

אלגברה

שברים

שיעור שברים

לאחר שלמדנו את יסודות השברים בספר "יסודות מתמטיים", בשיעור זה נעסוק בנושא השברים כפי שהוא מופיע בבחינה הפסיכומטרית.

תרגילי חשבון בשברים

כללי השברים שלמדנו בספר "יסודות מתמטיים" יכולים לשמש אותנו בתרגילי חשבון הכוללים שברים גדולים בבחינה.

שאלה לדוגמה – חשבון בסיסי בשברים

$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{\frac{16}{35}} = ?$$

$$\frac{5}{7} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

פתרון:

ניצור מכנה משותף $5 \cdot 7 = 35$ בתרגיל החיבור שבמונה, ונקבל: $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{7+5}{35} = \frac{12}{35}$

כעת לפנינו תרגיל חילוק של שני שברים: $\frac{\frac{12}{35}}{\frac{16}{35}}$

נכפול את המונה $\frac{12}{35}$ במספר ההופכי של המכנה $\frac{35}{16}$ ונקבל: $\frac{12}{35} \cdot \frac{35}{16} = \frac{12}{16}$

נצמצם את השבר $\frac{12}{16}$ ב-4 ונמצא שהשבר שווה ל- $\frac{3}{4}$.

התשובה הנכונה היא (3).

מציאת חלק משלם: כפל שבר בשבר, כפל שבר בשלם

כאשר כופלים שבר בשבר אחר, עלינו לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
כאשר כופלים שבר במספר שלם, עלינו לכפול את המונה של השבר במספר השלם, ולחלק את המכפלה במכנה.

שאלה לדוגמה – מציאת חלק משלם

משה הוא איש מכירות הנדרש למכור 18 מוצרים ביום.

אתמול מכר משה $\frac{5}{6}$ מהכמות היומית הנדרשת, והיום מכר $\frac{7}{9}$ מהכמות היומית הנדרשת.

כמה מוצרים צריך משה למכור מחר על מנת לעמוד בכמות היומית של מחר **וגם** לפצות על החסר של היומיים האחרונים?

24 (4)

7 (3)

25 (2)

18 (1)

פתרון:

כדי לעמוד בכמות היומית של מחר **וגם** לפצות על החסר של היומיים האחרונים, על משה למכור מחר 18 מוצרים **בנוסף** למוצרים שלא מכר ביומיים האחרונים.

אתמול משה מכר $\frac{5}{6}$ מהכמות היומית הנדרשת: $\frac{5}{6} \cdot 18 = 15$. החסר של אתמול הוא: $\frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ מוצרים.

היום משה מכר $\frac{7}{9}$ מהכמות היומית הנדרשת: $\frac{7}{9} \cdot 18 = 14$. החסר של אתמול הוא: $\frac{2}{9} \cdot 18 = 4$ מוצרים.

לכן, כדי לפצות על החוסר, משה צריך למכור מחר $18 + 3 + 4 = 25$ מוצרים.
התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – כפל שבר בשלם

נתון: לקרן יש יותר תפוזים מלטלי, אך שליש ממספר התפוזים של טלי הוא יותר מאשר רבע ממספר התפוזים של קרן. מה מהבאים אפשרי?

- (1) לקרן יש 12 תפוזים ושליש ממספר התפוזים של טלי הוא 5
 (2) לטלי יש 15 תפוזים ורבע ממספר התפוזים של קרן הוא 4
 (3) לטלי יש 9 תפוזים ושליש מהתפוזים של קרן הם 4
 (4) לקרן יש 24 תפוזים ושליש ממספר התפוזים של טלי הוא 5

פתרון:

התשובה הנכונה צריכה לעמוד בשני תנאים מצטברים ("וגם"):

1. לקרן יש יותר תפוזים מלטלי.
 2. שליש ממספר התפוזים של טלי הם יותר מרבע ממספר התפוזים של קרן.

נבדוק מי מהתשובות עונה על שני התנאים שבשאלה:

תשובה (1): אם שליש ממספר התפוזים של טלי הוא 5, אזי מספר התפוזים של טלי הוא $3 \cdot 5 = 15$. לקרן יש 12 תפוזים, כלומר: פחות מטלי (לה יש 15 תפוזים), בניגוד לתנאי הראשון. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם לטלי יש 15 תפוזים, אזי שליש ממספר התפוזים של טלי הוא $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$.

