

# בעיות כמותיות

---

## בעיות חפיפה

## בעיות חפיפה

### מבוא

בבעיות חפיפה נידרש למצוא תחומי חפיפה, אם קיימים, בין קבוצות שונות.

### לדוגמה:

בכיתה ישנם 20 תלמידים כאשר נתון לנו של-12 תלמידים יש חולצה כחולה ול-8 תלמידים יש כובע אדום. לגבי הדוגמה הזו, אנו עשויים להישאל למשל, לכמה תלמידים, **לכל היותר**, יש חולצה כחולה **וגם** כובע אדום - כלומר, מבקשים מאיתנו למצוא **חפיפה מקסימלית** בין הקבוצות. כמו כן, אנו עשויים להישאל לכמה תלמידים, **לכל הפחות**, יש חולצה כחולה **וגם** כובע אדום - כלומר, מבקשים מאיתנו למצוא חפיפה **מינימלית** בין הקבוצות.

בחלק הזה של השיעור נתייחס לחפיפה מקסימלית, בחלק הבא לחפיפה מינימלית ובחלק השלישי והאחרון לשאלות בהן החפיפה נתונה.

## חפיפה מקסימלית

נחזור לדוגמה שהוצגה קודם.

נעמיד בשורה את 12 התלמידים אשר להם חולצה כחולה.

כעת, בכדי ליצור **חפיפה מקסימלית**, כלומר חפיפה גדולה ככל האפשר בין הקבוצות - נעמיד את 8 התלמידים אשר להם כובע אדום מתחתם (ראו סרטוט מצורף):

12 חולצה כחולה	
8 כובע אדום	
20 תלמידים	

על פי הסרטוט, ניתן לראות שייתכן של-8 התלמידים אשר להם כובע אדום יש גם חולצה כחולה, כלומר מתקיימת חפיפה בין הקבוצות.

שימו לב כי חפיפה זו היא המספר המרבי האפשרי של תלמידים אשר להם חולצה כחולה **וגם** כובע אדום. כלומר, החפיפה לא יכולה להיות גדולה יותר מ-8, וזאת משום שהתייחסנו למקרה המקסימלי - לפיו כל הפרטים בקבוצה הקטנה (כובע אדום) מקיימים גם את המאפיין של הקבוצה הגדולה (חולצה כחולה).

לסיכום, בשאלות בהן נתבקש למצוא **חפיפה מקסימלית**, אשר לרוב יופיע בהן הצירוף "**לכל היותר**", נקבע איזו קבוצה היא הקטנה ביותר מבין הקבוצות הנתונות - גודלה יהיה כגודל החפיפה המקסימלית.

✓ **כלל:** חפיפה מקסימלית בין קבוצות שווה לגודלה של הקבוצה הקטנה מבין הקבוצות המבוקשות.

**שאלה לדוגמה - חפיפה מקסימלית**

במגרש החניה 110 מכוניות, מהן 40 מקולקלות ו-60 שאינן לבנות.

כמה מכוניות במגרש החניה, לכל היותר, הן מכוניות לבנות שאינן מקולקלות?

(1) 70

(2) 20

(3) 50

(4) 40

**פתרון**

ראשית, נסדר את הנתונים לפי השאלה ונזכור כי במגרש החניה בסך הכול 110 מכוניות.

נתון כי 40 מכוניות מקולקלות, ולכן ניתן להסיק כי 70 מכוניות אינן מקולקלות ( $110 - 40 = 70$ ).

כמו כן, נתון כי 60 מכוניות אינן לבנות, ולכן ניתן להסיק כי 50 מכוניות הן לבנות ( $110 - 60 = 50$ ).

נשים לב כי מופיע בשאלה הצירוף "לכל היותר", ולכן עלינו למצוא את החפיפה המקסימלית בין 2 הקבוצות: 50 מכוניות

**לבנות, ו-70 מכוניות שאינן מקולקלות.**

הכלל הוא, שהחפיפה המקסימלית בין כל 2 קבוצות נתונות, שווה לגודל הקבוצה הקטנה מבין השתיים, ובמקרה הנתון בשאלה,

המצב המרבי הוא שכל 50 המכוניות הלבנות אינן מקולקלות.

