שלם $\left(-4\frac{4}{5}\right)$,

כאשר נכפיל מספר זה ב-10 נקבל $(-48) = \left(-\frac{10 \cdot 24}{5}\right) = 10 \cdot \left(-4\frac{4}{5}\right)$, לאחר שנוסיף למספר זה 40 נקבל 8. התשובה

נפסלת.

תשובה (4): נחלק את 0 ב-5 ונקבל 0, נחסר מ-0 את המספר 6 ונקבל (-6) . כעת, נכפול את ההפרש שהתקבל ב-10 ונקבל (-60) .

לאחר שנוסיף למספר זה 40 נקבל את המספר (-20) . התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

בניית משוואה

שאלות בהן אנו נדרשים לבנות משוואה מאתגרות, כיוון שהן משלבות שימוש ביכולות מילוליות ויכולות כמותיות. בשאלות אלו למעשה מוכתבת עבורנו המשוואה ועלינו לתרגם אותה מעברית ל"כמותית". עלינו מוטלת מלאכת זיהוי מילות המפתח, אותן ניתן להחליף בפעולות חשבוניות. אמנם לא מדובר במדע מדויק, אך עם התרגול תחושו שיפור בזיהוי "כוונת המשורר" בשאלות אלו.

להלן טבלת 'מילות מפתח' לשאלות בניית משוואה:

מילה או ביטוי	משמעות חשבונית
ועוד, הוסיפו, יותר, גדל ב-, עלה, סכום	+ (חיבור)
פחות, מינוס, הורידו, הפחיתו, קטן ב-, הפרש	- (חיסור)
פי, כפול, מהווה, מכפלת	× (כפל)
לחלק ל-, מתוך, חלקי, מחצית, שליש, רבע	÷ (חילוק)
שווה ל-, זהה ל-, הוא/הם	= (שווה)

שאלה לדוגמה – בניית משוואה

מחיר ק"ג אפרסקים בשוק הוא $2a$ שקלים. מחיר ק"ג בננות בשוק הוא $\frac{32+3a^2}{a}$ שקלים ($a > 0$).

ידוע ש-2.5 ק"ג אפרסקים עולים כמו ק"ג אחד של בננות.

מה מחיר ק"ג אפרסקים (בשקלים)?

10 (4)

8 (3)

2 (2)

6 (1)

פתרון: המשוואה הוכתבה עבורנו בשאלה: מחיר 2.5 ק"ג אפרסקים שווים למחיר ק"ג אחד של בננות.

מחיר ק"ג אפרסקים בשוק הוא $2a$ שקלים, ולכן מחיר 2.5 ק"ג אפרסקים הוא $5a = (2.5 \cdot 2a)$ שקלים.

מחיר ק"ג בננות בשוק הוא $\frac{32+3a^2}{a}$ שקלים.

מכאן שהמשוואה שהוכתבה לנו, מחיר 2.5 ק"ג אפרסקים = מחיר ק"ג אחד של בננות, היא $\frac{32+3a^2}{a} = 5a$.

נכפול את שני אגפי המשוואה ב- a ונמצא כי $32+3a^2 = 5a^2$.

נבודד את הנעלמים לאגף ימין ונקבל $32 = 5a^2 - 3a^2$, כלומר: $32 = 2a^2$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונראה ש- $16 = a^2$. מהוצאת שורש משני האגפים עולה כי $a = 4$. מכאן, $2a = 8$.

התשובה הנכונה היא (3).

הצבת תשובות או בניית משוואה

שאלות מסוימות אפשר לפתור גם בעזרת הצבה וגם בעזרת בניית משוואה. נבחר בדרך הנוחה מבין השתיים, ואם התקשינו באחת – לא נתעכב וננסה לפתור בדרך השנייה.

שאלה לדוגמה – הצבה או בנייה

נטע העבירה $\frac{3}{4}$ מתכולתו של בקבוק א' אל בקבוק ב' (שהיה ריק לפני כן).

