גיאומטריה

מרובעים

מרובעים

לפני שניכנס בעובי הקורה, נזכיר כי השיעור הזה הוא שיעור מרובעים מתקדם.
אם אינכם שולטים בבסיס של מרובעים, אנו ממליצים לעשות חזרה על נושא זה ביסודות - שם נמצאות ה**הגדרות** של כל המרובעים שאותן מוטב לזכור בעל-פה. זאת ועוד, מומלץ לזכור בעל-פה גם את ה**תכונות** של כל המרובעים.

תכונות מרובעים

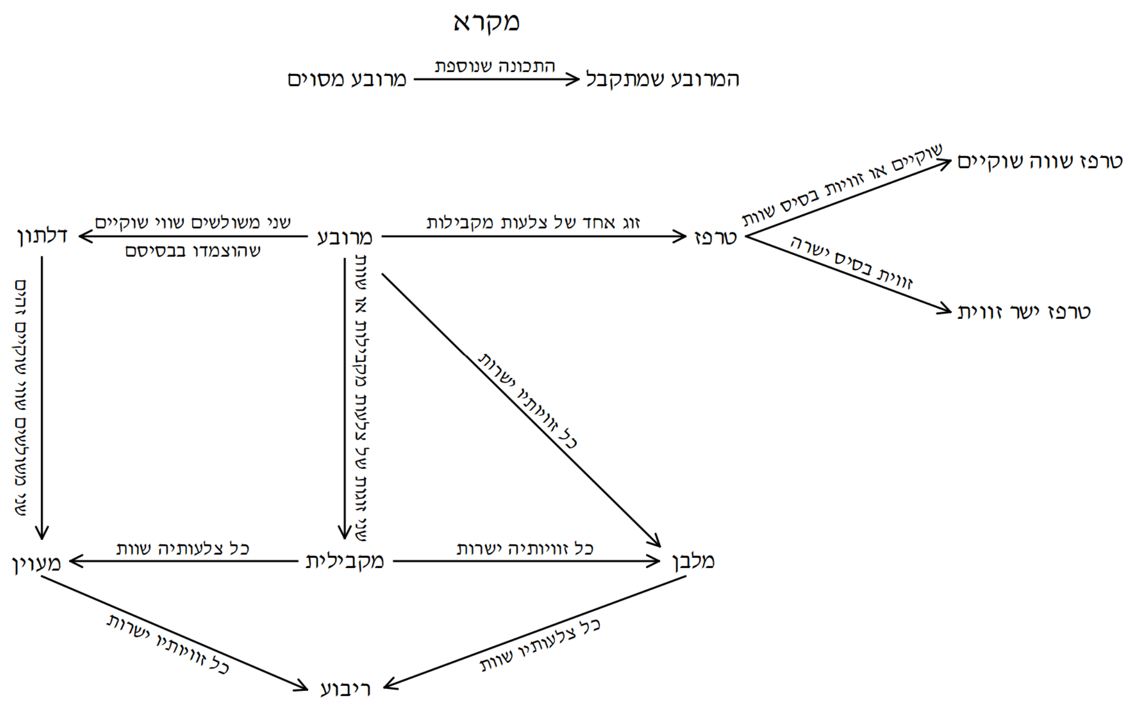
ניתן להגדיר מרובעים מסוימים כמרובע אחר בתוספת של תכונות (למשל: ריבוע הוא מלבן שכל צלעותיו שוות), ובחלק הזה של השיעור נעסוק בכך.

ראשית, חשוב להזכיר כי **מרובע** הוא למעשה שני משולשים בעלי בסיס זהה שהוצמדו בבסיסם או מצולע בעל 4 צלעות.
מרובע שמורכב משני משולשים שווי שוקיים שהוצמדו בבסיסם (צריך להיות זהה) הוא **דלתון** ומכאן שכל דלתון הוא גם מרובע.
דלתון שמורכב משני משולשים שווי שוקיים זהים שהוצמדו בבסיסם הוא **מעוין** ומכאן שכל מעוין הוא גם דלתון.
מעוין שזוויותיו ישרות הוא **ריבוע** ומכאן שכל ריבוע הוא גם מעוין.

מרובע בעל זוג **אחד בלבד** של צלעות מקבילות הוא **טרפז** ומכאן שכל טרפז הוא גם מרובע.
טרפז שהשוקיים (הצלעות שאינן מקבילות) או זוויות בסיס שלו שוות הוא **טרפז שווה שוקיים**.
טרפז בעל זווית בסיס ישרה הוא **טרפז ישר זווית**.

מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא **מלבן** ומכאן שכל מלבן הוא גם מרובע.
מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות הוא **מקבילית** ומכאן שכל מקבילית היא גם מרובע.
מקבילית שזוויותיה ישרות היא **מלבן** ומכאן שכל מלבן הוא גם מקבילית.
מקבילית שכל צלעותיה שוות היא **מעוין** ומכאן שכל מעוין הוא גם מקבילית.
מלבן שכל צלעותיו שוות הוא **ריבוע** ומכאן שכל ריבוע הוא גם מלבן.
לאור האמור לעיל, ריבוע הוא סוג של מלבן, סוג של מקבילית, סוג של מעוין וכך הלאה.

תרשים שמסכם את האמור לעיל:



שאלה לדוגמה - תכונות מרובעים

נתון מרובע שכל ארבע צלעותיו זהות.

מרובע זה בהכרח **אינו** -

(1) ריבוע
(2) מלבן
(3) מעוין שאינו ריבוע
(4) דלתון שאינו מעוין

<u>פתרון</u>

נעבור על כל אחת מהתשובות, ונבדוק אם למרובע בה לא יכולות להיות ארבע צלעות זהות:

תשובה (1): ריבוע, לפי הגדרה, הוא מרובע שכל ארבע צלעותיו זהות. התשובה נפסלת.

תשובה (2): מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות. אומנם אין הכרח שהאורך והרוחב במלבן יהיו שווים, אולם זה בהחלט ייתכן. כפי שקבענו בשיעור, ריבוע הוא מלבן שכל צלעותיו שוות. לפיכך, מרובע שכל ארבע צלעותיו זהות יכול להיות מלבן. התשובה נפסלת.

תשובה (3): מעוין אף הוא, לפי הגדרה, מרובע שכל ארבע צלעותיו זהות. התשובה נפסלת.

שימו לב כי בשלב הזה ניתן לסמן את תשובה (4), אולם נבדוק אותה לטובת שלמות ההסבר.

תשובה (4): דלתון הוא מרובע שמורכב משני משולשים שווי שוקיים שהוצמדו בבסיסם (כאמור, עליו להיות זהה).

אם המשולשים הללו זהים, מדובר במעוין. ואולם, נתון כי הדלתון אינו מעוין, ולכן המשולשים הללו אינם זהים.

אם כן, לא ייתכן שכל ארבע הצלעות שלו זהות. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - תכונות מרובעים

נתון מרובע מסוים שהוא גם מקבילית וגם דלתון.

