גיאומטריה

תלת ממד

שעור תלת-ממד

תיבה

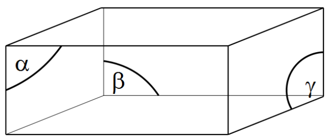
הגדרה: תיבה היא גוף תלת ממדי בעל שש פאות מלבניות.
שלושת ממדי התיבה הם האורך, הרוחב והגובה.

כלל: כל פאה בתיבה מאונכת לשכנותיה.

שאלה לדוגמה - תיבה

בסרטוט שלפניכם תיבה.

על פי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
איזה מהזוויות הבאות אינה ישרה?



(1) α

(2) β

(3) γ

(4) שלוש הזוויות המסומנות בסרטוט ישרות

פתרון: הזוויות המסומנות בסרטוט: α, β ו- γ הן כולן זוויות בין פאות שכנות בתיבה.
כל פאה בתיבה מאונכת לפאות השכנות לה, ומכאן ששלוש הזוויות הן בהכרח ישרות.
התשובה הנכונה היא (4).

הגדרה: מקצוע בגוף תלת ממדי הוא הקו הישר הנוצר במקום מפגש בין שתי פאות.

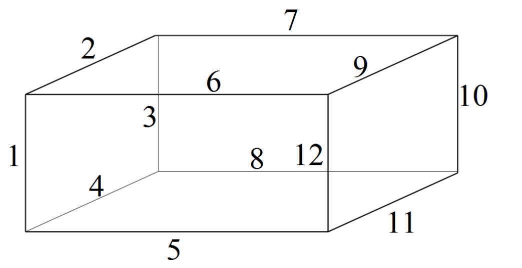
שאלה נוספת - תיבה

מה מספר המקצועות בתיבה?

(1) 6 (2) 8 (3) 12 (4) 16

פתרון: כל צלע בפאת התיבה משמשת כמקצוע בתיבה.
בכל פאה בתיבה יש 4 צלעות ובתיבה יש 6 פאות, ולכן נראה כי מספר המקצועות שווה ל- $4 \cdot 6 = 24$.

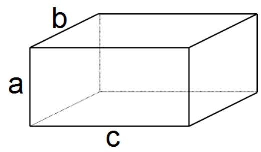
עם זאת, כל מקצוע בפאה משותפת לפאה נוספת, ולכן, על מנת למצוא את מספר המקצועות המדויק נחלק את מספר הצלעות שמצאנו ב- 2: $\frac{24}{2} = 12$. בסך הכל בתיבה ישנם 12 מקצועות.
התשובה הנכונה היא (3).
דרך נוספת לענות על שאלה זו היא לספור את מקצועות התיבה:



שטח פנים של תיבה

כלל: שטח הפנים של התיבה הוא סכום שטחי פאותיה.

לכן, שטח הפנים של תיבה שאורכי מקצועותיה a, b ו- c הוא: $2ab+2bc+2ac$.



לדוגמה: שטח הפנים של תיבה שאורכי מקצועותיה הם 2 ס"מ, 3 ס"מ ו- 5 ס"מ הוא:

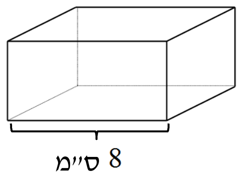
$2\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+2\cdot2\cdot5=12+30+20=62$ סמ"ר.

שאלה לדוגמה -
שטח פנים של תיבה

אורך מקצועה הארוך ביותר של התיבה שבסרטוט הוא 8 ס"מ.

היחס בין אורכי מקצועות התיבה: $1:2:4$

מה שטח הפנים של התיבה (בסמ"ר)?



(1) 64

(2) 48

(3) 112

(4) 122

פתרון: נוסחת שטח פנים של תיבה היא $2ab+2bc+2ac$. על מנת להשתמש בנוסחה אנו צריכים לדעת את אורכי מקצועות התיבה. לכן, נמצא את אורכי מקצועות התיבה בעזרת היחס הנתון ונציב בנוסחה.

מכך שהיחס בין אורכי המקצועות הוא $1:2:4$ ואורך המקצוע הארוך בתיבה הוא 8 ס"מ נסיק כי אורך מקצועות התיבה הנותרים הם 4 ס"מ ו- 2 ס"מ (היחס המקורי הוכפל פי 2).