נדגים זאת על גבי סרטוט:

70 מכוניות שאינן מקולקלות	
50 מכוניות לבנות	
110 מכוניות	

**התשובה הנכונה היא (3).**

### חפיפה מינימלית

בשיעור הקודם דיברנו על **חפיפה מקסימלית** בין קבוצות, כלומר חפיפה אשר גדולה **לכל היותר**. בשיעור זה נדבר על **חפיפה מינימלית** בין קבוצות, כלומר החפיפה הקטנה ביותר (**לכל הפחות**). בשאלות מסוג זה, ננסה להימנע ככל האפשר מחפיפה בין הקבוצות, אולם כפי שתראו בהמשך - לעתים לא ניתן להימנע מחפיפה ומוכרח להיות חפיפה כלשהי.

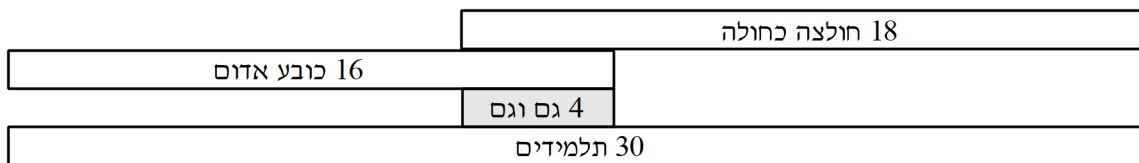
#### לדוגמה:

בכיתה ישנם 30 תלמידים כאשר נתון לנו של-18 תלמידים יש חולצה כחולה ול-16 תלמידים יש כובע אדום. נזכיר כי אילו היינו נשאלים על **החפיפה המקסימלית**, התשובה הייתה 16, **כגודל הקבוצה הקטנה**.

כאמור, בשיעור זה נתייחס לחפיפה מינימלית.

לשם כך, נעמיד בשורה את 18 התלמידים אשר להם חולצה כחולה.

כעת, בכדי ליצור **חפיפה מינימלית**, כלומר חפיפה קטנה ככל האפשר בין הקבוצות - נעמיד את 16 התלמידים אשר להם כובע אדום מהצד השני (ראו סרטוט מצורף):



ניתן לראות בסרטוט כי אין אפשרות להימנע מחפיפה בין הקבוצות, כלומר חייבים להיות מספר תלמידים אשר להם כובע אדום **וגם** חולצה כחולה - מספר התלמידים הללו מייצג את **החפיפה המינימלית**.

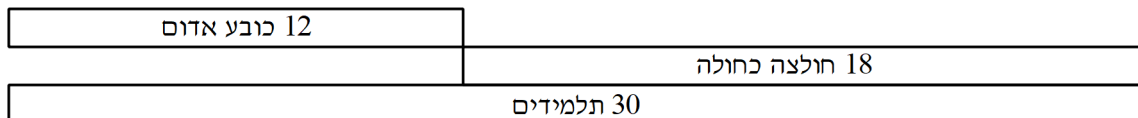
את החפיפה המינימלית נמצא ע"י חיסור השלם (30 תלמידים) מסכום הקבוצות (16 תלמידים להם כובע אדום ועוד 18 תלמידים להם חולצה כחולה):  $16 + 18 - 30 = 4$ . מכאן שישנם 4 תלמידים, **לכל הפחות**, אשר להם כובע אדום **וגם** חולצה כחולה. כלומר, החפיפה המינימלית היא 4.

#### דוגמה נוספת:

בכיתה ישנם 30 תלמידים כאשר נתון לנו של-18 תלמידים יש חולצה כחולה ול-12 תלמידים יש כובע אדום.

נעמיד בשורה את 18 התלמידים אשר להם חולצה כחולה.

כעת, בכדי ליצור **חפיפה מינימלית**, כלומר חפיפה קטנה ככל האפשר בין הקבוצות - נעמיד את 12 התלמידים אשר להם כובע אדום מהצד השני (ראו סרטוט מצורף):



כאמור, חפיפה מינימלית שווה לסכום הקבוצות פחות השלם:  $12 + 18 - 30 = 0$ . כלומר, במקרה הזה לא חייבת להיות חפיפה בין הקבוצות.