יוסי: "במרובע זה כל הזוויות בהכרח שוות זו לזו".

דני: "במרובע זה כל הצלעות בהכרח שוות זו לזו".

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) יוסי צודק ודני טועה
(2) יוסי טועה ודני צודק
(3) שניהם טועים
(4) שניהם צודקים

<u>פתרון</u>

תחילה, נבדוק באיזה מרובע מדובר:

בדלתון, שני זוגות של צלעות סמוכות ושוות. במקבילית, הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.

אם כן, כל הצלעות במרובע הנתון שוות זו לזו, ולכן המרובע הנתון בשאלה הוא **מעוין**.

כעת, נבדוק את טענתם של יוסי ושל דני.

יוסי טועה שהרי במעוין הזוויות לא בהכרח שוות זו לזו.

דני צודק שהרי במעוין כל הצלעות שוות זו לזו בהגדרה.

כאמור, יוסי טועה ודני צודק.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - תכונות מרובעים

מחיבור של **כל** שני משולשים זהים ניתן בהכרח לבנות -

(1) ריבוע
(2) מעוין
(3) מלבן
(4) דלתון

<u>פתרון</u>

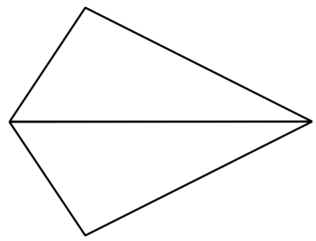
כפי שקבענו בשיעור, כל מרובע הוא למעשה שני משולשים שהוצמדו זה לזה.

ואולם, מרובעים מסוימים ניתן ליצור על ידי חיבור של משולשים מסוימים בלבד.

תשובה (1): כדי ליצור ריבוע יש להצמיד שני משולשים שווי שוקיים וישרי זווית, כלומר חיבור של **כל** שני משולשים לא בהכרח יצור ריבוע.

תשובה (2): כדי ליצור מעוין אכן יש להצמיד משולשים זהים, אך עליהם להיות שווי שוקיים שמוצמדים בבסיס.

כלומר, לא מספיק שהם יהיו זהים. לדוגמה:



תשובה (3): כדי ליצור מלבן יש להצמיד משולשים זהים, אך עליהם להיות ישרי זווית. כלומר, לא מספיק שהם יהיו זהים.

הציור הנ"ל תקף גם לתשובה הזו.

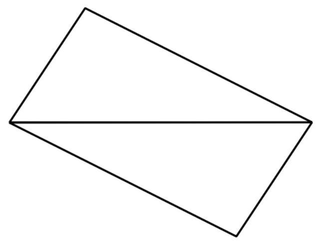
בשלב הזה ניתן לסמן את תשובה (4), אולם נבדוק אותה לטובת שלמות ההסבר.

תשובה (4): ניתן לחבר **כל** שני משולשים, בדרך כזו או אחרת, כך שתתקבל צורה אשר מורכבת משני משולשים שווי שוקיים.

נוסף על כך, אם נהפוך את כיוון אחד המשולשים, נקבל מקבילית.

כלומר, מחיבור של כל שני משולשים ניתן בהכרח ליצור מקבילית או דלתון.

לדוגמה:



התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - תכונות מרובעים

נתון מעוין הבנוי משתי מקביליות חופפות שהוצמדו זו לזו.

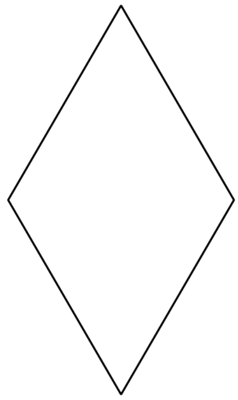
אחת מצלעות המקבילית _____ צלע המעוין, והצלע השנייה _____ צלע המעוין.

(1) שווה ל- ; גדולה מ-
(2) שווה ל- ; שווה למחצית מ-
(3) קטנה מ- ; גדולה מ-
(4) קטנה מ- ; שווה למחצית מ-

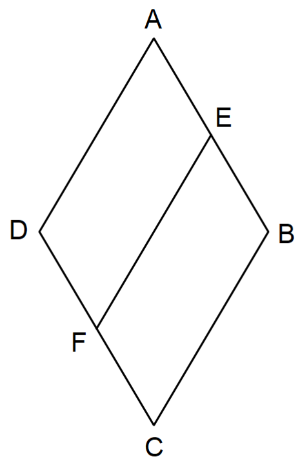
<u>פתרון</u>

בשאלות גאומטריות רבות שבהן לא נתון סרטוט, יצירת אחד בעצמנו עשויה לסייע רבות.

תחילה, נצייר מעוין אקראי:



נחלק אותו לשתי מקביליות חופפות (ADFE ו-EFCB):



כעת, נעבור לבדיקת התשובות:

תשובה (1): אחת מצלעות המקבילית אכן שווה לצלע המעוין ($AD = EF = BC$), אך השנייה **לא** גדולה מצלע המעוין.

התשובה נפסלת.

תשובה (2): כאמור, אחת מצלעות המקבילית שווה לצלע המעוין (למשל: $AD = EF$).

נתון שהמקביליות חופפות זו לזו, ולכן $AE = EB = DF = FC$.

נוסף על כך, מתקיים: $AB = AE + EB$ ומכאן ש- $AB = 2AE$.

לפיכך, הצלע השנייה של המקבילית שווה למחצית מצלע המעוין.

מצאנו את התשובה הנכונה, ולכן אין צורך לבדוק את האחרות.

התשובה הנכונה היא (2).

בניית משוואות

בסוג השאלות הזה נידרש לבנות משוואה או אי-שוויון באמצעות התכונות והנוסחאות שאנו מכירים אשר קשורות למרובעים. כשיהיה עלינו לעשות כן, ניעזר בנעלמים.

לדוגמה:

נתון מלבן שהיקפו 10 ס"מ. אורכו של המלבן גדול פי 1.5 מרוחבו.

מה שטחו (בסמ"ר)?

היקפו של מלבן שווה לפעמיים סכום האורך והרוחב של המלבן.
רוחב המלבן אינו נתון לנו, ולכן נסמנו ב-x. נתון כי אורך המלבן גדול פי 1.5 מרוחבו, ולכן אורכו הוא $1.5x$.
אם כן, היקף המלבן הוא: $2(1.5x+x)=2\cdot(2.5x)=5x$.
נתון לנו כי ההיקף שווה ל-10 ס"מ ולכן: $5x=10$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-5 ונקבל: $x=2$.
לאור האמור לעיל, רוחב המלבן הוא 2 ס"מ, אורך המלבן הוא 3 ס"מ ($1.5x=1.5\cdot 2$) ושטח המלבן (אורך כפול רוחב) הוא 6 סמ"ר ($2\cdot 3$).