אורכי מקצועות התיבה ידועים לנו (2,4,8), וכעת נציב בנוסחה $2ab+2bc+2ac$:

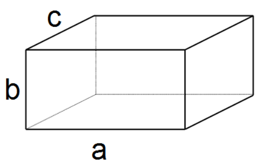
$2\cdot8\cdot4+2\cdot4\cdot2+2\cdot8\cdot2=64+16+32=112$ סמ"ר.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>נפח של תיבה</u>

הגדרה: נפח של תיבה הוא מכפלה של האורך, הרוחב והגובה (שלושת הממדים).
לכן, נפח תיבה שאורכי מקצועותיה a, b ו-c הוא: $a \cdot b \cdot c$.
לרוב, יחידות המידה בהן נשתמש למדידת נפח תהיינה סמ"ק (סנטימטר מעוקב) או מ"ק (מטר מעוקב).

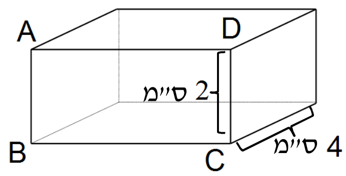
לדוגמה: נפח תיבה שאורכי מקצועותיה 1 ס"מ, 2 ס"מ ו-9 ס"מ הוא: $1 \cdot 2 \cdot 9 = 18$ סמ"ק



שאלה לדוגמה - נפח תיבה

בסרטוט שלפניכם תיבה שאורכי שניים ממקצועותיה הם 2 ס"מ ו-4 ס"מ.
נתון: שטח המלבן $ABCD = 8$ סמ"ר.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה נפח התיבה (בסמ"ק)?



(1) 8
(2) 16
(3) 32
(4) 64

פתרון: הנוסחה לחישוב נפח תיבה שמקצועותיה הם a, b ו-c היא: $a \cdot b \cdot c$.
במקרה זה ידועים לנו אורכי שניים ממקצועות התיבה, כך שאם נמצא את השלישי נוכל לחשב את נפחה.

נשתמש בנתון הנוסף הקיים בשאלה: שטח המלבן $ABCD = 8$ סמ"ר.
שטח מלבן הוא צלע כפול צלע סמוכה. אורכה של צלע DC ידוע לנו, נוכל בעזרת השטח למצוא את הצלע BC, המשמשת גם כמקצוע התיבה שאורכו חסר לנו.

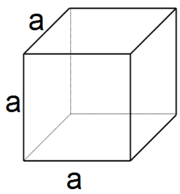
שטח המלבן הוא $ABCD = BC \cdot DC$. נציב את אורך הצלע ושטח המלבן הידועים לנו: $8 = 2 \cdot BC$ ומכך ש: $BC = 4$ ס"מ. מצאנו כי אורך מקצוע התיבה הנוסף 4 ס"מ.

כעת, על מנת לחשב את נפח התיבה נכפול את שלושת אורכי מקצועות התיבה זה בזה (לפי הנוסחה לחישוב נפח תיבה):
$4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ סמ"ק.
התשובה הנכונה היא (3).

קוביה

הגדרה: קוביה היא תיבה שבה האורך, הרוחב והגובה שווים זה לזה בגודלם. בקוביה כל הפאות הן ריבועים חופפים.

שטח פנים של קוביה



הגדרה: שטח פנים של קוביה הוא סכום שטחי פאותיה.

לכן, שטח הפנים של קוביה שאורך מקצועה a הוא $6a^2$.

לדוגמה: שטח הפנים של קוביה שאורך מקצועה 3 ס״מ הוא: $6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 =$ 54 סמ״ר

שאלה לדוגמה -
שטח פנים של קוביה

נתונה קוביה ששטח הפנים שלה 24 סמ״ר.

מה אורך מקצוע הקוביה (בס״מ)?

(1) 1 (2) 2 (3) 8 (4) 4

פתרון: על מנת למצוא את אורך מקצוע הקוביה כאשר שטח הפנים שלה ידוע לנו, נשווה את נוסחת שטח הפנים של קוביה לשטח הפנים הידוע לנו ונחלץ את a:

$6a^2 = 24$, $a^2 = 4$, ומכאן כי $a = \sqrt{4} =$ 2 ס״מ

התשובה הנכונה היא (2).

נפח קוביה

הגדרה: נפח קוביה הוא אורך מקצועה בשלישית.

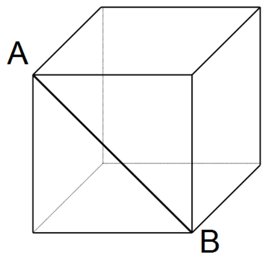
לכן, נפחה של קוביה שאורך מקצועה a הוא a^3.

לדוגמה: נפחה של קוביה שאורך מקצועה הוא 3 ס"מ: הוא: 27 סמ"ק $= 3^3$.

שאלה לדוגמה - נפח קוביה

בסרטוט שלפניכם קוביה.

