אלגברה

ביטויים

ביטויים

מבוא לביטויים והצבת מספרים

מבוא

בשיעור הקרוב אנו עומדים לעסוק בביטויים: כיצד ניתן לפשט אותם, כיצד ניתן להיעזר בהצבת מספרים מהראש כדי לפתור אותם ועוד.

ראשית, חשוב לעמוד על ההגדרה של ביטוי: צירוף של מספרים ו/או אותיות הקשורים ביניהם באמצעות פעולות חשבון.

ביטוי לדוגמה:

$$3+\frac{15}{3}-1=?$$

נפשט את הביטוי: $3+\frac{15}{3}-1=3+5-1=8-1=7$.

למעשה, הביטוי שמופיע לעיל הוא ביטוי אלגברי ויש לו ערך מסוים: 7.

כאשר אנו עוסקים באי-שוויונות או במשוואות, אנו רגילים לראות סימן מתמטי מסוים ($\leq$ / $<$ / $=$),

אולם ביטויים, לרוב, יעמדו כיחידה עצמאית.

בפועל, ניתן לראות בביטוי אגף אחד של אי-שוויון או משוואה.

חשוב לציין כי ביטוי עשוי להיות מורכב ממספרים בלבד (כמו התרגיל שמופיע לעיל), מנעלמים בלבד או ממספרים ומנעלמים.

לדוגמה:

$$3+\frac{15x}{3}-x=?$$

נפשט את הביטוי: $3+\frac{15x}{3}-x=3+5x-x=3+4x$.

למעשה, הביטוי שמופיע לעיל הוא ביטוי אלגברי ויש לו ערך מסוים - $3+4x$.

בשונה מהדוגמה הקודמת, הביטוי שמופיע לעיל תלוי בערכו של x.

כלומר, עבור ערכים שונים של x נקבל תוצאות שונות.

למשל, אם $x=1$ ערכו של הביטוי הוא: $3+4x=3+4\cdot1=7$.

אם $x=2$ ערכו של הביטוי הוא: $3+4x=3+4\cdot2=3+8=11$.

הצבת מספרים בביטויים

בדוגמה הקודמת ראינו שכאשר ביטוי מסוים כולל נעלם, ערכו של הביטוי תלוי בערך הנעלם.

זאת, כאשר הנעלם לא מצטמצם לאחר פישוט הביטוי.

לפני שנציג את הדרכים בהן ניתן לפשט ביטויים, נראה כי כמעט תמיד ניתן להשתמש ב"גלגל הצלה" למציאת התשובה הנכונה - **הצבת מספרים** מהראש.

לדוגמה:

$$\frac{x^2 - x(x-1) + x}{x} = ? \quad , \quad x \neq 0$$

(1) 1
(2) 2
(3) $2x$
(4) x

אם איננו בטוחים כיצד יש לפשט את הביטוי בצורה אלגברית, אנו יכולים להציב ערך מספרי במקום x ולמצוא את ערכו של הביטוי עבור אותו x. למשל, נציב $x = 1$ ונקבל: $\frac{x^2 - x(x-1) + x}{x} = \frac{1^2 - 1(1-1) + 1}{1} = \frac{1 - 1\cdot 0 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$.

כלומר, כאשר $x = 1$ ערכו של הביטוי הוא 2.

כעת, עלינו להציב $x = 1$ בתשובות (באלו שכוללות את הנעלם x) **ולפסול** את אלו שערכן **אינו** 2:

תשובה (1): $2 \neq 1$ ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $2 = 2$.

תשובה (3): $2 = 2\cdot 1 = 2x$.

תשובה (4): $2 \neq 1 = x$ ולכן התשובה נפסלת.

משום שלא הצלחנו לפסול 3 תשובות, עלינו לבצע הצבה נוספת. נציב $x = 2$: $\frac{2^2 - 2(2-1) + 2}{2} = \frac{4 - 2(1) + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

כלומר, כאשר $x = 2$ ערכו של הביטוי הוא 2.