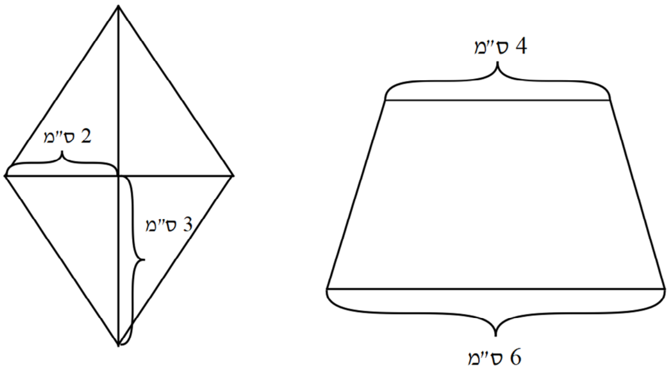
דוגמה נוספת:

נתונים מלבן וריבוע ששטחיהם שווים. היקף הריבוע הוא 16 ס"מ ואורך המלבן הוא 8 ס"מ.

מה רוחב המלבן (בס"מ)?

מאחר שכל צלעותיו של ריבוע שוות, ניתן למצוא את אורך כל אחת מהצלעות מההיקף הנתון על ידי חילוק ב-4: $\frac{16}{4}=4$.
שטחו של ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ הוא (בסמ"ר): $4\cdot 4=16$ (אורך כפול רוחב). נתון כי שטח הריבוע שווה לשטח המלבן.
אורך המלבן נתון לנו (8 ס"מ) ורוחבו לא. לפיכך, נסמן את הרוחב ב-x. שטח המלבן, אם כן, הוא: $8x$ סמ"ר.
כאמור, שטח זה שווה ל-16 סמ"ר ולכן מתקיים: $8x=16$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-8 ונקבל: $x=2$.
לאור האמור לעיל, רוחב המלבן הוא 2 ס"מ.

שאלה לדוגמה - בניית משוואה



בסרטוט שלפניכם טרפז ומעוין בעלי שטח שווה.

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה גובה הטרפז (בס"מ)?

(1) 1.2
(2) 2
(3) 2.4
(4) 4

<u>פתרון</u>

האלכסונים במעוין חוצים זה את זה, ולכן אורך האלכסון האופקי הוא 4 ס"מ ($2+2$) ואורך האלכסון האנכי הוא 6 ס"מ ($3+3$). ניתן לחשב שטח של מעוין על ידי הכפלת האלכסונים וחלוקת התוצאה ב-2: $\frac{4\cdot 6}{2}=\frac{24}{2}=12$.

שטח של טרפז שווה לסכום הבסיסים ($4+6=10$) כפול הגובה (אותו נסמן ב-h) חלקי 2: $\frac{10h}{2}$.

נתון כי שטח המעוין שווה לשטח הטרפז ולכן: $12=\frac{10h}{2}$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $10h=24$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-10 ונקבל: $h=\frac{24}{10}=2.4$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - בניית משוואה

נתון ריבוע אשר היקפו בס"מ גדול משטחו בסמ"ר.
אורך צלע הריבוע x ס"מ (x הוא מספר שלם).

$x=?$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

<u>פתרון</u>

היקפו של ריבוע שאורך צלעו x הוא (בס"מ): $4\cdot x=4x$. שטחו של ריבוע שאורך צלעו x הוא (בסמ"ר): $x\cdot x=x^2$.

נתון שההיקף גדול מהשטח, כלומר: $x^2<4x$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-x (חיובי בוודאות) ונקבל: $x<4$.

בצירוף הנתון לפיו x מספר שלם ניתן לקבוע כי x יכול להיות 1, 2 או 3.

<u>דרך פתרון נוספת - בדיקת תשובות:</u>

תשובה (1): היקפו של ריבוע שאורך צלעו 1 ס"מ הוא 4 ס"מ ($1\cdot 4$) ושטחו הוא 1 סמ"ר ($1\cdot 1$). לכאורה, בבדיקת תשובות ניתן לסמן תשובה לאחר שמצאנו כי היא מקיימת את הנתונים. ואולם, במקרה הזה עלינו לבדוק אם ישנה תשובה נוספת אשר מקיימת את הנתונים מכיוון שלפי תשובה (4) - ייתכן כי אין תשובה אחת מתאימה בלבד.

תשובה (2): היקפו של ריבוע שאורך צלעו 2 ס"מ הוא 8 ס"מ ($2\cdot 4$) ושטחו הוא 4 סמ"ר ($2\cdot 2$).

לא ייתכן כי שתי תשובות נכונות, ולכן ניתן לסמן את תשובה (4) כבר בשלב הזה.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - בניית משוואה

נתון מלבן **שאינו** ריבוע.
היקפו בס"מ שווה לשטחו בסמ"ר.
אורך המלבן הוא a ס"מ ורוחבו הוא b ס"מ.
נתון: $2<a$ וגם $2<b$.

$a=?$

(1) $\frac{b-2}{2b}$
(2) $\frac{2b}{b-2}$
(3) 3
(4) 4

<u>פתרון</u>

היקפו של מלבן שווה לפעמיים האורך שלו ועוד פעמיים הרוחב שלו: $2a+2b$.
כמו כן, שטחו שווה למכפלת האורך ברוחב: $a\cdot b$.
נתון כי היקפו של המלבן בס"מ שווה לשטחו בסמ"ר ולכן: $2a+2b=ab$.
נחסר 2a משני אגפי המשוואה כדי לבודד את הביטויים שמכילים a ונקבל: $2b=ab-2a$.
נוציא גורם משותף a ונקבל: $2b=a(b-2)$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-$(b-2)$ ונקבל: $a=\frac{2b}{b-2}$.

התשובה הנכונה היא (2).

משולשים במרובעים

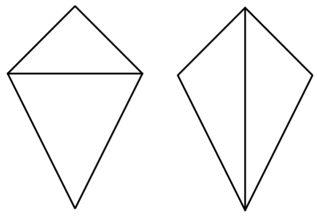
בחלק הקרוב של השיעור נראה באיזה אופן נושא המשולשים בא לידי ביטוי בנושא המרובעים.

תזכורת קצרה לאופן שבו משולשים באים לידי ביטוי בדלתון, מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע:

<u>דלתון</u>

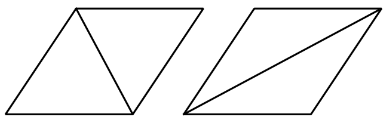
כל אחד מהאלכסונים בדלתון - אנכי או אופקי - מחלק את הדלתון לשני משולשים.

האלכסון האנכי מחלק את הדלתון לשני משולשים זהים (הסרטוט הימני), והאלכסון האופקי מחלק את הדלתון לשני משולשים שווי שוקיים (הסרטוט השמאלי).



<u>מקבילית</u>

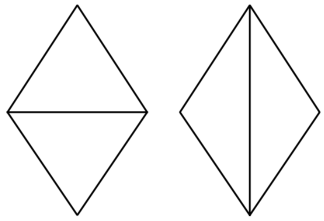
כל אחד מהאלכסונים במקבילית מחלק אותה לשני משולשים זהים.