נתון: $AB = \sqrt{2}$ ס"מ.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה נפח הקוביה (בסמ"ק)?

(1) 1
(2) 6
(3) 16
(4) 4

פתרון: נפח קוביה הוא אורך צלעה בשלישית. מכך ניתן להסיק כי הנתון היחיד אותו אנו צריכים לדעת על מנת לחשב נפח קוביה הוא אורך מקצועה. נמצא אותו בעזרת נתוני השאלה:

ידוע לנו כי $AB = \sqrt{2}$ ס"מ. AB הוא אלכסון בפאת הקוביה. פאת קוביה היא ריבוע ולכן AB הוא אלכסון בריבוע.

אלכסון בריבוע מחלק את הריבוע לשני משולשים חופפים שווי שוקיים וישרי זווית, בהם יחס הצלעות הוא $1:1:\sqrt{2}$, כלומר היחס בין צלע הריבוע לאלכסונו הוא $1:\sqrt{2}$.

במקרה זה אורך האלכסון הוא $\sqrt{2}$ ס"מ ומכך שאורך צלע הריבוע, שהיא גם מקצוע הקוביה הינו 1 ס"מ.

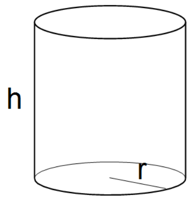
על מנת למצוא את נפח הקוביה נעלה אורך זה בחזקה שלישית: 1 סמ"ק $= 1^3$.

התשובה הנכונה היא (1).

גליל

הגדרה: גליל הוא גוף תלת ממדי בעל שני בסיסים שהם מעגלים חופפים זה לזה הנמצאים במישורים מקבילים, ומעטפת המחברת ביניהם. הקו המחבר את מרכזי המעגלים מאונך לכל אחד מהבסיסים.

שטח מעטפת גליל

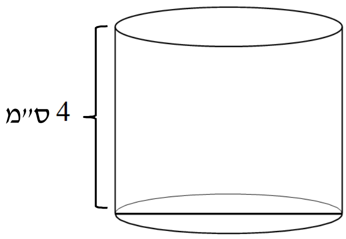


הגדרה: שטח המעטפת של גליל שאורך רדיוס בסיסו r וגובהו h הוא מכפלת היקף הבסיס בגובה הגליל, כלומר $2\pi r\cdot h$.

לדוגמה: שטח מעטפת של גליל שאורך רדיוסו 2 ס״מ וגובהו 3 ס״מ הוא 12π סמ״ר $= 2\pi\cdot 2\cdot 3$

שאלה לדוגמה - שטח מעטפת גליל

בסרטוט שלפניכם גליל שקוטרו וגובהו שווים זה לזה.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח מעטפת הגליל (בסמ״ר)?

(1) 8π
(2) 16π
(3) 32π
(4) 4π

פתרון: נוסחת שטח מעטפת של גליל היא $2\pi r\cdot h$. מכאן שעל מנת לחשב את שטח המעטפת אנו צריכים לדעת את גובה הגליל ואת אורך רדיוסו. אנו יודעים את גובה הגליל (המסומן בסרטוט ושווה ל- 4 ס״מ). נמצא את אורך רדיוס הגליל ונציב בנוסחה.

עפ״י הנתון קוטר בסיס הגליל שווה לגובהו ומכך שווה גם הוא ל- 4 ס״מ.

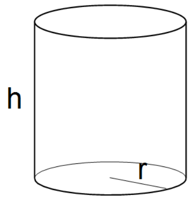
קוטר מעגל הוא, כידוע, פעמיים הרדיוס ולכן על מנת למצוא את רדיוס המעגל נחלק את הקוטר בשתיים: 2 ס״מ $=\frac{4}{2}$.

כעת נשתמש בנוסחה לחישוב שטח מעטפת גליל $2\pi r\cdot h$.

נציב בנוסחה את אורכו של הרדיוס שמצאנו (2 ס״מ) ואת הגובה הידוע לנו (4 ס״מ): 16π סמ״ר $= 2\pi\cdot 2\cdot 4$

התשובה הנכונה היא (2).

שטח פנים של גליל



הגדרה: שטח הפנים של גליל הוא סכום שטחי הבסיסים והמעטפת.

שטח הפנים של גליל שרדיוסו r וגובהו h הוא: $2\pi r\cdot h+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$.