**דוגמה נוספת:**

בכיתה ישנם 30 תלמידים כאשר נתון לנו של-15 תלמידים יש חולצה כחולה ול-12 תלמידים יש כובע אדום. נעמיד בשורה את 15 התלמידים אשר להם חולצה כחולה. כעת, בכדי ליצור **חפיפה מינימלית**, כלומר חפיפה קטנה ככל האפשר בין הקבוצות - נעמיד את 12 התלמידים אשר להם כובע אדום מהצד השני (ראו סרטוט מצורף):



כאמור, חפיפה מינימלית שווה לסכום הקבוצות פחות השלם:  $12 + 15 - 30 = -3$ . כלומר, גם בדוגמה הזו לא חייבת להיות חפיפה בין הקבוצות.

✓ **כלל:** את החפיפה המינימלית בין קבוצות נמצא על ידי חיסור השלם מסכום הקבוצות.

✓ **כלל:** כאשר נחסר את השלם מסכום הקבוצות, ונקבל תוצאה שלילית או שערכה 0, נסיק כי לא בהכרח קיימת חפיפה בין הקבוצות.

**שאלה לדוגמה - חפיפה מינימלית**

בקערה 14 פירות, מהם 8 אינם מתוקים, ו-9 עגולים. כמה פירות, לכל הפחות, הם גם מתוקים וגם עגולים?

(1) 1

(2) 6

(3) 3

(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים

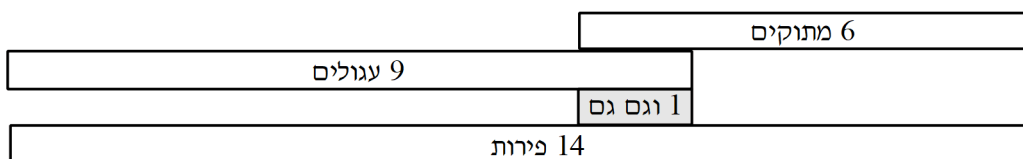
**פתרון**

אם 8 פירות אינם מתוקים, ניתן לקבוע ששאר הפירות, כלומר 6, הם כן מתוקים ( $14 - 8 = 6$ ). כמו כן, נתון ש-9 מהפירות הם עגולים.

נשים לב כי נתבקשנו למצוא חפיפה קטנה לכל הפחות, כלומר **חפיפה מינימלית**.

לפיכך, נחסר את השלם מסכום הקבוצות:  $9 + 6 - 14 = 1$ .

נציג את האמור לעיל על גבי סרטוט, כאשר אנו מנסים ליצור את החפיפה הקטנה ביותר (**לכל הפחות**).



התשובה הנכונה היא (1).

**שאלה נוספת - חפיפה מינימלית**

במגרש חונות 300 מכוניות. 60% מהן מקולקלות, אך לא ידוע מי תקינה ומי מקולקלת. עדי הקוסם נגע ב-173 מכוניות. ידוע כי מכונית מקולקלת שעדי נגע בה הופכת מיד לתקינה.

כמה מהמכוניות המקולקלות במגרש, לכל הפחות, הפכו לתקינות לאחר שעדי נגע בהן?

(1) 7

(2) 53

(3) 127

(4) 173

**פתרון**

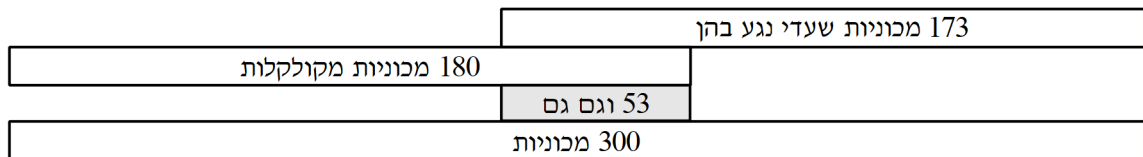
נמצא כמה מכוניות הן מקולקלות:  $180 = 300 \cdot \frac{60}{100}$ . כלומר, 180 מכוניות הן מקולקלות.

נתבקשנו למצוא את החפיפה הקטנה ביותר (לכל הפחות), כלומר את החפיפה המינימלית.

לפיכך, נחסר את השלם (300 המכוניות) מסכום הקבוצות (180 מכוניות מקולקלות ו-173 מכוניות שעדי נגע בהן):

$$173 + 180 - 300 = 53$$

נציג את האמור לעיל על גבי סרטוט:



התשובה הנכונה היא (2).