<u>מעוין</u>

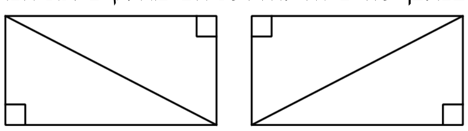
אם הדברים שהוזכרו לעיל תקפים במקבילית ובדלתון, הם תקפים במעוין לא כל שכן, שהרי מעוין הוא סוג של מקבילית וסוג של דלתון.

במעוין, האלכסון האנכי מחלק אותו לשני משולשים שווי שוקיים זהים, וכך גם באשר לאלכסון האופקי.



<u>מלבן</u>

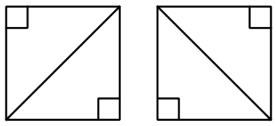
המלבן הוא מקבילית שזוויותיה ישרות, ולכן גם אלכסוניו מחלקים אותו לשני משולשים זהים. בניגוד למקבילית, האלכסונים במלבן שווים זה לזה ושניהם מחלקים את המלבן באותה צורה - שניהם יוצרים משולשים ישרי זווית זהים.



<u>ריבוע</u>

הריבוע הוא שכלול של כל הצורות הנ"ל, ולכן כל הדברים שנאמרו תקפים לגביו גם כן.

אלכסוניו מחלקים אותו לשני משולשים שווי שוקיים וישרי זווית זהים.

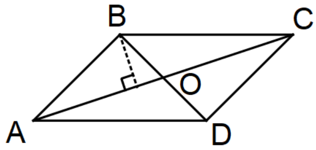


<u>שטחי משולשים במרובע</u>

כפי שראינו קודם לכן, כאשר אנו מעבירים שני אלכסונים במרובע מתקבלים 4 משולשים.

<u>לדוגמה:</u>

נתון: ABCD מקבילית.



האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה, ולכן $AO = OC$ ו- $BO = OD$.

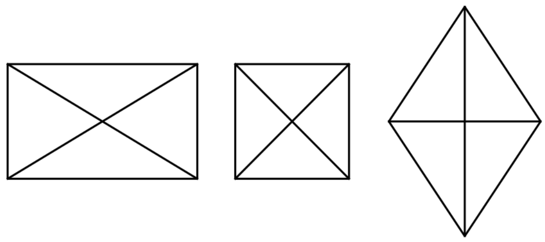
נוסף על כך, למשולשים BOC ו-AOB גובה משותף (הקו המקווקו).

לפיכך, שטח המשולש ABO שווה לשטח המשולש BOC.

זוג המשולשים BOA ו-DOC חופפים (צלע, זווית, צלע) וכך גם לגבי זוג המשולשים BOC ו-DOA.

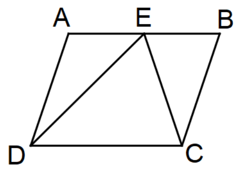
לאור האמור לעיל, במקבילית - אף שהדבר אינו נדמה - שטח ארבעת המשולשים זהה.

אם האמור לעיל תקף במקבילית, הוא לבטח תקף גם במעוין, במלבן ובריבוע (שטחם של ארבעת המשולשים בכל אחד מהמרובעים שווה זה לזה):



<u>דוגמה נוספת:</u>

נתונה מקבילית ABCD. הנקודה E נמצאת על הצלע AB.

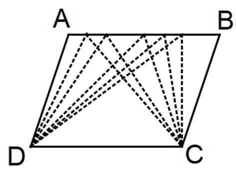


כדי למצוא את שטח המקבילית ABCD ניתן לכפול את הצלע DC בגובה לאותה צלע.

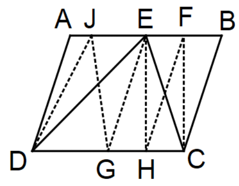
כדי למצוא את שטח המשולש EDC, ניתן לכפול את הצלע DC בגובה לאותה צלע ולחלק את התוצאה ב-2.

לפיכך, שטח המשולש EDC שווה למחצית משטח המקבילית ABCD.

שימו לב! כל עוד הנקודה E נמצאת על הצלע AB (לא משנה היכן), האמור לעיל תקף, שהרי כך או כך חישוב שטח המשולש EDC יהיה כפל של DC בגובה (הנקודה לא משפיעה על אורכו) וחלוקת התוצאה ב-2 (כל המשולשים המקווקווים בסרטוט שווים בשטחם):



<u>דוגמה נוספת:</u>



שטח המשולש DJG: $\frac{DG \cdot h}{2}$. שטח המשולש GEH: $\frac{GH \cdot h}{2}$. שטח המשולש HFC: $\frac{HC \cdot h}{2}$.

שטח המשולש DEC: $\frac{DC \cdot h}{2}$.

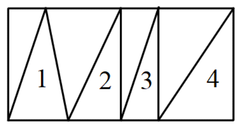
סכום שטחי המשולשים המקווקווים (נחבר בין מוני השברים, ונוציא גורם משותף h):

$$\frac{DG \cdot h}{2}+\frac{GH \cdot h}{2}+\frac{HC \cdot h}{2}=\frac{DG \cdot h+GH \cdot h+HC \cdot h}{2}=\frac{h(DG+GH+HC)}{2}=\frac{h \cdot DC}{2}.$$

לאור האמור לעיל, סכום השטחים של המשולשים המקווקווים שווה לשטח המשולש DEC.

שימו לב כי מספר המשולשים אינו משנה - אם חיבור הבסיסים שלהם שווה לבסיס המקבילית, אזי סכום השטחים שלהם שווה למחצית משטח המקבילית.

מכיוון שמלבן הוא סוג של מקבילית, האמור לעיל תקף גם לגביו:



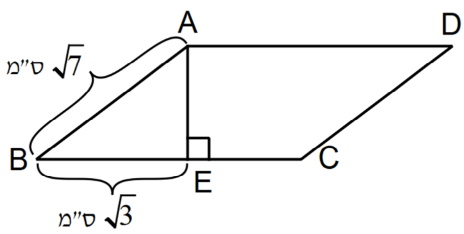
סכום שטחי המשולשים 1, 2, 3 ו-4 שווה למחצית משטח המלבן.

שאלה לדוגמה - משולשים במרובעים

בסרטוט שלפניכם מקבילית ABCD.

נתון: $AE = EC$

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המקבילית ABCD (בסמ"ר)?



(1) 10
(2) 12
(3) $2+2\sqrt{3}$
(4) $4+2\sqrt{3}$

<u>פתרון</u>

כדי לחשב שטח של מקבילית יש לכפול את אחד מבסיסיה בגובה לאותו בסיס. לפי הסרטוט, המשולש AEB ישר זווית, ולכן מתקיים בו משפט פיתגורס: $BE^2+AE^2=AB^2 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2+AE^2=\left(\sqrt{7}\right)^2 \Rightarrow 3+AE^2=7$. נעביר אגפים: $AE^2=4$.