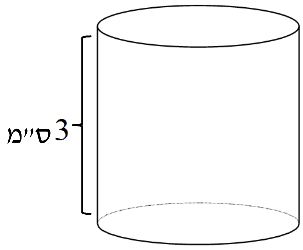
לדוגמה: שטח הפנים של גליל שאורך רדיוסו 3 ס״מ וגובהו 7 ס״מ הוא:

$2\pi\cdot 3\cdot(7+3)=60\pi$ סמ״ר.

שאלה לדוגמה - שטח פנים גליל

בסרטוט שלפניכם גליל שהיקף בסיסו 2π ס״מ וגובהו 3 ס״מ.

מה שטח הפנים של הגליל (בסמ״ר)?



(1) 6π
(2) 8π
(3) 2π
(4) 7π

פתרון: שטח פנים של גליל הוא סכום שטחי בסיסיו ושטח המעטפת שלו.
שטח המעטפת הוא היקף בסיס הגליל כפול גובהו. שני נתונים אלה ידועים לנו ולכן נוכל לחשב את שטח המעטפת.

על מנת לחשב את שטחי הבסיס של הגליל נמצא את רדיוסו בעזרת ההיקף הידוע לנו ונשתמש בנוסחת שטח מעגל.
לבסוף נחבר את שטח המעטפת שמצאנו ואת פעמיים שטח הבסיס.

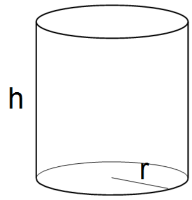
שטח המעטפת: נוסחת שטח מעטפת גליל היא $2\pi r\cdot h$, משמע היקף הגליל (2π ס״מ) כפול גובה הגליל (3 ס״מ).
נחשב: $2\pi\cdot 3=6\pi$ סמ״ר.
כעת נמצא את רדיוס הבסיס: נוסחת היקף מעגל היא $2\pi r$. מקרה זה ידוע לנו כי ההיקף הוא 2π.
נשווה את ההיקף הידוע לנו לנוסחה על מנת למצוא את הרדיוס: $2\pi=2\pi r$. נחלק את המשוואה ב- 2π ונקבל כי $r=1$.

כעת נוכל לחשב את שטח מעגל הבסיס: נוסחת שטח מעגל היא πr^2. נציב את אורך הרדיוס שמצאנו: $\pi\cdot 1^2=\pi$ סמ״ר.
על מנת למצוא את שטח הפנים של הגליל נחבר את שטח המעטפת שמצאנו עם פעמיים שטח בסיס הגליל שמצאנו:
$6\pi+2\cdot\pi=8\pi$ סמ״ר.
התשובה הנכונה היא (2).

נפח של גליל

הגדרה: נפח גליל הוא מכפלת שטחו של אחד הבסיסים בגובה הגליל.

נפח גליל שרדיוסו r וגובהו h הוא: $\pi r^2 \cdot h$.

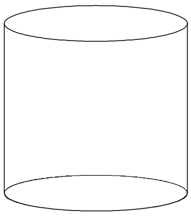


לדוגמה: נפח גליל שאורך רדיוסו 3 ס״מ וגובהו 10 ס״מ הוא: 90π סמ״ק $= \pi \cdot 3^2 \cdot 10$.

שאלה לדוגמה - נפח גליל

נתון גליל שנפחו 12π סמ״ק והיקף בסיסו 4π ס״מ.

מה גובהו של הגליל (בס״מ)?



(1) 5
(2) 8
(3) 3
(4) 6

פתרון: נוסחת נפח גליל היא שטח בסיסו כפול גובהו, ולכן כאשר הנפח ידוע לנו, כמו במקרה זה, על מנת למצוא את הגובה אנו צריכים לדעת את שטח בסיס הגליל.
תחילה נשתמש בהיקף הבסיס הידוע לנו למציאת רדיוסו. לאחר מכן, נמצא את שטח הבסיס בעזרת הרדיוס ונשתמש בנוסחת נפח גליל על מנת למצוא את הגובה.

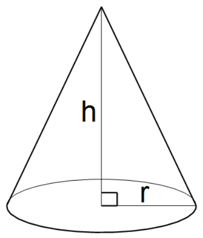
נוסחת היקף בסיס מעגל היא $2\pi r$. במקרה זה ידוע לנו כי אורך ההיקף הוא 4π ס״מ. נשווה את האורך הידוע לנו לנוסחה על מנת למצוא את הרדיוס: $2\pi r = 4\pi$, ומכך נקבל ש- $r = 2$ ס״מ.
נוסחת שטח מעגל היא πr^2. נציב את הרדיוס שמצאנו: $4\pi = \pi 2^2$ סמ״ר.