כעת, עלינו להציב $x = 2$ בתשובות (2) ו-(3) **ולפסול** את זו שערכה **אינו** 2 (שימו לב: כאשר הצלחנו לפסול תשובה מסוימת, אין צורך לבדוק אותה שנית):

תשובה (2): $2 = 2$.

תשובה (3): $2 \neq 4 = 2\cdot 2 = 2x$ ולכן התשובה נפסלת.

הצלחנו לפסול את התשובות (1), (3) ו-(4), ולכן תשובה (2) היא הנכונה.

כעת, נעבור לפתרון אלגברי של הביטוי: $\frac{x^2 - x(x-1) + x}{x} = \frac{x^2 - x^2 + x + x}{x} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$.

מהפתרון האלגברי נובע כי ערכו של הביטוי אשר מופיע לעיל הוא 2 **תמיד**.

אם כן, לא משנה איזה ערך של x נציב (פרט ל- $x = 0$), ערכו של הביטוי יהיה 2.

האמור לעיל הוא הסיבה לכך שכאשר אנו מציבים מספרים מהראש, אנו **פוסלים** תשובות.

הרי כפי שראינו, ייתכן שעבור ערך מסוים של x נקבל תשובה מתאימה, אולם ייתכן שתשובה זו לא תהיה נכונה **תמיד** - כלומר עבור **כל** ערך של x.

שאלה לדוגמה - מבוא לביטויים והצבת מספרים

נתון: $a,b \neq 0$, $b \neq -\frac{1}{a}$

$$\frac{a\left(a+\frac{1}{b}\right)}{b\left(b+\frac{1}{a}\right)}=?$$

(1) $\frac{b}{a}$

(2) $\frac{a^2}{b^2}$

(3) ab

(4) $\frac{a}{b}(ab+1)$

<u>פתרון - הצבת מספרים:</u>

אחת מהתשובות היא פישוט נכון של הביטוי אותו נתבקשנו למצוא. לפיכך, ניתן להציב מספרים נוחים בביטוי, למצוא את ערכו על פי אותה הצבה ולאחר מכן להציב את אותם מספרים בתשובות - תשובה שערכה לא יהיה זהה לזה שקיבלנו תיפסל.

נציב בביטוי $a=1$ ו- $b=2$ ונקבל: $\frac{a\left(a+\frac{1}{b}\right)}{b\left(b+\frac{1}{a}\right)}=\frac{1\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2\left(2+\frac{1}{1}\right)}=\frac{1\frac{1}{2}}{2\cdot 3}=\frac{\frac{3}{2}}{6}$.

נבצע את החלוקה על ידי ביצוע כפל בהופכי: $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

כעת, נציב בתשובות $a=1$ ו- $b=2$ ונפסול את אלו שערכן אינו $\frac{1}{4}$:

תשובה (1): $\frac{b}{a}=\frac{2}{1}=2$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $ab=1\cdot 2=2$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{a}{b}(ab+1)=\frac{1}{2}(1\cdot 2+1)=\frac{1}{2}(3)=\frac{3}{2}$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

הערה: ניתן לפתור את התרגיל גם בצורה אלגברית, אך את הדרכים לעשות כן נלמד בהמשך.

✓ **כלל:** כאשר אנו בוחרים לפתור שאלה באמצעות **הצבת מספרים** מהראש, אנו מסמנים את התשובה הנכונה **רק** לאחר שפסלנו 3 תשובות.

פישוט ביטוי על ידי פתיחת סוגריים

לאחר שלמדנו כיצד להשתמש ב"גלגל ההצלה" הצבת מספרים, נעבור לדרכי פתרון אלגבריות.
נתחיל מ**פתיחת סוגריים**.

<u>לדוגמה:</u>

$(x+3)(4-x)+(x+2)(x-6)=?$

(1) $2x^2$
(2) $2x$
(3) $3x$
(4) $-3x$

שימו לב שהביטוי המופיע לעיל מורכב משתי מכפלות אשר ביניהן סימן חיבור (+).
נזכיר כי כאשר אנו מבצעים כפל בין איברים בסוגריים, עלינו לכפול את האיבר השמאלי בסוגריים השמאליים בכל אחד מהאיברים בסוגריים הימניים, וכן את האיבר הימני בסוגריים השמאליים בכל אחד מהאיברים בסוגריים הימניים.