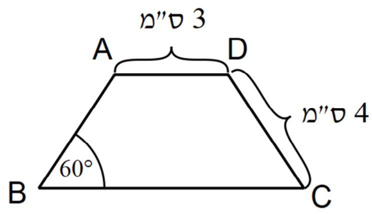
נוציא שורש לשני אגפי המשוואה ונקבל: $AE=2$. נתון כי $AE=EC$ ולכן: $EC=2$. לפיכך: $BC=\sqrt{3}+2$.

כעת, נכפול את בסיס המקבילית (BC) בגובה לאותו בסיס (AE): $2\left(\sqrt{3}+2\right)=2\sqrt{3}+4$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - משולשים במרובעים

בסרטוט שלפניכם טרפז שווה שוקיים ABCD.

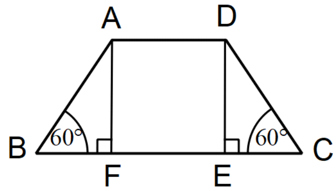


לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הטרפז ABCD (בסמ"ר)?

(1) $20\sqrt{2}$
(2) $10\sqrt{2}$
(3) $6\sqrt{3}$
(4) $10\sqrt{3}$

<u>פתרון</u>

נוריד גבהים מהנקודות D ו-A לנקודות E ו-F בהתאמה. נתון כי הטרפז ABCD שווה שוקיים, ולכן זוויות הבסיס שלו שוות ($\sphericalangle ABC=\sphericalangle DCB=60°$):



המשולשים ABF ו-DCE הם משולשים 30; 60; 90 (בשניהם ישנן שתי זוויות בנות $60°$ ו- $90°$, ולכן השלישית בת $30°$).

נוסף על כך, ניתן לקבוע שהמשולשים הללו חופפים לפי משפט **זווית**, **צלע**, **זווית** ($60°$, $AB=DC$, $30°$).

כדי לבצע מעבר מהיתר לניצב הקטן במשולש 30; 60; 90, עלינו לחלק אותו ב-2: $EC=\frac{4}{2}=2$.

באותו אופן, ניתן לקבוע כי $BF=2$. כדי לבצע מעבר מהניצב הקטן לניצב הגדול במשולש 30; 60; 90 יש לכפול אותו ב- $\sqrt{3}$: $DE=2\cdot\sqrt{3}$. כל זוויותיו של המרובע ADFE ישרות, ולכן מדובר במלבן. מכיוון שמדובר במלבן ניתן לקבוע כי $AD=FE=3$. כעת, אנו יודעים את אורך הבסיסים של הטרפז ואת גובהו, ולכן אנו יכולים לחשב את שטחו:

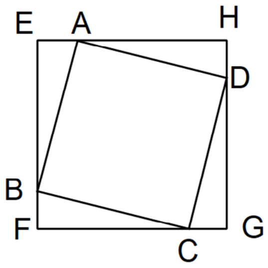
$$\frac{(BC+AD)\cdot h}{2}=\frac{(BF+FE+EC+AD)\cdot h}{2}=\frac{(2+3+2+3)\cdot\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}=(10)\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}.$$

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - משולשים במרובעים

קדקודיו של הריבוע ABCD נמצאים על צלעות הריבוע EFGH, כמתואר בסרטוט.
קדקודי הריבוע ABCD מחלקים את כל צלעות הריבוע EFGH ביחס: $x : y$.

$$\frac{\text{היקף הריבוע ABCD}}{\text{היקף הריבוע EFGH}} = ?$$



(1) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$

(2) $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$

(3) $\frac{x}{y}$

(4) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$

__**פתרון**__

היחס בין היקפי הריבועים שווה ליחס בין צלעותיהם, שהרי בשני המקרים מדובר על כפל של אחת הצלעות ב-4.
משום שהריבוע ABCD מחלק את הריבוע EFGH ביחס של $x : y$, נסמן את אורכו של אחד הקטעים ב-x ואת אורך השני ב-y (לא משנה איזה חלק שווה ל-x ואיזה חלק שווה ל-y). אם כן, אורך צלע הריבוע EFGH הוא: $x+y$.
היות שכל המשולשים הקטנים שנוצרו ישרי זווית, ניתן להשתמש במשפט פיתגורס על מנת למצוא את היתר שלהם (כל אחת מצלעות הריבוע ABCD): $AB^2 = AD^2 = BC^2 = DC^2 = x^2 + y^2$.
לאחר הוצאת שורש לשני אגפי המשוואה ניתן להסיק כי כל אחת מצלעות הריבוע ABCD שווה ל- $\sqrt{x^2+y^2}$.
לאור האמור לעיל: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} = \frac{\text{היקף הריבוע ABCD}}{\text{היקף הריבוע EFGH}}$.
שימו לב! ניתן היה להציב מספרים במקום x ו-y, למצוא את היחס המבוקש לפי אותה הצבה, להציב את המספרים בתשובות ולפסול 3 מהן.
התשובה הנכונה היא (1).

דמיון מרובעים

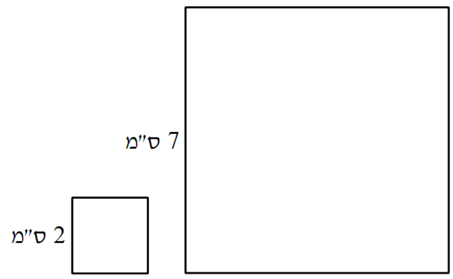
בחלק הקרוב של השיעור נעסוק בדמיון בין מרובעים.

כפי שקבענו בשיעור משולשים, כל הצורות המשוכללות מאותה משפחה דומות זו לזו (כל המשולשים שווי הצלעות דומים זה לזה, כל הריבועים דומים זה לזה וכך הלאה).

שימו לב! מיחס קווי בין צורות דומות (חשוב להזכיר כי יחס קווי יכול להיות יחס בין צלעות, יחס בין אלכסונים ויחס בין היקפים) ניתן להסיק לגבי יחס השטחים - כמו במשולשים, **יחס השטחים בין מרובעים דומים שווה ליחס הקווי בריבוע**.

<u>לדוגמה:</u>

נתונים שני ריבועים. אורך צלעו של האחד 7 ס"מ ואורך צלעו של השני 2 ס"מ.



היחס בין צלעות הריבועים, כלומר היחס הקווי, הוא $2:7$ ומכאן שהיחס בין שטחי הריבועים הוא: $(2:7)^2 \Rightarrow (4:49)$.

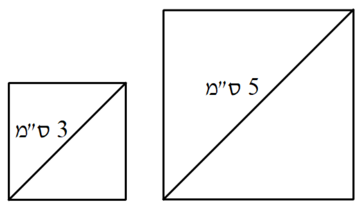
כדי להראות שהיחסים אכן מתקיימים, נחשב את שטחם של הריבועים (נכפול בין 2 צלעות).

שטח הריבוע הקטן (בסמ"ר): $2 \cdot 2 = 4$.

שטח הריבוע הגדול (בסמ"ר): $7 \cdot 7 = 49$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

נתונים שני ריבועים. אורך האלכסון של האחד 5 ס"מ ואורך האלכסון של השני 3 ס"מ.



