

אלגברה

פעולות מומצאות

שיעור פעולות מומצאות

מבוא

פעולות מומצאות הוא נושא פסיכומטרי אשר אינו נלמד בבית הספר, בשונה מנושאים כמו שברים או חזקות למשל. פתרון שאלות בפעולות מומצאות דורש ידע אלגברי בלבד, ומתבצע לרוב בעזרת הצבה של מספר בביטוי מסוים. עם זאת, מדובר בנושא מגוון בו יכולות להופיע שאלות המשלבות את כל הנושאים האלגבריים המופיעים בחומר הנלמד לבחינה הפסיכומטרית (משוואות, אי שוויונות, נוסחאות כפל מקוצר, שברים, חזקות, שורשים ועוד).

הערה: בשאלות פעולות מומצאות חשוב לשים לב לנושא סדר הפעולות בחשבון. כזכור, כפל וחילוק קודמים לחיבור וחסור, חזקה או שורש קודמים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות, ופעולות הנמצאות בתוך הסוגריים קודמות לכל פעולה אחרת.

מהי פעולה מומצאת?

אנו מכירים פעולות חשבון שונות כמו חיבור או חיסור, כפל או חילוק, וגם הוצאת שורש או העלאה בחזקה. לכל אחת מפעולות אלה קיים סימן (למשל: $+$, $\sqrt{\quad}$) ואנו יודעים מה היא מבצעת מבחינה אלגברית. פעולה מומצאת היא סימן (למשל $\$$) שאין לו הגדרה חשבונית מוכרת, שבמצעותו מוגדר ביטוי אלגברי. הסימן שמייצג את הפעולה המומצאת הוא קיצור לכתובת הביטוי המלא.

לדוגמה: נניח שבשאלה הוגדרה עבור כל x הפעולה $\$$ כך: $\$(x) = x^2 + 1$.

אנו יכולים להבין שכאשר הסימן $\$$ מופיע לפני מספר, זו דרך מקוצרת לכתוב את הביטוי $x^2 + 1$ ולהציב בו את המספר.

כלל: הגדרת הפעולה המומצאת המוצגת בשאלה מאפשרת לנו להבין מה הפעולה מבצעת.

פתרון פעולות מומצאות

דרך הפתרון הנפוצה ביותר של שאלות מסוג פעולות מומצאות היא הצבת מספר מסוים בהגדרת הפעולה.

לדוגמה: הפעולה $\$$ מוגדרת עבור כל מספר שלם וחיובי כך: $\$(x) = 2x - 3$.

קעת נוכל לחשב את ערכו של הביטוי $\$(x)$ עבור כל x , למשל: אם אנו נשאלים מה ערכו של הביטוי $\$(2)$ נציב בהגדרת הפעולה $x = 2$ ונקבל: $\$(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

כלל: כדי למצוא תוצאה של פעולה מומצאת עבור מספר מסוים, עלינו להציב את המספר בהגדרת הפעולה המומצאת.

שאלה לדוגמה

לכל x הוגדרה הפעולה $\$(x) = \frac{x+2}{3}$ כך:

$$\$(10) = ?$$

4 (4)

3 (3)

10 (2)

7 (1)

פתרון: לפי הגדרת הפעולה שמסומנת באמצעות הסימן $\$$, נלמד כי משמעות הפעולה היא הוספה של 2 למספר עליו מבוצעת הפעולה (x) וחילוק הסכום שהתקבל ב-3. אנו נדרשים למצוא למה שווה $\$(10)$ ולכן נוסיף 2 למספר 10 ונחלק את התוצאה ב-3:

$$\frac{10+2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

התשובה הנכונה היא (4).

הצבת ביטוי בפעולה מומצאת

לעתים נדרש להציב ביטוי בהגדרת הפעולה המומצאת. הצבה זו אינה שונה מהצבת מספר בהגדרת הפעולה המומצאת. נציב את הביטוי במקום הנעלם בהגדרת הפעולה המומצאת.

שאלה לדוגמה

עבור כל מספר x הוגדרה הפעולה $\$(x) = x^2 + x$.