לאחר מכן העבירה נטע $\frac{1}{3}$ מתכולתו של בקבוק ב' חזרה אל בקבוק א'.

כעת יש בבקבוק א' 8 ליטרים של מים.

כמה ליטרים של מים היו בבקבוק א' בהתחלה?

20 (4)

16 (3)

12 (2)

8 (1)

פתרון: המשוואה הנתונה בשאלה: חלק מסוים מתכולתו של בקבוק א' שווה ל-8 ליטרים של מים.

נסמן את תכולת בקבוק א' באות x , ונמצא מה הוא אותו חלק מתכולתו של בקבוק א' ששווה ל-8 ליטרים:

נאמר לנו כי נטע העבירה $x \cdot \frac{3}{4}$ מהמים לבקבוק ב', מכך נסיק כי בבקבוק א' נותרו $x \cdot \frac{1}{4}$ מהמים שהיו בו.

לאחר מכן, העבירה $\frac{1}{3}$ מתכולתו של בקבוק ב' חזרה לבקבוק א', מכך נסיק כי היא העבירה חזרה $x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}x$.

לפיכך, תכולתו של בקבוק א' לאחר ההעברות היא $x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x$.

נתון כי לאחר העברות המים, כמות המים בבקבוק א' היא 8 ליטרים. נשווה זאת לביטוי שמצאנו ונמצא את הנעלם: $\frac{1}{2}x = 8$.

נכפיל את אגפי המשוואה ב-2 ונמצא כי $x = 16$.

נוכל לפתור שאלה זו גם בעזרת הצבת תשובות:

נציב את תשובה מספר (1), נניח שבבקבוק היו 8 ליטרים של מים בהתחלה.

נמצא כי נטע העבירה 6 ליטרים מבקבוק א' לבקבוק ב' $\left(\frac{3}{4} \cdot 8 = 6\right)$.

לאחר מכן, העבירה חזרה 2 ליטרים מבקבוק ב' לבקבוק א' $\left(\frac{1}{3} \cdot 6 = 2\right)$.

כלומר, כעת יש בבקבוק א' 4 ליטרים של מים. אך אנו יודעים כי לפי נתוני השאלה, כעת יש בבקבוק א' כמות כפולה של מים.

לפיכך, נוכל להסיק כי הכמות ההתחלתית שהייתה בבקבוק א' כפולה מ-8 ליטרים, כלומר היו בבקבוק א' 16 ליטרים.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – הצבה או בנייה

בשני חדרים יש יחדיו 50 כיסאות.

אם יעבירו לחדר ב' $\frac{4}{9}$ מהכיסאות שבחדר א', יהיה מספר הכיסאות בשני החדרים שווה.

כמה כיסאות היו בחדר א' בהתחלה ?

45 (4)

36 (3)

27 (2)

18 (1)

פתרון: ניתן לפתור שאלה זו באמצעות הצבת תשובות או באמצעות בניית משוואה.

נתחיל בהצבת תשובות.

תשובה (4): אם היו בחדר א' בתחילה 45 כסאות, בחדר ב' היו 5 כסאות ($50 - 45 = 5$).

אם יעבירו לחדר ב' $\frac{4}{9}$ מ-45 הכיסאות, למעשה יעבירו 20 כסאות ($\frac{4}{9} \cdot 45 = 20$).

לאחר ההעברה, בחדר א' יהיו $45 - 20 = 25$ כסאות ובחדר ב' גם יהיו 25 כסאות ($5 + 20 = 25$). זו התשובה הנכונה.

למעשה, יכולנו להעריך כי התשובה הנכונה היא (4) – אם עלינו להעביר כמעט ממצצית מהכיסאות מחדר אחד לחדר השני כדי שמספרם יהיה שווה, כנראה שבחדר אחד היו בתחילה **רוב** הכיסאות. לכן, כדאי היה להציב דווקא את המספר הגדול ביותר בתשובות.