היחס בין אלכסוני הריבועים, כלומר היחס הקווי, הוא $3:5$ ומכאן שהיחס בין שטחי הריבועים הוא: $(3:5)^2 \Rightarrow (9:25)$.

כדי להראות שהיחסים אכן מתקיימים, נחשב את שטחם של הריבועים (נכפול בין האלכסונים ונחלק את התוצאה ב-2).

שטח הריבוע הקטן (בסמ"ר): $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$.

שטח הריבוע הגדול (בסמ"ר): $\frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$.

אם כן, היחס בין השטחים: $4.5 : 12.5 \Rightarrow 9:25$.

דמיון במלבנים:

עד כה דיברנו על דמיון בין ריבועים.

הסיבה לכך שכל הריבועים דומים זה לזה היא שבין הצלעות בריבוע ישנו יחס של $1:1$ תמיד ושכל זוויות הריבוע ישרות.

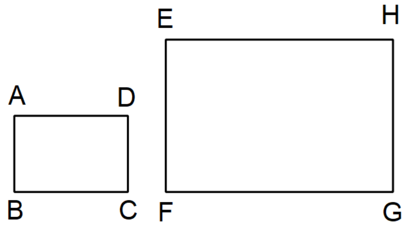
בדומה לריבוע, כל זוויותיו של מלבן ישרות.

ואולם, בשונה מריבוע, היחס בין האורך והרוחב במלבן אינו קבוע, ולכן לא כל המלבנים דומים זה לזה.

אם כן, כדי לקבוע שמתקיים דמיון בין 2 מלבנים, עלינו לדעת כי מתקיים יחס זהה בין האורך לרוחב בשני המלבנים.

לדוגמה:

נתונים שני מלבנים: EFGH ו-ABCD.



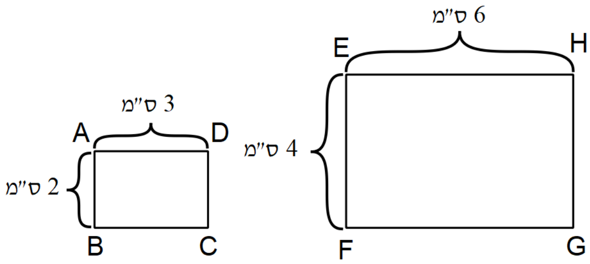
כדי לדעת שהמלבנים ABCD ו-EFGH דומים, עלינו לדעת, כאמור, כי ישנו יחס זהה בין הרוחב לאורך בשני המלבנים:

$\frac{AD}{AB}=\frac{EH}{EF}$ או $\frac{AB}{AD}=\frac{EF}{EH}$.

דרך נוספת לקבוע כי מתקיים דמיון בין מלבנים: היחס בין הרוחב במלבן אחד לרוחב במלבן השני שווה ליחס בין האורך במלבן אחד לאורך במלבן השני: $\frac{EF}{AB}=\frac{EH}{AD}$ או $\frac{AB}{EF}=\frac{AD}{EH}$.

דוגמה נוספת:

נתונים שני מלבנים: EFGH ו-ABCD.



הרוחב במלבן EFGH (EH) גדול פי 1.5 מהאורך בו (EF): $\frac{6}{4}=1.5$. כך גם במלבן ABCD ($\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}=1.5$).

לפיכך, המלבנים דומים.

באותו אופן, ניתן היה לקבוע כי בין המלבנים ישנו דמיון כך:

רוחב המלבן EFGH גדול פי 2 מרוחב המלבן ABCD ($\frac{6}{3}$).

כמו כן, אורך המלבן EFGH גדול אף הוא פי 2 מאורך המלבן ABCD ($\frac{4}{2}$).

שימו לב כי היחס בין צלעות המלבנים, כלומר היחס הקווי ביניהם, הוא $1:2$, ולכן יחס השטחים ביניהם הוא: $(1:2)^2 \Rightarrow 1:4$.

<u>דמיון במעוינים:</u>

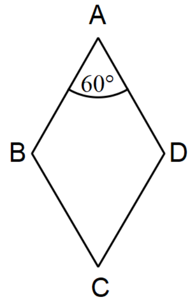
בדומה לריבוע, צלעות המעוין שוות זו לזו ומתקיימים ביניהן יחס של $1:1$ תמיד.

ואולם, לא כל המעוינים דומים זה לזה משום שזוויותיהם לא תמיד שוות.

לפיכך, אם אנו מזהים שלשני מעוינים אותן הזוויות, ניתן לקבוע כי מתקיים ביניהם דמיון.

שימו לב! די לנו בזווית אחת של מעוין כדי לקבוע את גודלן של כל הזוויות האחרות, משום שכל זוג זוויות סמוכות במעוין משלימות ל- 180° (זוויות סמוכות בין ישרים מקבילים משלימות ל- 180°) ומשום שזוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו.

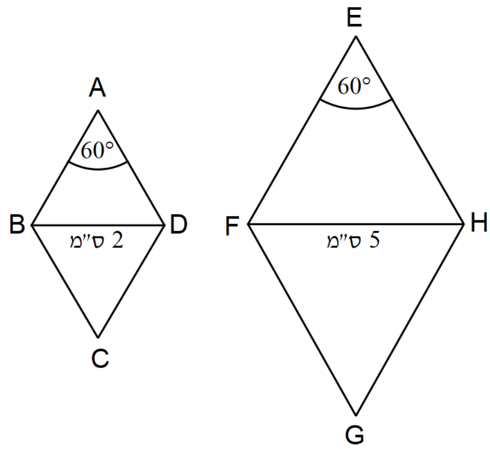
<u>לדוגמה:</u>



הזוויות $\sphericalangle ABC$ ו- $\sphericalangle ADC$ סמוכות לזווית $\sphericalangle BAD$ (60°), ולכן שוות ל- 120° ($180^\circ - 60^\circ$).

הזווית $\sphericalangle BCD$ סמוכה לכל אחת מהזוויות $\sphericalangle ABC$ ו- $\sphericalangle ADC$, ולכן שווה ל- 60°.

<u>דוגמה נוספת:</u>



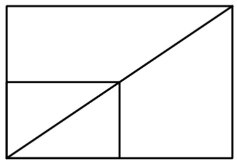
המעוינים ABCD ו-EFGH דומים משום שלהם זוויות זהות (**זכרו!** מספיקה זווית אחד כדי לקבוע זאת), והיחס בין האלכסון שחוצה את אותה זווית במעוין, כלומר היחס הקווי, הוא: $2:5$. לפיכך, היחס בין שטחיהם הוא: $(2:5)^2 \Rightarrow 4:25$.

<u>אלכסונים במלבן, במעוין ובמקבילית:</u>

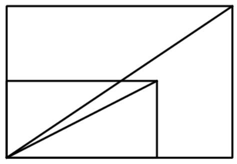
כאשר בתוך אחת מהצורות מלבן, מעוין או מקבילית נמצאת אותה צורה, והאלכסונים בהן מתלכדים (נהיים לקטע אחד), ניתן לקבוע כי מתקיים בין הצורות דמיון (האמור לעיל תקף, כמובן, גם בריבוע שכן כל הריבועים דומים זה לזה).