עבור איזה מערכי ה- x הבאים מתקיים $\$(x) = \$(x-1)$?

0 (4)

-3 (3)

-2 (2)

-1 (1)

פתרון: על מנת לפתור את השאלה, נציב בכל מקום בו מופיעה הפעולה $\$$ את הביטוי המתאים לפי הגדרת הפעולה המומצאת. על פי הגדרת הפעולה $\$(x) = x^2 + x$, נבדוק מה ערכו של כל אחד מהביטויים עליהם מתבצעת בשאלה הפעולה $\$$: ערכו של הביטוי $\$(x-1)$ הוא $(x-1)^2 + (x-1)$.

נציב את שמצאנו במשוואה שנשאלנו לגביה: $x^2 + x = (x-1)^2 + (x-1)$.

לפי נוסחת הכפל המקוצר $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, נפתח את הסוגריים באגף הימני: $x^2 + x = x^2 - 2x + 1 + (x-1)$.

נוכל לצמצם את אגפי המשוואה ולקבל: $x^2 + x = x^2 - x$. נחסר משני האגפים x^2 : $x = -x$.

נכנס את הנעלמים לאגף שמאל: $2x = 0$. כעת, נצמצם את המשוואה ב-2 ונקבל $x = 0$.

לחלופין, ניתן גם לפתור את השאלה באמצעות הצבה. נציב את תשובה (4) במשוואה $\$(0) = \$(0-1)$ ונקבל

$0 = 0$. נכנס איברים בשני האגפים ונמצא כי המשוואה מתקיימת עבור תשובה זו: $0 = 0$.

התשובה הנכונה היא (4).

פעולה מומצאת עם שני משתנים

קיימות גם פעולות מומצאות המוגדרות על שני משתנים.

לדוגמה: לכל שני מספרים (a, b) הוגדרה פעולה $\$$ כך: $\$(a, b) = \frac{a}{b} + 2$.

ניתן לראות כי תוצאת הפעולה $\$$ מושפעת מ- a ומ- b יחדיו.

נוכל לחשב את תוצאת הפעולה $\$$ בעזרת הצבת שני המספרים הנתונים ב- a וב- b .

לדוגמה: כאשר $a = 6$ ו- $b = 3$, מתקיים $\$(6, 3) = \frac{6}{3} + 2 = 2 + 2 = 4$.

הערה: בשאלות מסוג זה יש חשיבות לסדר הופעת המספרים ביחס לסדר הופעת הנעלמים בהגדרת הפעולה המומצאת. למשל: בדוגמה לעיל ראינו כי יש להציב את המספר 6 במקומות שסומנו באות a בהגדרת הפעולה ואת המספר 3 במקומות שסומנו באות b בהגדרת הפעולה.

שאלה לדוגמה

לכל a ו- b הוגדרה הפעולה $\$$:

$$\$(a, b) = \sqrt[b]{a}$$

$$\$(8x, 3) \cdot \$(64x, 6) = ?$$

$$2x \quad (1)$$

$$2\sqrt{x} \quad (2)$$

$$6\sqrt{x} \quad (3)$$

$$4\sqrt{x} \quad (4)$$

פתרון:

על מנת לפתור את השאלה, נציב בכל מקום בו מופיעה הפעולה $\$$ את הביטוי המתאים לפי הגדרת הפעולה המומצאת. נשים לב בעת ההצבה שישנה חשיבות לסדר הופעת הביטויים בפעולה המומצאת.

ראשית, נחשב את תוצאת הפעולה המומצאת $\$(8x, 3)$. במקרה זה, $a = 8x$ ו- $b = 3$.

נציב זאת בפעולה המומצאת ונמצא כי $\$(8x, 3) = \sqrt[3]{8x}$.

נחשב את תוצאת הפעולה המומצאת $\$(64x, 6)$. במקרה זה, $a = 64x$ ו- $b = 6$.

נציב זאת בפעולה המומצאת ונמצא כי $\$(64x, 6) = \sqrt[6]{64x}$.