כעת נשתמש בנוסחת נפח גליל: נפח $=$ גובה $\cdot$ שטח בסיס. נציב את הנפח הידוע לנו ואת שטח הבסיס שמצאנו ונחלץ את הגובה:
$12\pi = 4\pi \cdot$ גובה. נחלק את המשוואה ב: 4π ונקבל כי גובה הגליל הוא 3 ס״מ.
התשובה הנכונה היא (3).

חרוט

הגדרה: חרוט ישר הוא גוף תלת ממדי שנוצר מחיבור הנקודות שעל היקף מעגל עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור המעגל. הנקודה נקראת "קדקוד החרוט" והיא נמצאת על ישר המאונך למישור המעגל ועובר במרכז המעגל.

הגדרה: נפח חרוט שרדיוס בסיסו r וגובהו h הוא: $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$.



לדוגמה: נפח חרוט שרדיוס בסיסו 2 ס"מ וגובהו 9 ס"מ הוא:

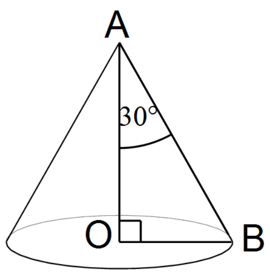
$\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 9}{3} = 4\pi \cdot 3 =$ סמ"ק 12π.

שאלה לדוגמה - חרוט

בסרטוט שלפניכם חרוט שבו הנקודה O היא מרכז מעגל הבסיס.

נתון: $AB = 6$ ס"מ.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה נפח החרוט (בסמ"ק)?



(1) $6\pi \cdot \sqrt{3}$

(2) 9π

(3) $9\pi \cdot \sqrt{3}$

(4) $\frac{9\pi}{\sqrt{3}}$

פתרון: נוסחת נפח חרוט היא $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ לפיה אנו צריכים לדעת את רדיוס הבסיס ואת גובה החרוט על מנת לחשב את נפחו.

ניתן לראות כי חיבור קצוות הקטע AB, שאורכו ידוע לנו, עם מרכז מעגל הבסיס (הנקודה O) יוצר משולש ישר זווית שאחת מזוויותיו בת $30°$ ומכאן שהמשולש OAB הוא משולש שזוויותיו $30°,60°,90°$.

הצלעות הנותרות במשולש הן רדיוס מעגל הבסיס (OB) וגובה החרוט (AO).

במשולש שזוויותיו הן $30°,60°,90°$ יחס הצלעות הוא $1:\sqrt{3}:2$.

מכך נסיק כי אורך הרדיוס OB הוא 3 ס"מ ואורך גובה החרוט AO הוא $3\sqrt{3}$ ס"מ.

נציב את הנתונים בנוסחת נפח גליל: $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = \frac{9\pi \cdot 3\sqrt{3}}{3}$.

לאחר צמצום ניתן לראות כי נפח החרוט הוא $9\pi\sqrt{3}$ סמ"ק.

התשובה הנכונה היא (3).

מנסרה ישרה

מנסרה ישרה היא גוף תלת ממדי ששני בסיסיו הם מצולעים החופפים זה לזה ונמצאים במישורים מקבילים, ופאותיו הצדדיות הן מלבנים. כל מנסרה מכונה על פי מספר הצלעות של בסיסה:
מנסרה משולשת היא בעלת בסיסים משולשים, מנסרה מרובעת היא בעלת בסיסים מרובעים וכו'.
גובה המנסרה הוא אורך הקטע המחבר בין הבסיסים ומאונך להם. זה המרחק בין בסיסי המנסרה.

שאלה לדוגמה - מנסרה

איזה מהגופים הבאים הוא מנסרה ישרה?

(1) גליל
(2) קוביה
(3) פירמידה
(4) חרוט

פתרון: מכיוון שעלינו לזהות מי מבין הגופים הוא מנסרה ישרה, ניזכר בהגדרת הגוף המדובר.
מנסרה ישרה היא **גוף תלת ממדי ששני בסיסיו הם מצולעים החופפים זה לזה ונמצאים במישורים מקבילים, ופאותיו הצדדיות הן מלבנים.** כעת נבדוק איזה מהתשובות מתאימות להגדרה זו.

גליל אינו מתאים להגדרה זו. אמנם בסיסיו נמצאים במישורים מקבילים אך הם אינם מצולעים (הם מעגלים) ואין בגליל פאות צדדיות- יש מעטפת עגולה שאינה מורכבת ממלבנים. קוביה מתאימה להגדרה: בסיסיה מצולעים (ריבועים) ופאותיה הצדדיות הן מלבנים (אף הם ריבועים, אך כזכור ריבוע הוא מקרה ספציפי של מלבן). זו התשובה הנכונה.
פירמידה אינה מנסרה ישרה מכיוון שפאותיה הצדדיות אינם מלבנים אלא משולשים.
חרוט אינו מנסרה ישרה מכיוון שבסיסו מעגל ומעטפתו אינה מורכבת ממלבנים.
התשובה הנכונה היא (2).