נתחיל בביצוע הכפל במכפלה הראשונה: $(x+3)(4-x)=4x-x^2+12-3x$.

כעת, נבצע את הכפל במכפלה השנייה: $(x+2)(x-6)=x^2-6x+2x-12$.

נחבר את התוצאות שהתקבלו: $4x-x^2+12-3x+x^2-6x+2x-12$.

נסמן בקווים תחתונים את האיברים הדומים ונכנס אותם: $\underline{\underline{4x}}-\underline{x^2}+\underline{\underline{\underline{12}}}-\underline{\underline{3x}}+\underline{x^2}-\underline{\underline{6x}}+\underline{\underline{2x}}-\underline{\underline{\underline{12}}}=-3x$.

<u>שימו לב!</u>

רק תשובה אחת היא פישוט נכון של הביטוי, ועל כן ניתן לפתור אותה באמצעות **הצבת מספר** נוח.
נציב בביטוי $x=1$ ונקבל: $(x+3)(4-x)+(x+2)(x-6)=(1+3)(4-1)+(1+2)(1-6)=(4)(3)+(3)(-5)$.
לאחר ביצוע הכפל: $(4)(3)+(3)(-5)=12-15=-3$.
לפיכך, כאשר $x=1$ ערכו של הביטוי הוא 3-.
זכרו! כאשר אנו מציבים מספר בביטוי, עלינו להציבו בארבע התשובות ולפסול 3 מהן על מנת להיוותר עם הנכונה.
כעת, נציב $x=1$ בתשובות ונפסול את אלו שערכן אינו 3-:

תשובה (1): $2x^2=2\cdot1^2=2$. התשובה נפסלת.
תשובה (2): $2x=2\cdot1=2$. התשובה נפסלת.
תשובה (3): $3x=3\cdot1=3$. התשובה נפסלת.
תשובה (4): $-3x=-3\cdot1=-3$. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה לדוגמה - פתיחת סוגריים

$(x+1)(x-2)-x(x-2)=?$

(1) $x-2$
(2) $x+2$
(3) x^2+x
(4) $2x-2$

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

נתחיל מביצוע המכפלות: $(x+1)(x-2)-x(x-2)=x^2-2x+x-2-x^2+2x$.

נסמן בקווים תחתונים את האיברים הדומים ונכנס אותם: $\underline{x^2}-\underline{\underline{2x}}+\underline{x}-\underline{\underline{\underline{2}}}-\underline{x^2}+\underline{\underline{2x}}=x-2$.

הערה: ניתן היה להוציא גורם משותף $(x-2)$, אך את הדרך לעשות כן נלמד בהמשך.

דרך ב' - הצבת מספרים:

רק תשובה אחת היא פישוט נכון של הביטוי, ועל כן ניתן לפתור אותה באמצעות **הצבת מספר** נוח.

נציב $x=2$ בביטוי: $(x+1)(x-2)-x(x-2)=(2+1)(2-2)-2(2-2)=(3)(0)-2(0)=0-0=0$.

לפיכך, כאשר $x=2$ ערכו של הביטוי הוא 0.

כעת, נציב $x=2$ בתשובות ונפסול את אלו שערכן אינו 0:

תשובה (1): $x-2=2-2=0$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): $x+2=2+2=4$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x^2+x=2^2+2=4+2=6$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $2x-2=2\cdot2-2=4-2=2$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

פישוט ביטוי על ידי הוצאת גורם משותף

דרך פתרון אלגברי נוספת לפישוט ביטויים היא **הוצאת גורם משותף**.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{12a+12-9a}{a-4a-12}=?\ ,\ a\neq -4$$

שימו לב כי בביטוי המופיע לעיל, טרם הוצאת הגורם המשותף, ניתן לכנס איברים דומים: $\frac{12a+12-9a}{a-4a-12}=\frac{3a+12}{-3a-12}$.