כעת, נוכל לראות כי $\$(8x, 3) \cdot \$(64x, 6) = \sqrt[3]{8x} \cdot \sqrt[6]{64x}$. כל כפל תחת שורש ניתן לפירוק לשני שורשים, ומכאן ש- $\sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x}$.

ו- $\sqrt[6]{64x} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{x}$. לפיכך הביטוי $\sqrt[3]{8x} \cdot \sqrt[6]{64x}$ שווה ל- $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{x}$.

אנו יודעים כי $\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{64} = 2$. מכאן שנוכל לפשט עוד את הביטוי: $2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{x} = 4 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$.

לפי חוקי החזקות, ניתן להביע את השורשים שבביטוי באמצעות חזקות של שבר ולקבל את הביטוי $4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}$.

הבסיסים זהים עם מעריך שונה, ולכן ניתן לחבר את המעריכים ולקבל $4 \cdot x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{x}$. התשובה הנכונה היא (4).

הגדרה מותנית של פעולה מומצאת

ישנן פעולות מומצאות אשר פועלות באופן שונה בהתאם לתכונות המספר שהצבנו או בהתאם לכללים מסוימים. במצב כזה, לפני שנציב את המספר בפעולה המומצאת, עלינו למצוא על איזה מהתנאים עונה הביטוי שאנו מציבים.

לדוגמה: עבור כל x זוגי, הפעולה $\$$ מוגדרת כך: $\$(x) = x + 1$

עבור כל x אי-זוגי, הפעולה $\$$ מוגדרת כך: $\$(x) = x - 1$

במצב כזה, במידה שנישאל על מספר זוגי נציב אותו בהגדרה הראשונה. לעומת זאת, במידה שנישאל על מספר אי זוגי נציב אותו בהגדרה השנייה.

נניח שהשאלה המוצגת היא: $\$(3) = ?$, המספר 3 הוא אי זוגי, ולכן נשתמש בהגדרה השנייה: $\$(3) = 3 - 1 = 2$.

כלל: כאשר הגדרת הפעולה מותנית במספר עליו מתבצעת הפעולה, נחליט תחילה לאיזו מן הקטגוריות מתאים המספר, ולאחר מכן נציב אותו בהגדרה המתאימה לו.

שאלה לדוגמה

לכל שני מספרים m ו- n , הוגדרה הפעולה $\$(m, n)$ כך:

אם $n \leq m$ אז: $\$(m, n) = m - n$

אם $m < n$ אז: $\$(m, n) = m + n^2$

$\$(\$(-3, -2), 1) = ?$

0 (4)

-6 (3)

6 (2)

1 (1)

פתרון: בשאלה זו מוצגת פעולה מותנית המשלבת שני מספרים (m, n) .

תחילה נתבונן בתנאי הפעולה המוגדרת:

הגדרות שונות לפעולה קיימות עבור שני מצבים: מצב בו m גדול או שווה מ- n ומצב בו n גדול מ- m .

נשים לב כי m הוא המספר השמאלי מבין השניים ונתייחס לכך בהתאם בכל פעם שנידרש להציב בפעולה $\$$:

תחילה נחשב את הפעולות הנמצאות בתוך הסוגריים לפי סדר פעולות חשבון:

בביטוי $\$(\$(-3, -2), 1)$ נשים לב כי n גדול מ- m .

לכן נשתמש בהגדרה המתאימה למצב כזה, $\$(m, n) = m + n^2$, ונקבל: $-3 + (-2)^2 = -3 + 4 = 1$.

נציב את שמצאנו בביטוי המקורי ונמצא כי $\$(\$(-3, -2), 1) = \$(1, 1)$

כעת, בביטוי שהתקבל $\$(1, 1)$ מתקיים: $m = n$.

לכן, נשתמש בהגדרה המתאימה למצב כזה, $\$(m, n) = m - n$, ונקבל: $\$(1, 1) = 1 - 1 = 0$.

התשובה הנכונה היא (4).