אם רבע ממספר התפוזים של קרן הוא 4, אזי מספר התפוזים של קרן הוא $4 \cdot 4 = 16$. לקרן (16) יש יותר תפוזים מלטלי (15), ושליש ממספר התפוזים של טלי (5) הוא יותר מאשר רבע ממספר התפוזים של קרן (4). זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): אם לטלי יש 9 תפוזים, אזי שליש ממספר התפוזים של טלי הוא $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3$.

אם שליש מהתפוזים של קרן הם 4, אזי מספר התפוזים של קרן הוא $3 \cdot 4 = 12$ ורבע מהם הוא $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$.

שליש ממספר התפוזים של טלי (3) שווה לרבע ממספר התפוזים של קרן (3), בניגוד לתנאי השני. התשובה נפסלת.

תשובה (4): אם לקרן יש 24 תפוזים, אזי רבע ממספר התפוזים של קרן הוא $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$. שליש ממספר התפוזים של טלי הוא 5, פחות מאשר רבע ממספר התפוזים של קרן – בניגוד לתנאי השני. התשובה נפסלת. התשובה הנכונה היא (2).

מספר תשובה	קרן	<	טלי	<	טלי	<	קרן
תשובה (1)	12	>	15	<	5	<	קרן $\frac{1}{4}$
תשובה (2)	16	<	15	<	5	<	קרן $\frac{1}{4}$
תשובה (3)	12	<	9	=	3	=	קרן $\frac{1}{4}$
תשובה (4)	24	<	15	>	5	>	קרן $\frac{1}{4}$

להלן טבלה להמחשת נתוני השאלה:

הצבת השלם

בשאלות מסוימות, נידרש להשוות בין חלקים משלם, כאשר השלם אינו ידוע. נוכל לפתור שאלות אלה באמצעות הצבת מספר שלם נוח בתור השלם בשאלה, או להתייחס אל השלם כאילו היה שווה 1.

שאלה לדוגמה – הצבת השלם

ירושתו של סבא אלימלך חולקה באופן הבא:

הנכד הבכור קיבל $\frac{1}{6}$ מכספי הירושה. הנכד האמצעי קיבל $\frac{1}{5}$ מהכסף שנותר אחרי שהבכור קיבל את חלקו.

הנכד הצעיר קיבל $\frac{1}{4}$ מהכסף שנותר לאחר שהנכד האמצעי קיבל את חלקו, והיתרה נתרמה לצדקה.

מה מהבאים נכון **בהכרח**:

- (1) כל אח קיבל יותר מאשר כל אחד מהאחים הצעירים ממנו
- (2) כל אח קיבל פחות מאשר כל אחד מהאחים הצעירים ממנו
- (3) כל האחים קיבלו סכומי כסף זהים
- (4) סכום הכסף שנתרם לצדקה גדול מסכום הכסף שקיבלו שלושת האחים יחדיו

פתרון:

לא נאמר לנו מהי ירושתו של סבא אלימלך. במילים אחרות, אנחנו לא יודעים מהו "השלם" (הירושה) שאותה מחלקים. נניח שכספי הירושה הם 1 שקל.

הנכד הבכור קיבל $\frac{1}{6}$ מהירושה. כלומר, הוא קיבל $\frac{1}{6}$ שקל. לאחר שהנכד הבכור מקבל את חלקו, מהירושה נותרו $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ שקל.

הנכד האמצעי קיבל $\frac{1}{5}$ מכספי הירושה שנותרו לאחר שהנכד הבכור קיבל את חלקו.

מצאנו שמהירושה נותרו $\frac{5}{6}$ שקל, ולכן הנכד האמצעי מקבל $\frac{1}{5}$ מ- $\frac{5}{6}$ שקל, שהם $\frac{1}{6}$ שקל.

לאחר שהנכד האמצעי מקבל את חלקו, מהירושה נותרו $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ שקל. הנכד הצעיר קיבל $\frac{1}{4}$ מכספי הירושה שנותרו לאחר שהנכד האמצעי קיבל את חלקו.

מצאנו שמהירושה נותרו $\frac{4}{6}$ שקל, ולכן הנכד הצעיר מקבל $\frac{1}{4}$ מ- $\frac{4}{6}$ שקלים, שהם $\frac{1}{6}$ שקלים.

לאחר שהנכד הצעיר קיבל את חלקו, נותרו $\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ שקל מכספי הירושה אשר נתרמו לצדקה.

מצאנו שכל אחד מהנכדים קיבל סכום כסף זהה, $\frac{1}{6}$ שקל.