שטח מעטפת של מנסרה

הגדרה: שטח המעטפת של מנסרה הוא סכום שטחי כל הפאות הצדדיות.

שטח מעטפת של מנסרה שגובהה h ס״מ הוא: $h \cdot$ היקף הבסיס.

ניתן לחשב את שטח המעטפת גם כמכפלה של היקף בסיס המנסרה בגובה המנסרה.

לדוגמה: שטח המעטפת של מנסרה שהיקף בסיסה 10ס״מ וגובהה 5 ס״מ הוא: $50 = 5 \cdot 10$ סמ״ר.

שאלה לדוגמה - שטח מעטפת של מנסרה

נתונה מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות ש**שטחו** $\sqrt{3}$ סמ״ר.

גובה המנסרה 4 ס"מ.

מה שטח המעטפת של המנסרה (בסמ״ר)?

(1) 24 (2) 6 (3) $4\sqrt{3}$ (4) 18

פתרון: ניתן לחשב שטח מעטפת של מנסרה בשתי דרכים:

דרך א׳- שטח המעטפת הוא סכום שטחי הפאות הצדדיות.

דרך ב׳- שטח המעטפת הוא היקף הבסיס כפול גובה המנסרה.

במקרה זה אנו יודעים את גובה המנסרה ויש לנו נתון על בסיסה, לכן נבחר בדרך ב׳.

בסיס המנסרה הוא משולש שווה צלעות ולכן בעזרת שטחו הידוע לנו נוכל למצוא את אורך צלעו.

מאורך צלעו נוכל להסיק את היקפו. נוסחת שטח משולש שווה צלעות היא $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

במקרה זה שטח המשולש הוא $\sqrt{3}$ סמ״ר. נשווה את השטח לנוסחה על מנת למצוא את אורך צלע המשולש:

$\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. נחלק ב- $\sqrt{3}$: $\frac{a^2}{4} = 1$, נכפול את אגפי המשוואה ב- 4: $a^2 = 4$ ומכאן שאורך צלע המשולש הוא 2 ס״מ.

היקף המשולש מורכב מאורך שלוש צלעותיו. כאמור מדובר במשולש שווה צלעות ולכן ההיקף הוא מכפלת אורך צלעו ב- 3:

$3 \cdot 2 =$ 6 ס״מ.

נשתמש בנוסחת שטח מעטפת, השטח שווה לגובה המנסרה כפול היקף הבסיס. נציב: $6 \cdot 4 =$ 24 סמ״ר.

התשובה הנכונה היא (1).

שטח פנים של מנסרה

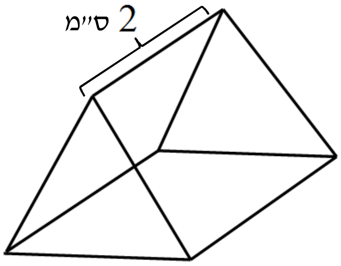
הגדרה: שטח הפנים של מנסרה הוא סכום שטח המעטפת ושטחי שני הבסיסים של המנסרה.

שאלה לדוגמה - שטח פנים של מנסרה

בסרטוט שלפניכם מנסרה משולשת שבסיסה משולש שווה צלעות.

שטח המעטפת של המנסרה 12 סמ״ר וגובהה 2 ס״מ.

מה שטח הפנים של המנסרה (בסמ״ר)?



(1) 24

(2) $12+2\sqrt{3}$

(3) $12+\sqrt{3}$

(4) 18

פתרון: שטח הפנים של מנסרה מורכב מסכום שטחי בסיסי המנסרה ומשטח מעטפתה.
שטח המעטפת ידוע לנו ולכן נמצא את שטח בסיס המנסרה כדי שנוכל לחשב את שטח פניה.

בסיסי המנסרה הם משולשים שווי צלעות. במשולש מסוג זה אנו יודעים לחשב את השטח בעזרת אורך הצלע.
נחפש את צלע המשולש: אחד מנתוני השאלה הוא שטח המעטפת, וכידוע דרך אחת לחישוב שטח זה היא הכפלת גובה המנסרה (הידוע לנו גם כן) בהיקף הבסיס. נמצא את היקף הבסיס בעזרת קשר זה:
שטח המעטפת = גובה · היקף הבסיס.
נציב את הנתונים הידועים לנו: $12 = 2 \cdot$ היקף הבסיס. מכך נקבל כי היקף הבסיס הוא 6 ס״מ.