לחילופין, אפשר לסמן את מספר הכיסאות בחדר א' באות x .

נעזר בנתוני השאלה ונביע גם את מספר הכיסאות בחדר ב' בעזרת האות x . כלומר, מספר הכיסאות בחדר ב' הוא $(50 - x)$.

אם יעבירו לחדר ב' $\frac{4}{9}$ מ- x הכיסאות, למעשה יעבירו $\left(\frac{4}{9} \cdot x\right)$ כסאות.

לאחר ההעברה, בחדר א' יהיו $\left(x - \frac{4}{9} \cdot x\right)$ כיסאות ובחדר ב' יהיו $\left(50 - x + \frac{4}{9} \cdot x\right)$ כיסאות.

כלומר, בחדר א' יהיו $\left(\frac{5}{9} \cdot x\right)$ כיסאות ובחדר ב' יהיו $\left(50 - \frac{5}{9} \cdot x\right)$ כיסאות.

לאחר ההעברה, מספר הכיסאות בשני החדרים שווים ומכאן ש- $x = \frac{5}{9} \cdot x = 50 - \frac{5}{9} \cdot x$. נבודד את הנעלם ונקבל כי $50 = \frac{10}{9} \cdot x$.

נכפול את שני האגפים ב- $\frac{9}{10}$ ונמצא כי $x = 50 \cdot \frac{9}{10} = 5 \cdot 9 = 45$. כלומר, בתחילה היו בחדר א' 45 כיסאות.

התשובה הנכונה היא (4).

מצאת יחס או ביטוי מתוך משוואה

לעיתים נדרש למצוא את היחס בין נעלמים, למשל $\frac{x}{y}$, או את ערכו של ביטוי מסוים, למשל xy , מתוך משוואה נתונה.

שאלה נוספת – יחס מתוך משוואה

מחירים הכולל של 3 מסטיקים ו-6 סוכריות שווה למחיר 7 מסטיקים.

$$\frac{\text{מחיר מסטיק}}{\text{מחיר סוכריה}} = ?$$

$$\frac{4}{7} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

פתרון: ראשית, נסמן את מחירו של מסטיק באות a ואת מחירה של סוכריה באות b . עלינו למצוא את הביטוי $\frac{a}{b}$.

בשאלה מוכתבת עבורנו משוואה: $7 \cdot a = 6 \cdot b + 3 \cdot a$. נעביר אגפים ונראה כי $4 \cdot a = 6 \cdot b$.

נחלק את שני האגפים ב- $4 \cdot b$ ונמצא כי $\frac{a}{b} = \frac{6}{4}$. נצמצם את השבר באגף השמאלי ב-2 ונקבל $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – יחס מתוך משוואה

במדינה מסוימת ירדה כמות יומית קבועה של שלג במהלך 10 ימי "חג האוונים".
כמות השלג הכוללת שירדה במהלך "חג האוונים" גדולה פי 5 מכמות השלג שירדה בכל אחד מימי "חג הפרפרים".
פי כמה גדולה כמות השלג שירדה בכל אחד מימי "חג הפרפרים" מכמות השלג שירדה בכל אחד מימי "חג האוונים"?

4 (4)

10 (3)

2 (2)

5 (1)

פתרון: כדי למצוא את היחס בין כמויות השלגים בחגים המדוברים נסמן את כמות השלג היומית ב"חג האוונים" באות A ואת כמות השלג היומית ב"חג הפרפרים" באות P .
בשאלה מוכתבת עבורנו המשוואה הבאה: $10A = 5P$. נחלק את אגפי המשוואה ב-2 ונסיק כי $2A = P$.
כלומר, כמות השלג היומית ב"חג הפרפרים" גדולה פי 2 מכמות השלג היומית ב"חג האוונים".
התשובה הנכונה היא (2).

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!