בדוגמה הזו, ישנן 2 אפשרויות להוצאת גורם משותף:

1. הוצאת גורם משותף 3 במונה והוצאת גורם משותף 3- במכנה: $\frac{3(a+4)}{-3(a+4)}$.

כעת, נצמצם את הביטוי $(a+4)$ ונקבל: $\frac{3\cancel{(a+4)}}{-3\cancel{(a+4)}}=\frac{3}{-3}=-1$.

2. הוצאת גורם משותף 1- במכנה: $\frac{3a+12}{-3a-12}=\frac{3a+12}{-1(3a+12)}$.

כעת, נצמצם את הביטוי $(3a+12)$ ונקבל: $\frac{\cancel{3a+12}}{-1(\cancel{3a+12})}=\frac{1}{-1}=-1$.

כאשר אנו מוציאים גורם משותף ישנן מספר אפשרויות לעשות כן:

- להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר, כך שבסוגריים יישאר הביטוי בעל הערך הקטן ביותר.
- להוציא גורם משותף **זהה** במונה ובמכנה, לאו דווקא הגדול ביותר אשר מתאפשר.
- להוציא גורם משותף אשר יביא למצב בו בתוך הסוגריים במונה ובמכנה יוותר ביטוי **זהה**.

חשוב לציין כי גם אם לא זיהינו מיד את הגורם המשותף ה"יעיל" ביותר, עדיין נוכל להגיע לפתרון.
כלומר, ייתכן שנגיע לפתרון במספר שלבים, ולא בהכרח נבזבז זמן רב.

שאלה לדוגמה - גורם משותף

$\frac{x^2y+xy^2}{2x+2y}=?$, $x\neq -y$

(1) $x+y$ (2) x^2+y^2 (3) xy (4) $\frac{xy}{2}$

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

נוציא גורם משותף xy במונה, ואילו גורם משותף 2 במכנה: $\frac{x^2y+xy^2}{2x+2y}=\frac{xy(x+y)}{2(x+y)}$.

כעת, נצמצם את הביטוי $(x+y)$ ונקבל: $\frac{xy\cancel{(x+y)}}{2\cancel{(x+y)}}=\frac{xy}{2}$.

דרך ב' - הצבת מספרים:

אחת מהתשובות היא ערכו של הביטוי לאחר פישוט, ועל כן ניתן להציב מספרים נוחים.

נציב בביטוי $x=1$ ו-$y=1$ ונקבל: $\frac{x^2y+xy^2}{2x+2y}=\frac{1^2\cdot 1+1\cdot 1^2}{2\cdot 1+2\cdot 1}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

כלומר, כאשר $x=1$ ו-$y=1$ ערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{2}$.

כעת, נציב בתשובות $x=1$ ו-$y=1$ ונפסול את אלו שערכן אינו $\frac{1}{2}$:

תשובה (1): $x+y=1+1=2$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $x^2+y^2=1^2+1^2=1+1=2$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $xy=1\cdot 1=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{xy}{2}=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - גורם משותף

$\frac{12a-3b}{2b-8a}=?$, $b\neq 4a$

(1) 8 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) 5 (4) $4\frac{1}{2}$

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

הנעלם a בסימן חיובי במונה, ואילו בסימן שלילי במכנה. באופן דומה, הנעלם b בסימן שלילי במונה, ואילו בסימן חיובי במכנה. לפיכך, עלינו להוציא גורם משותף שלילי במונה, ואילו גורם משותף חיובי במכנה או להפך. נוציא גורם משותף -3 במונה, ואילו 2 במכנה: $\frac{12a-3b}{2b-8a}=\frac{-3(-4a+b)}{2(b-4a)}$.

הביטויים בסוגריים זהים, ולכן ניתן לצמצם אותם: $\frac{-3(\cancel{-4a+b})}{2(\cancel{b-4a})}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$.