סכום הכסף שנתרם לצדקה, $\frac{1}{2}$ שקלים, זהה לסכום הכסף שקיבלו שלושת הנכדים יחד $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$.

התשובה הנכונה היא (3).

שימו לב: יכולנו להציב מראש גם מספר אחר המתחלק בכל אחד ממכני השברים, כמו 60, בתור כספי הירושה.

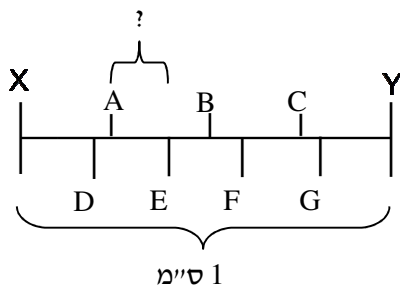
מושג השבר בשאלות מעורבות

מושג השבר משולב בשאלות כמותיות רבות בבחינה הפסיכומטרית, לדוגמה בגיאומטריה, או בבעיות כמותיות מגוונות.

שאלה לדוגמה – שאלות מעורבות

הנקודות A, B ו-C מחלקות את הקטע ל-4 קטעים שווים זה לזה באורכם.
הנקודות D, E, F ו-G מחלקות את הקטע ל-5 קטעים שווים זה לזה באורכם.

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הקטע AE (בס"מ)?



$$\frac{3}{20} \quad (1)$$

$$\frac{1}{10} \quad (2)$$

$$\frac{7}{20} \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

פתרון:

אורך הקטע XY הוא 1 ס"מ, ומכאן שהנקודות A, B ו-C מחלקות את הקטע XY ל-4 קטעים שווים שאורכם $\frac{1}{4}$ ס"מ.

בנוסף, הנקודות D, E, F ו-G מחלקות את הקטע XY ל-5 קטעים שווים שאורכם $\frac{1}{5}$ ס"מ. כדי לחשב את אורך הקטע AE,

נמצא איך ניתן להביע אותו באמצעות קטעים שאנו יודעים את אורכם. אורך הקטע AE שווה להפרש בין XE ל-XA, כלומר

XE - XA. הקטע XE מורכב מסכום הקטעים XD ו-DE, שניהם קטעים באורך $\frac{1}{5}$ ס"מ, ולכן נסיק כי אורך הקטע XE הוא

$$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ ס"מ. אורכו של הקטע XA הוא } \frac{1}{4} \text{ ס"מ. מכאן, שאורך הקטע AE הוא: } XE - XA = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

כלומר: $AE = \frac{3}{20}$ ס"מ. התשובה הנכונה היא (1).

השוואת שברים

על מנת שנוכל להשוות בין שברים, עלינו להשוות את מוני השברים או מכני השברים.

אם המכנים שווים – השבר הגדול יותר הוא השבר שהמונה שלו גדול ביותר: $\frac{7}{20} < \frac{13}{20}$.

אם המונים שווים – השבר הגדול יותר הוא השבר שהמכנה שלו קטן יותר: $\frac{13}{30} < \frac{13}{20}$.

שאלה לדוגמה – השוואת שברים

ערכו של איזה מהשברים הבאים הוא **הגדול ביותר**?

$$\frac{7}{10} \quad (4)$$

$$\frac{16}{20} \quad (3)$$

$$\frac{68}{80} \quad (2)$$

$$\frac{29}{40} \quad (1)$$

פתרון:

בשאלה זו המונים והמכנים שונים זה מזה.

נבצע מכנה משותף בין השברים, כאשר המכנה שנשאף להגיע אליו הוא 80 (ניתן לבצע מכנה משותף גם עם מכנים אחרים, למשל 40 או 20).

תשובה (1): נרחיב את השבר $\frac{29}{40}$ פי 2 ונקבל $\frac{58}{80}$.

תשובה (2): אין צורך להרחיב את השבר $\frac{68}{80}$. ניתן לראות כי הוא גדול מ- $\frac{58}{80}$, ולכן תשובה (1) נפסלת.