## חפיפה נתונה

לאחר שבשיעורים הקודמים דיברנו על חפיפה מינימלית וחפיפה מקסימלית, בשיעור הזה נדבר על שאלות שבהן החפיפה נתונה.

### לדוגמה:

בכיתה ישנם 25 תלמידים כאשר נתון לנו של-15 תלמידים יש חולצה כחולה ול-15 תלמידים יש כובע אדום. כמו כן, נתון כי ל-10 תלמידים יש גם חולצה כחולה וגם כובע אדום.

נזכיר שהחפיפה המקסימלית בין הקבוצות היא 15 תלמידים - כגודל הקבוצה הקטנה (במקרה הזה הן שוות). לעומת זאת, החפיפה המינימלית היא 5 תלמידים, שכן  $15 + 15 - 25 = 5$ . אולם, בשאלה זו החפיפה נתונה לנו והיא 10 תלמידים.

ניתן להסיק מכך ש-10 התלמידים הללו נספרו פעמיים, כלומר גם במסגרת מי שיש לו חולצה כחולה, וגם במסגרת מי שיש לו כובע אדום.

לפיכך, ניתן להסיק כי ישנם 5 תלמידים אשר להם חולצה כחולה בלבד, שכן:  $15 - 10 = 5$ .

כמו כן, ניתן להסיק שישנם 5 תלמידים אשר להם כובע אדום בלבד, שכן:  $15 - 10 = 5$ .

מכאן שישנם 5 תלמידים בעלי חולצה כחולה בלבד, 5 תלמידים בעלי כובע אדום בלבד ו-10 תלמידים להם חולצה כחולה וגם כובע אדום. אם כן, סך כל התלמידים שמנינו עד כה הוא:  $5 + 5 + 10 = 20$ .

נזכיר כי נתון בשאלה שישנם 25 תלמידים בכיתה, ועל כן ישנם 5 תלמידים שאין להם כובע אדום וגם לא חולצה כחולה.

לסיכום, כאשר החפיפה נתונה לנו, נפרק את הגורמים השונים לקבוצות, נזכור שהגורמים בחפיפה הנתונה נספרו פעמיים ונוודא שאנו מצליחים למנות את הכמות הכוללת הנתונה בשאלה.

### שאלה לדוגמה - חפיפה נתונה

בכיתה 40 תלמידים, מהם 20 שאוהבים שוקולד, ו-30 שאוהבים גלידה. נתון כי 15 תלמידים אוהבים גם שוקולד וגם גלידה.

כמה מהתלמידים בכיתה אינם אוהבים שוקולד ואינם אוהבים גלידה?

(1) 10

(2) 5

(3) 25

(4) 0

### פתרון

ננסה לפרק את הגורמים בשאלה לקבוצות על מנת למצוא את התלמידים שאינם אוהבים שוקולד ואינם אוהבים גלידה. אותם 15 תלמידים, החפיפה הנתונה, שאוהבים גם שוקולד וגם גלידה למעשה נספרו פעמיים, כלומר גם במסגרת מי שאוהב גלידה, וגם במסגרת מי שאוהב שוקולד.

לפיכך, ניתן להסיק כי ישנם 5 תלמידים שאוהבים שוקולד בלבד, שכן:  $20 - 15 = 5$ .

כמו כן, ניתן להסיק שישנם 15 תלמידים שאוהבים גלידה בלבד, שכן:  $30 - 15 = 15$ .

מכאן שישנם 5 תלמידים שאוהבים שוקולד בלבד, 15 תלמידים שאוהבים גלידה בלבד ו-15 תלמידים שאוהבים שוקולד וגם אוהבים גלידה.

אם כן, סך כל התלמידים שמנינו עד כה הוא:  $5 + 15 + 15 = 35$ .

נזכיר כי נתון בשאלה שישנם 40 תלמידים בכיתה, ועל כן ישנם 5 תלמידים שאינם אוהבים שוקולד ואינם אוהבים גלידה, שכן:  $40 - 35 = 5$ .

התשובה הנכונה היא (2).

**שאלה נוספת - חפיפה נתונה**

בהרצאה שבה נכחו 125 סטודנטים, שאל המרצה שאלה, וביקש ממי שיודע להשיב עליה, להצביע. לאחר שהורידו את ידיהם, שאל המרצה שאלה נוספת, ושוב ביקש ממי שיודע להשיב עליה, להצביע. 60 סטודנטים הצביעו בפעם הראשונה, ו-30 סטודנטים הצביעו בפעם השנייה. 45 סטודנטים לא הצביעו באף אחת מהפעמים.