דרך ב' - הצבת מספרים:

אחת מהתשובות היא ערכו של הביטוי לאחר פישוט, ועל כן ניתן להציב מספרים נוחים.

נציב בביטוי $a=1$ ו- $b=2$: $\frac{12a-3b}{2b-8a}=\frac{12\cdot1-3\cdot2}{2\cdot2-8\cdot1}=\frac{12-6}{4-8}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$.

התשובה היחידה שערכה הוא $-\frac{3}{2}$ היא (2).

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - גורם משותף

$\left(\frac{3}{2^9+2^{10}}\right)^{-1}=?$

(1) 2^9 (2) 2^{10} (3) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ (4) $-\frac{3}{2^{19}}$

פתרון

על פי חוק החזקות $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, ניתן להציג את הביטוי כך: $\left(\frac{3}{2^9+2^{10}}\right)^{-1}=\left(\frac{2^9+2^{10}}{3}\right)^1=\frac{2^9+2^{10}}{3}$.

כדי להיפטר מ-3, נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר, כך שנישאר עם הערך הקטן ביותר בסוגריים.

הגורם המשותף הגדול ביותר הוא 2^9, ולאחר הוצאה שלו נקבל: $\frac{2^9+2^{10}}{3}=\frac{2^9(1+2)}{3}=\frac{2^9(\cancel{3})}{\cancel{3}}=2^9$.

התשובה הנכונה היא (1).

מכנה משותף

הטכניקה בה נעסוק כעת היא יצירת **מכנה משותף**.
בשאלות מסוימות יהיה עלינו לחבר או לחסר בין שברים, אך הם יהיו מורכבים מעט יותר משברים פשוטים ובחלק מהמקרים יכילו נעלמים. כדי שנוכל לחבר או לחסר בין השברים על המכנים שלהם להיות זהים, וכדי שהם יהיו זהים יהיה עלינו להביאם למכנה משותף.

כאשר השברים לא כוללים נעלמים, מציאת המכנה המשותף שלהם יחסית פשוטה - או שמוצאים מספר שמתחלק בשניהם או שמבצעים ביניהם כפל. כאשר השברים כוללים נעלמים, המצב מעט מורכב יותר, אך גם איתו נלמד להתמודד.

<u>לדוגמה:</u>

$a \neq 0$, $\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a^2}=?$

שימו לב כי על מכנה משותף להכיל את כל האיברים מכל המכנים בתרגיל.
בדוגמה הזו, על המכנה להכיל את 4 ואת a^2.
לפיכך, המכנה המשותף שאליו נביא הוא: $4a^2$.
משמצאנו את המכנה המשותף, עלינו לשאול את עצמנו באיזה ערך יש לכפול את המכנה של כל אחד מהשברים כדי להביא למכנה המשותף, ולאחר שמצאנו את הערך הזה - **לכפול בו את המכנה ואת המונה**.

אם כן, כדי להגיע מ-$4a$ ל-$4a^2$ עלינו לכפול ב-a: $4a \cdot a = 4a^2$.
כדי להגיע מ-$2a^2$ ל-$4a^2$ עלינו לכפול ב-2: $2a^2 \cdot 2 = 4a^2$.
לאור האמור לעיל: $\frac{a+2}{4a^2}=\frac{2}{4a^2}+\frac{a}{4a^2}=\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2a^2}+\frac{a}{a}\cdot\frac{1}{4a}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{4a}$.
חשוב לציין כי הכפל שביצענו לא השפיע על ערכו של הביטוי, שהרי את שני השברים כפלנו ב-1.
את השבר השמאלי כפלנו ב- $1=\frac{a}{a}$, ואת השבר הימני ב- $1=\frac{2}{2}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$a,b \neq 0$, $\frac{3}{2ab}+\frac{2}{a^2}=?$