<u>לדוגמה:</u>

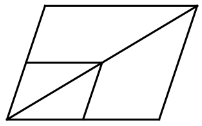
מלבנים דומים:



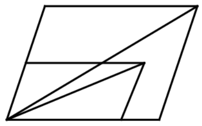
מלבנים **לא** דומים:



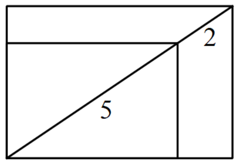
מקביליות דומות:



מקביליות **לא** דומות:



<u>דוגמה נוספת:</u>



היחס בין האלכסון במלבן הקטן (5) לאלכסון במלבן הגדול ($7=5+2$), כלומר היחס הקווי בין המלבנים, הוא: $5:7$,

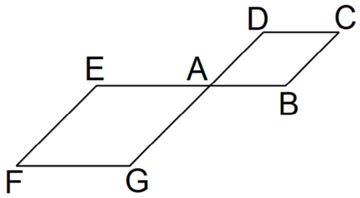
ולכן יחס השטחים בין המלבנים הוא: $(5:7)^2 \Rightarrow 25:49$.

שאלה לדוגמה - דמיון במרובעים

ABCD ו-AEFG מעוינים.

שטח של המעוין AEFG גדול פי $\frac{9}{4}$ משטח של המעוין ABCD.

הנקודה A היא מפגש הישרים EB ו-DG.



$\frac{AB}{BE} = ?$

(1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{9}$

<u>פתרון</u>

הזווית $\sphericalangle EAG$ והזווית $\sphericalangle DAB$ קדקודיות ולכן שוות. זכרו כי די לנו במציאת זווית אחת זהה בין שני מעוינים כדי לקבוע שהם דומים. נתון לנו כי יחס השטחים בין המעוינים הוא $4:9$. אנו יודעים שיחס השטחים בין מרובעים שווה ליחס הקווי ביניהם בריבוע, ולכן היחס הקווי הוא: $\sqrt{4} : \sqrt{9} \Rightarrow 2:3$. נסמן את הצלע AB ב-2x. לפיכך: $EA = 3x$.

הצלע BE מורכבת מהצלעות EA ו-AB ולכן: $EB = EA + AB = 3x + 2x = 5x$.

לאור האמור לעיל: $\frac{AB}{BE} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - דמיון במרובעים

צלע של ריבוע הוארכה ב-20%.

בכמה גדל שטחו?

(1) 12% (2) 20% (3) 44% (4) 48%

<u>פתרון</u>

מאחר שריבוע הוא צורה משוכללת, כל הריבועים דומים זה לזה. נסמן את צלע הריבוע ב-x. לאחר הארכתה ב-20% אורכה הוא: $x \cdot \frac{120}{100} = x \cdot 1.2 = 1.2x$. שטח הריבוע לפני ההארכה הוא: $x \cdot x = x^2$ ושטחו לאחר ההארכה הוא:

$1.2x \cdot 1.2x = 1.44x^2$ (מי מכם שזכר את החזקה הנפוצה $12^2 = 144$, מדובר על אותה תוצאה רק בשבר עשרוני).

כדי לגלות בכמה אחוזים גדל שטח הריבוע, נחסר את שטח הריבוע לפני ההארכה משטח הריבוע לאחר ההארכה, ונחלק את התוצאה בשטח הריבוע לפני ההארכה: $\frac{1.44x^2 - x^2}{x^2} = \frac{0.44\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 0.44 = \frac{44}{100} = 44\%$.

<u>דרך פתרון נוספת - הצבת מספרים:</u>

משום שמדובר ביחסים, ניתן להציב מספרים. נקבע שצלע הריבוע היא 10 ס"מ. לאחר הארכתה ב-20% אורכה הוא (בס"מ): $1\cancel{0} \cdot \frac{12\cancel{0}}{1\cancel{00}} = 12$. שטח הריבוע לפני ההארכה הוא (בסמ"ר) $10 \cdot 10 = 100$ ושטחו לאחר ההארכה הוא (בסמ"ר) $12 \cdot 12 = 144$.

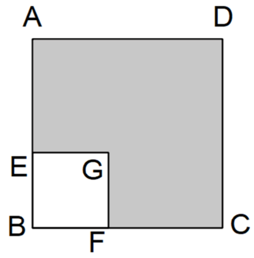
כדי למצוא בכמה אחוזים גדל השטח, נחסר 100 סמ"ר (השטח לפני ההארכה) מ-144 סמ"ר (השטח לאחר ההארכה) ונחלק את התוצאה בשטח לפני ההארכה: $\frac{144 - 100}{100} = \frac{44}{100} = 44\%$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - דמיון במרובעים

בסרטוט שלפניכם ABCD ו-EBFG הם ריבועים.

נתון: $AE = 2EB$.



מה היחס בין השטח האפור לשטח הריבוע ABCD?

(1) $8:9$

(2) $3:4$

(3) $2:3$

(4) $1:4$

פתרון

כאמור, כל הריבועים דומים זה לזה משום שמדובר בצורה משוכללת. אם כן, הריבועים ABCD ו-EBFG דומים.

נסמן את אורך הצלע EB ב-x ולפי הנתון בשאלה - אורך הצלע AE הוא 2x. לפיכך, אורך הצלע AB הוא 3x ($x+2x$).

אי לכך, היחס בין צלע הריבוע EBFG לצלע הריבוע ABCD (היחס הקווי) הוא $x:3x \Rightarrow 1:3$ ומכאן שהיחס בין שטחי הריבועים הוא: $(1:3)^2 \Rightarrow 1:9$. השטח האפור שווה להפרש בין שטח הריבוע ABCD לשטח הריבוע EBFG: $9-1=8$

(המספרים מייצגים את היחס בין השטחים ויכולים, לצורך העניין, לכלול נעלמים: $9a-1a=8a$).

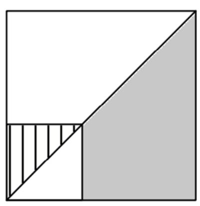
לאור האמור לעיל, היחס בין השטח האפור לשטח הריבוע ABCD הוא: $8:9$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - דמיון במרובעים

בסרטוט שלפניכם שני ריבועים.

נתון: $\frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח המקווקו}} = 15$



פי כמה גדולה צלע הריבוע הגדול מצלע הריבוע הקטן?

(1) 15

(2) 2

(3) 3

(4) 4

פתרון

אלכסון בריבוע מחלק אותו לשני משולשים שווים, ולכן השטח המקווקו זהה לשטח הלבן הקטן, וכפועל יוצא מכך - השטח האפור זהה בשטחו לשטח הלבן הגדול. בעזרת הנתון לפיו $\frac{\text{השטח האפור}}{\text{השטח המקווקו}} = 15$, נסמן את השטח האפור ב-15x ואת השטח המקווקו ב-x. לפי סימון זה, שטח הריבוע הגדול הוא $15x+15x+x+x=32x$ ושטח הריבוע הקטן הוא $x+x=2x$.