כאמור, משולש הבסיס הוא משולש שווה צלעות. מכך שאורך כל אחת מצלעותיו שליש מהיקף המשולש.
נחשב את אורך צלע המשולש: 2 ס״מ $=\frac{6}{3}$. נוסחת שטח משולש שווה צלעות היא $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

נציב את אורך הצלע שמצאנו: $\frac{2^2\sqrt{3}}{4}$ ומכך ששטח המשולש: $\frac{4\sqrt{3}}{4}$

נצמצם ב 4 ונקבל כי שטח משולש הבסיס הוא $\sqrt{3}$ סמ״ר.

שטח הפנים הוא כאמור פעמיים שטח הבסיס ועוד שטח המעטפת: $2\cdot\sqrt{3}+12$ סמ״ר.
התשובה הנכונה היא (2).

נפח של מנסרה

כלל: נפח מנסרה שגובהה h הוא: $h\cdot$ שטח הבסיס.

לדוגמה: נפח של מנסרה ששטח בסיסה 5 ס"מ וגובהה 5 ס"מ הוא: 25 סמ"ק $= 5\cdot 5$.

שאלה לדוגמה- נפח מנסרה

נתונה מנסרה ששטח מעטפתה 12 סמ"ר.

נתון: היקף בסיס המנסרה 6 ס"מ ושטחו 3 סמ"ר.

מה נפח המנסרה (בסמ"ק)?

(1) 12 (2) 6 (3) 3 (4) 9

פתרון: נוסחת נפח מנסרה היא שטח הבסיס כפול גובה המנסרה.
שטח הבסיס ידוע לנו, ולכן נשתמש ביתר נתוני השאלה על מנת למצוא את גובה המנסרה. לאחר מכן, נוכל לחשב את נפחה.
הנתונים הנוספים שיש לנו הם היקף הבסיס ושטח מעטפת המנסרה.

שטח מעטפת מנסרה שווה לגובה המנסרה כפול היקף הבסיס. נוכל ליצור משוואה ולחלץ ממנה את הגובה:
שטח מעטפת = גובה · היקף הבסיס. נציב את שטח המעטפת והיקף הבסיס הידועים לנו:
$12 = 6\cdot$ גובה. נחלק את המשוואה ב: 6 ונקבל שגובה המנסרה 2 ס"מ.
כעת נחזור לנוסחת נפח מנסרה: נפח = שטח הבסיס · גובה.
נציב את השטח הידוע לנו ואת הגובה שמצאנו: נפח המנסרה $= 2\cdot 3$, ומכאן שנפח המנסרה הוא 6 סמ"ק.
התשובה הנכונה היא (2).

פירמידה ישרה

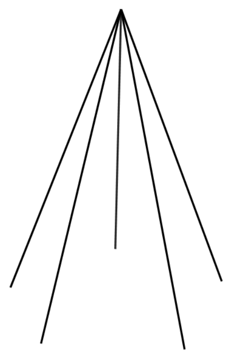
הגדרה: פירמידה ישרה היא גוף תלת ממדי שנוצר מחיבור קדקודי מצולע משוכלל כלשהו עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור המצולע. המצולע נקרא "בסיס הפירמידה" והנקודה נקראת "קדקוד הפירמידה".
הפאות הצדדיות של הפירמידה הן משולשים.
כל פירמידה מכונה על פי מספר הצלעות של בסיסה: פירמידה משולשת היא בעלת בסיס משולש, פירמידה מרובעת היא בעלת בסיס מרובע וכו'.

שאלה לדוגמה - פירמידה ישרה

בסרטוט שלפניכם מעטפתו של גוף תלת ממדי מסוים.
הישרים בסרטוט הם חלק ממקצועות הגוף.

איזה מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) הגוף בסרטוט הוא חרוט.
(2) הגוף בסרטוט הוא פירמידה משולשת.
(3) הגוף בסרטוט הוא פירמידה מרובעת.
(4) הגוף בסרטוט הוא פירמידה מחומשת.



פתרון: בשאלה בה אנו נדרשים לקבוע איזה טענה נכונה נסתכל על התשובות.
הטענה הראשונה היא שהגוף הוא חרוט. מעטפתה של חרוט, כזכור, היא "חלקה", כלומר ללא מקצועות ושאינה בנויה ממשולשים.