תשובה (3): נרחיב את השבר $\frac{16}{20}$ פי 4 ונקבל $\frac{64}{80}$. השבר שמצאנו קטן מ- $\frac{68}{80}$ ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): נרחיב את השבר $\frac{7}{10}$ פי 8 ונקבל $\frac{56}{80}$. השבר שמצאנו קטן מ- $\frac{68}{80}$ ולכן התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – השוואת שברים

ערכו של איזה מהשברים הבאים הוא הקטן ביותר?

$$\frac{45}{46} \quad (4)$$

$$\frac{88}{89} \quad (3)$$

$$\frac{21}{22} \quad (2)$$

$$\frac{78}{79} \quad (1)$$

פתרון:

נדמיין את ארבעת השברים שבתשובות, כפרוסות מתוך "עוגה" כלשהי (לדוגמה 78 פרוסות מתוך עוגה שנחתכה ל-79 פרוסות). נשים לב, כי בכל אחד מהשברים חסרה בדיוק פרוסת עוגה אחת.

ככל שהעוגה נפרסה ליותר פרוסות (לדוגמה ל-89 פרוסות, כמו בתשובה 3), הרי שכל פרוסה בה תהיה קטנה יותר.

ככל שהעוגה נפרסת למעט פרוסות (לדוגמה ל-22 פרוסות, כמו בתשובה 2), הרי שכל פרוסה בה תהיה גדולה יותר.

מכאן, כי השבר שחסרה לו פרוסת עוגה גדולה יותר, הוא בהכרח קטן יותר בהשוואה לשברים האחרים.

ניתן לראות את הרעיון על שברים "מוכרים" יותר, כגון $\frac{1}{2}$ לעומת $\frac{2}{3}$: בשניהם יש הבדל של 1 בין המונה למכנה,

והשבר $\frac{1}{2}$ קטן מהשבר $\frac{2}{3}$ שכן חסרה לו פרוסת עוגה גדולה יותר (העוגה מראש נפרסה לפחות פרוסות, ל-2 בלבד, ואחת מהן חסרה).

בשאלה שלפנינו השבר עם המכנה הקטן ביותר הוא $\frac{21}{22}$, ולכן זהו השבר הקטן ביותר.

באותו אופן, השבר הגדול ביותר הוא $\frac{88}{89}$, שכן חסר לו השבר הקטן ביותר, $\frac{1}{89}$, כדי להפוך לשלם.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת – השוואת שברים

דני מעוניין לחלק פרוסת עוגה ל-15 חבריו לכיתה (פרוסה לכל חבר).
ארבעה מבני כיתתו קיבלו פרוסת עוגה במשקל x גרם, חמישה מבני כיתתו קיבלו פרוסת עוגה במשקל y גרם,
ושישה מבני כיתתו קיבלו פרוסת עוגה במשקל z גרם. לאחר חלוקה זו נגמרה העוגה.

מה מהבאים נכון בהכרח?

$$(1) z < y < x$$

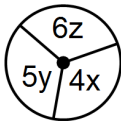
$$(2) x < y < z$$

$$(3) x = y = z$$

(4) אף תשובה אינה נכונה בהכרח

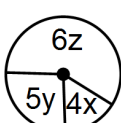
פתרון:

השאלה דורשת מאתנו להחליט ערכו של מי גדול יותר: x , y או z .
הנתונים מתייחסים לכמות החתיכות במשקל x , y ו- z ולא לחלק שחתיכות אלה מהוות מכלל העוגה.
אנו יכולים להסיק מן הנתונים כי משקל העוגה הכולל שווה ל- $4x + 5y + 6z$, אך איננו יכולים להסיק דבר על היחס $4x : 5y : 6z$.
לכן, כל שלוש התשובות 1–3 אפשריות. נדגים:

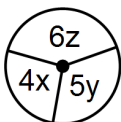


(1) אם $4x$, $5y$ ו- $6z$ שווים כל אחד מהם לשליש עוגה בדיוק, הרי ש- x הוא הגדול ביותר שכן הוא "רק" רבע מתוך שליש עוגה.

$$(2) \text{ אם } 4x \text{ הם שמינית עוגה, } 5y \text{ הם רבע עוגה } \left(\frac{2}{8}\right) \text{ ו- } 6z \text{ הם כל שאר העוגה, } \left(1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}\right),$$



$$\text{הרי ש- } x \text{ הוא הקטן ביותר } \left(\frac{1}{8} = \frac{1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}\right), y \text{ הוא הבינוני מבין השלושה } \left(\frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}\right)$$



$$\text{ו- } z \text{ הוא הגדול ביותר } \left(\frac{5}{8} = \frac{5}{6 \cdot 8} = \frac{5}{48}\right)$$

(3) אם העוגה חולקה מראש ל-15 פרוסות שוות בגודלן, $x = y = z$.
התשובה הנכונה היא (4).