אם כן, היחס בין שטחי הריבועים הוא: $32x:2x \Rightarrow 16:1$. מכיוון שיחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע, היחס בין צלע בריבוע הגדול לצלע בריבוע הקטן הוא: $\sqrt{16}:\sqrt{1} \Rightarrow 4:1$ ומכאן שצלע הריבוע הגדול גדולה פי 4 מצלע הריבוע הקטן.

התשובה הנכונה היא (4).

סיכום

1. <u>תכונות מרובעים:</u>

זכרו את ה**הגדרות** השונות של המרובעים (למשל: מקבילית היא מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות) ואת ה**תכונות** השונות שלהם (למשל: האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה).

נוסף על כך, זכרו את שהוצג בתרשים בתחילת השיעור בעל-פה.

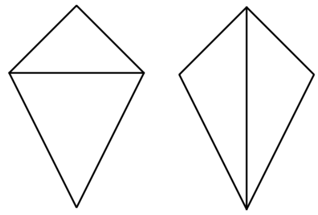
2. <u>בניית משוואה:</u>

בשאלות מסוימות יהיה עלינו לבנות משוואה או אי-שוויון באמצעות הנוסחאות והתכונות אשר קשורות במרובעים.

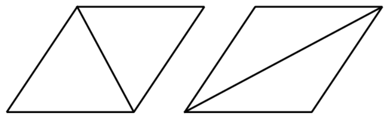
כשיהיה עלינו לעשות כן, ניעזר בנעלמים.

3. <u>משולשים במרובעים:</u>

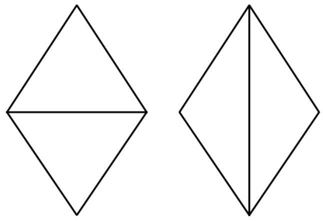
- כל אחד מהאלכסונים בדלתון - אנכי או אופקי - מחלק את הדלתון לשני משולשים.



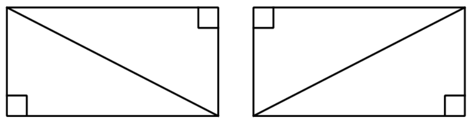
- כל אחד מהאלכסונים במקבילית מחלק אותה לשני משולשים זהים.



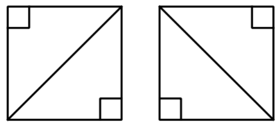
- במעוין, האלכסון האנכי מחלק אותו לשני משולשים שווי שוקיים זהים, וכך גם באשר לאלכסון האופקי.



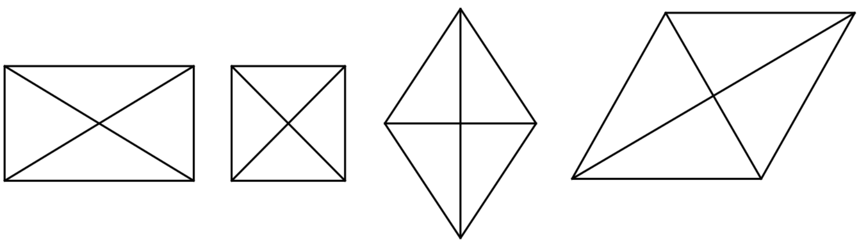
- במלבן האלכסונים זהים זה לזה ושניהם מחלקים את המלבן באותה צורה - הם יוצרים משולשים ישרי זווית זהים.



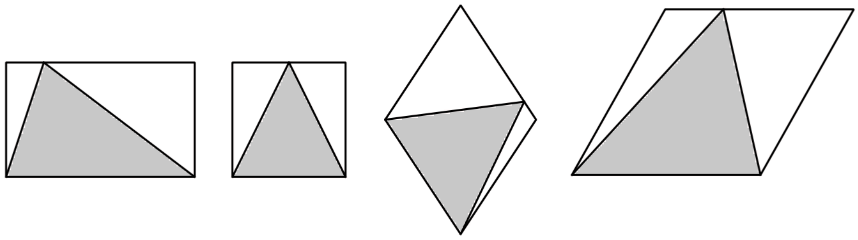
- האלכסונים בריבוע מחלקים אותו לשני משולשים שווי שוקיים וישרי זווית זהים (45; 45; 90).



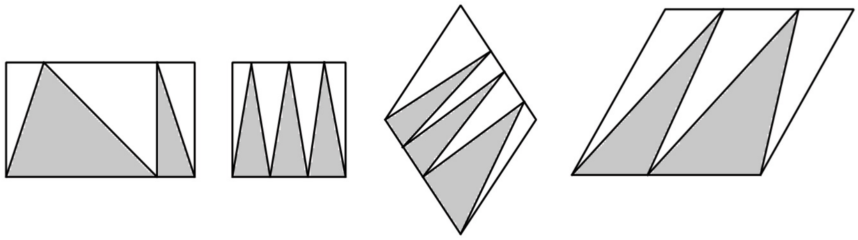
- האלכסונים במקבילית, במעוין, בריבוע ובמלבן מחלקים אותם ל-4 משולשים ששטחם זהה (בריבוע ובמעוין המשולשים גם חופפים):



- כאשר משולש חולק צלע משותפת עם מעוין, ריבוע, מלבן ומקבילית והקדקוד שלו נמצא על הצלע המקבילה, שטחו (השטח האפור) שווה למחצית משטח המרובע (כפועל יוצא מכך - השטח הלבן שווה אף הוא למחצית משטח המרובע):

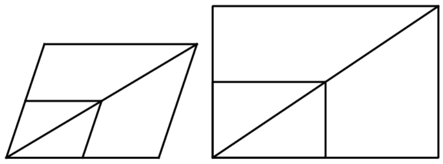


האמור לעיל תקף גם לגבי מספר משולשים - כל עוד סכום הבסיסים שלהם שווה לצלע הבסיס של המרובע, סכום השטחים שלהם (השטחים האפורים) שווה למחצית שטחו, והשטחים הלבנים שווים אף הם למחצית משטחו:



4. <u>דמיון מרובעים:</u>

- יחס השטחים בין מרובעים דומים שווה ליחס הקווי (יחס בין צלעות/אלכסונים/היקף) בריבוע.
- מכיוון שריבוע הוא צורה משוכללת, כל הריבועים דומים זה לזה.
- עלינו לדעת כי מתקיים יחס זהה בין האורך לרוחב בשני המלבנים כדי לקבוע שמתקיים דמיון בין 2 מלבנים.
- עלינו למצוא זוויות אחת שווה בין מעוינים כדי לקבוע שישנו דמיון ביניהם.
- כאשר בתוך אחת מהצורות מלבן, מעוין או מקבילית נמצאת אותה צורה, והאלכסונים בהן מתלכדים (נהיים לקטע אחד), ניתן לקבוע כי מתקיים ביניהן דמיון (האמור לעיל תקף, כמובן, גם בריבוע שכן כל הריבועים דומים זה לזה):



<u>סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!</u>