כמה סטודנטים הצביעו בשתי הפעמים?

(1) 10

(2) 20

(3) 35

(4) 50

**פתרון**

נסה לפרק את הגורמים בשאלה לקבוצות על מנת למצוא את מספר הסטודנטים שהצביעו פעמיים. אם נכחו בהצבעה 125 סטודנטים ו-45 מהם לא הצביעו, ניתן לקבוע שמספר הסטודנטים שהצביעו לפחות פעם אחת הוא:  $125 - 45 = 80$ . כמו כן, אנו יודעים כי 60 סטודנטים הצביעו בפעם הראשונה, ו-30 סטודנטים בפעם השנייה, ומכאן ש-10 הצבעות של סטודנטים נספרו פעמיים ( $60 + 30 - 80 = 10$ ). בשלב זה מצאנו את התשובה הנכונה, אולם לשם שלמות ההסבר נמנה את כל הקבוצות. 10 סטודנטים הצביעו פעמיים, ולפיכך 50 סטודנטים הצביעו בפעם הראשונה בלבד ( $60 - 10 = 50$ ), וכן 20 סטודנטים הצביעו בפעם השנייה בלבד ( $30 - 10 = 20$ ). כמו כן, 45 סטודנטים לא הצביעו כלל. נסכום את כל הקבוצות ונקבל:  $10 + 50 + 20 + 45 = 125$ . מנינו את כל הסטודנטים בהרצאה. **התשובה הנכונה היא (1).**

**שאלה נוספת - חפיפה נתונה**

בבית מלון, האורחים מקבלים ארוחת בוקר בלבד, או ארוחת ערב בלבד, או גם ארוחת בוקר וגם ארוחת ערב.  $\frac{3}{4}$  מהאורחים קיבלו ארוחת בוקר, ו- $\frac{3}{10}$  קיבלו ארוחת ערב.

איזה חלק מהאורחים קיבלו גם ארוחת בוקר וגם ארוחת ערב?

(4)  $\frac{1}{20}$

(3)  $\frac{1}{10}$

(2)  $\frac{1}{5}$

(1)  $\frac{1}{4}$

**פתרון**

אנו יודעים כי אין אורחים שלא קיבלו ארוחת בוקר ולא ארוחת ערב משום שזו אינה אפשרות בבית המלון, וכן שמתקיימת חפיפה כלשהי משום שאין תשובה שערכה 0.

אם נחבר את הקבוצות ( $\frac{3}{4} + \frac{3}{10}$ ) ונחסר מסכומן את השלם (1), נקבל את החלק שנספר פעמיים, כלומר את החפיפה -

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{10} - 1 = \frac{15}{20} + \frac{6}{20} - \frac{20}{20} = \frac{1}{20}$$

האורחים שקיבלו גם ארוחת בוקר וגם ארוחת ערב:  $\frac{1}{20}$ .

**התשובה הנכונה היא (4).**



## סיכום

### 1. חפיפה מקסימלית

חפיפה מקסימלית בין קבוצות שווה לגודלה של הקבוצה הקטנה מבין הקבוצות המבוקשות. נמצא חפיפה זו כאשר יופיע בשאלה הצירוף "לכל היותר".

### 2. חפיפה מינימלית

- את החפיפה המינימלית נמצא על ידי חיסור השלם מסכום הקבוצות.
- כאשר נחסר את השלם מסכום הקבוצות, ונקבל תוצאה שלילית או שערכה 0, נסיק כי לא קיימת חפיפה בין הקבוצות.
- נמצא חפיפה זו כאשר יופיע בשאלה הצירוף "לכל הפחות".

### 3. חפיפה נתונה

- כאשר החפיפה נתונה לנו בשאלה, נפרק את הגורמים השונים לקבוצות, נזכור שהגורמים בחפיפה הנתונה נספרו פעמיים ונוודא שאנו מצליחים למנות את הכמות הכוללת הנתונה בשאלה.
- כאשר הקבוצות מיוצגות על ידי שברים, השלם הוא 1.
- כאשר הקבוצות מיוצגות על ידי אחוזים, השלם הוא 100%.

**סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!**