נשים לב כי שלוש התשובות הבאות עוסקות בפירמידות ולכן הגוף הוא בהכרח פירמידה. ניזכר בהגדרת הפירמידה על מנת לקבוע באיזה סוג של פירמידה מדובר: פירמידה היא גוף תלת ממדי שנוצר מחיבור קדקודי מצולע כלשהו עם הנקודה הנמצאת מחוץ למישור המצולע. כל פירמידה מכונה על פי מספר הצלעות של בסיסה, כלומר על מנת לדעת באיזו פירמידה מדובר אנו צריכים לדעת כמה צלעות יש בבסיסה.

מכך אנו מבינים שכל אחד ממקצועות מעטפת הפירמידה מחבר את קדקודה עם קדקוד במצולע הבסיס. נספור כמה מקצועות כאלה יש בסרטוט: במעטפת הפירמידה ישנם 5 מקצועות ומכך שבמצולע הבסיס ישנם 5 קדקודים. מצולע בעל 5 קדקודים הוא מחומש.
התשובה הנכונה היא (4).

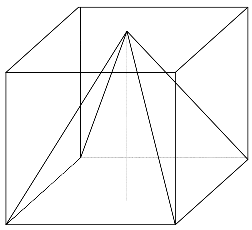
גובה פירמידה

הגדרה: גובה הפירמידה הוא אורך הקטע היורד מקדקוד הפירמידה לבסיסה ומאונך למישור הבסיס שלה.

שאלה לדוגמה - גובה פירמידה

בסרטוט שלפניכם פירמידה החסומה בתוך קוביה.
בסיס הפירמידה הוא בסיס הקוביה, וקדקודה נמצא על פאת הקוביה העליונה.
נפח הקוביה 27 סמ"ק.

מה גובה הפירמידה (בס"מ)?



(1) $3\sqrt{3}$
(2) 6
(3) 3
(4) 9

פתרון: גובה הפירמידה הוא אורך הקטע היורד מקדקוד הפירמידה לבסיסה ומאונך למישור הבסיס שלה. זה המרחק בין קדקוד הפירמידה לבסיסה. אנו יודעים כי קדקוד הפירמידה נמצא על פאת הקוביה העליונה ושבסיס הפירמידה הוא בסיס הקוביה.
מכך אנו מבינים שגובה הפירמידה הוא בעצם המרחק בין שתי פאות קוביה הנמצאות אחת מול השנייה- מרחק זה
שווה למקצוע הקובייה. נחשב את מקצוע הקוביה: אנו יודעים את נפח הקוביה, ומכאן שמקצוע הקוביה הוא שורש שלישי של הנפח:

$\sqrt[3]{27} = 3$ ס"מ.

התשובה הנכונה היא (3).

נפח פירמידה

הגדרה: נפח פירמידה שגובהה h הוא: $\frac{h\cdot\text{שטח בסיס}}{3}$.

לדוגמה: נפח של פירמידה שגובהה 5 ס"מ ובסיסה ריבוע שאורך צלעו 3 ס"מ הוא:

$15\text{סמ"ק} = \frac{3^2\cdot 5}{3}$.

שאלה לדוגמה - נפח פירמידה

נתונה פירמידה ישרה שבסיסה משולש שאורך צלעו 2 ס"מ .
גובה הפירמידה כאורך אחת מצלעות בסיסה.

מה נפח הפירמידה (בסמ"ק)?

(1) $2\sqrt{3}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) 8

פתרון: נפח הפירמידה הוא שליש ממכפלת שטח הבסיס בגובהה ומכך שעל מנת לחשב את הנפח אנו צריכים לדעת את שטח הבסיס ואת גובה הפירמידה.

במקרה זה בסיס הפירמידה הוא משולש שאורך צלעו הוא 2 ס"מ.

גובה הפירמידה הוא כאורך אחת מצלעות בסיסה ומכך אנו מבינים כי הגובה הוא 2 ס"מ.

נזכור כי פירמידה ישרה היא גוף שבסיסה מצולע משוכלל. משולש משוכלל הוא משולש שווה צלעות.
כעת נמצא את שטח הבסיס: במשולש שווה צלעות אנו יודעים לחשב את השטח בעזרת אורך הצלע בלבד.

נשתמש בנוסחת שטח משולש שווה צלעות: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. נציב בנוסחה את אורך צלע המשולש: $\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}$ נצמצם ב-4

ונקבל כי שטח המשולש הוא $\sqrt{3}$ סמ"ר. כעת נשתמש בנוסחת נפח פירמידה: נפח פירמידה $=\frac{\text{גובה}\cdot\text{שטח בסיס}}{3}$.

נציב את נתונים שמצאנו:

$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ סמ"ק}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$.

התשובה הנכונה היא (2).

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!