מציאת הפעולה המומצאת

סוג נוסף אך נדיר של שאלות 'פעולות מומצאות' הוא שאלות בהן נתון ערכה של תוצאת הפעולה המומצאת עבור ביטוי מסוים, ואנו נשאלים מה יכולה/ לא יכולה להיות הגדרת הפעולה שמתאימה לתוצאה זו. דרך הפתרון במקרה כזה היא בדיקת התשובות, ומציאת התשובה המתאימה.

שאלה נוספת

הפעולה \$ מוגדרת עבור כל שני מספרים \$a, b\$.

$$\text{נתון: } \$(3,4) = 25$$

מה אינה יכולה להיות הגדרת הפעולה \$:

$$\$(a,b) = a^2 + b^2 \quad (1)$$

$$\$(a,b) = a^3 - \sqrt{b} \quad (2)$$

$$\$(a,b) = 1 + 2ab \quad (3)$$

$$\$(a,b) = 3\sqrt{a} + 4b \quad (4)$$

פתרון: לפנינו תוצאת הפעולה \$ על שני מספרים (3,4) ועלינו לקבוע איזה מהתשובות אינה מתאימה להיות פעולה זו. לכן, נציב את המספרים (3,4) בהגדרות הפעולה המומצאת שבתשובות, ונמצא באיזו מן ההגדרות מתקבלת תוצאה השונה מ-25. נעשה זאת תוך שמירה על סדר הופעת המספרים (b = 4, a = 3).

תשובה (1): הגדרת הפעולה בתשובה זו היא $\$(a,b) = a^2 + b^2$. נציב את המספרים הנתונים:

$$\$(3,4) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

תשובה זו אפשרית, ולכן אינה נכונה.

תשובה (2): הגדרת הפעולה בתשובה זו היא $\$(a,b) = a^3 - \sqrt{b}$. נציב את המספרים הנתונים:

$$\$(3,4) = 3^3 - \sqrt{4} = 27 - 2 = 25$$

תשובה זו אפשרית, ולכן אינה נכונה.

תשובה (3): הגדרת הפעולה בתשובה זו היא $\$(a,b) = 1 + 2ab$. נציב את המספרים הנתונים:

$$\$(3,4) = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 + 24 = 25$$

תשובה זו אפשרית, ולכן אינה נכונה.

תשובה (4): הגדרת הפעולה בתשובה זו היא $\$(a,b) = 3\sqrt{a} + 4b$. נציב את המספרים הנתונים:

$$\$(3,4) = 3\sqrt{3} + 4 \cdot 4 = 3\sqrt{3} + 16$$

התשובה הנכונה היא (4).

חילוץ פעולה מומצאת

ישנן שאלות בהן נדרש לחלץ מתוך משוואה את הגדרת הפעולה המומצאת. במקרה זה, נתייחס אל סימן הפעולה כאל נעלם במשוואה. ניתן לבצע על הפעולה המומצאת פעולות אלגבריות כיוון שלמעשה, אנו מתייחסים אליה כביטוי אלגברי הנמצא בתוך סוגריים. נבודד את סימן הפעולה המומצאת באחד מהאגפים, וכך נמצא את הגדרת הפעולה.

שאלה לדוגמה

לכל מספר x הוגדרה הפעולה $\$(x)$ כך שמתקיים:

$$\$(x) + 14 = 8x - \$(x)$$

$$\$(4) = ?$$

6 (4)

7 (3)

8 (2)

9 (1)

נבודד את סימן הפעולה המומצאת $\$(x)$ באגף שמאל של המשוואה, ואת שאר האיברים באגף ימין ונקבל: $2 \cdot \$(x) = 8x - 14$.
 כעת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונמצא כי $\$(x) = 4x - 7$. מצאנו את הגדרת הפעולה המומצאת $\$(x)$.
 כדי למצוא את תוצאת הפעולה המומצאת $\$(4)$, נציב 4 בהגדרת הפעולה ונקבל: $\$(4) = 4 \cdot 4 - 7 = 16 - 7 = 9$.
התשובה הנכונה היא (1).

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!