בדוגמה הזו, על המכנה להכיל את 2, את a^2 ואת b.
לפיכך, המכנה המשותף שאליו נביא הוא: $2a^2b$.
כעת, נבדוק באיזה ערך יש לכפול כל אחד מהשברים כדי להגיע למכנה המשותף שמצאנו.
כדי להגיע מ-$2ab$ ל-$2a^2b$ עלינו לכפול ב-a: $2ab \cdot a = 2a^2b$.
כדי להגיע מ-a^2 ל-$2a^2b$ עלינו לכפול ב-$2b$: $a^2 \cdot 2b = 2a^2b$.
לאור האמור לעיל: $\frac{3a+4b}{2a^2b}=\frac{4b}{2a^2b}+\frac{3a}{2a^2b}=\frac{2b}{2b}\cdot\frac{2}{a^2}+\frac{a}{a}\cdot\frac{3}{2ab}=\frac{2}{a^2}+\frac{3}{2ab}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$$x,y,z \neq 0\ ,\ \frac{3}{xyz}+\frac{12}{2x^2}=?$$

בדוגמה הזו, על המכנה להכיל את x^2, את y, את z ואת 2.

לפיכך, המכנה המשותף שאליו נביא הוא: $2x^2yz$.

כעת, נבדוק באיזה ערך יש לכפול כל אחד מהשברים כדי להגיע למכנה המשותף שמצאנו.

כדי להגיע מ-xyz ל- $2x^2yz$ עלינו לכפול ב-$2x$: $xyz\cdot 2x=2x^2yz$.

כדי להגיע מ- $2x^2$ ל- $2x^2yz$ עלינו לכפול ב-yz: $2x^2\cdot yz=2x^2yz$.

לאור האמור לעיל: $\frac{3}{xyz}+\frac{12}{2x^2}=\frac{3}{xyz}\cdot\frac{2x}{2x}+\frac{12}{2x^2}\cdot\frac{yz}{yz}=\frac{6x}{2x^2yz}+\frac{12zy}{2x^2yz}=\frac{6x+12zy}{2x^2yz}$.

שימו לב כי בדוגמה הזו, ניתן היה לצמצם את 12 ב-2 בשבר הימני ($\frac{12}{2x^2}$) לפני שהבאנו למכנה המשותף.

כמו כן ניתן היה לצמצם אותו לאחר שהבאנו למכנה המשותף על ידי הוצאת גורם משותף 2 במונה:

$$\frac{6x+12zy}{2x^2yz}=\frac{\cancel{2}(3x+6zy)}{\cancel{2}x^2yz}=\frac{3x+6zy}{x^2yz}.$$

כך או כך, הביטוי שמתקבל לאחר הפישוט **זהה**.

שאלה לדוגמה - מכנה משותף

$\frac{2x(2y+1)}{2xy}-2=?$, $x,y\neq 0$

(1) x (2) y (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{1}{y}$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

המכנה של 2- הוא 1, ולכן המכנה המשותף לשני השברים הוא מכנה השבר השמאלי: $2xy$.

כדי להגיע מ-1 (המכנה של 2-) ל-$2xy$ עלינו לכפול ב-$2xy$: $\frac{2x(2y+1)}{2xy}-2\cdot\frac{2xy}{2xy}=\frac{2x(2y+1)}{2xy}-\frac{4xy}{2xy}$.

כעת, נבצע את הכפל במונה השבר השמאלי: $\frac{2x(2y+1)}{2xy}-\frac{4xy}{2xy}=\frac{4xy+2x}{2xy}-\frac{4xy}{2xy}$.

לשני השברים מכנה זהה, ועל כן ניתן לחסר ביניהם: $\frac{4xy+2x}{2xy}-\frac{4xy}{2xy}=\frac{4xy+2x-4xy}{2xy}=\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}y}=\frac{1}{y}$.

<u>שימו לב!</u> ניתן היה לצמצם את $2x$ לפני יצירת המכנה המשותף: $\frac{\cancel{2x}(2y+1)}{\cancel{2x}y}-2=\frac{2y+1}{y}-2$.

במצב הזה, המכנה המשותף הוא y. אם כן, כדי להגיע מ-1 (המכנה של 2-) ל-y עלינו לכפול ב-y: $\frac{2y+1}{y}-2\cdot\frac{y}{y}=\frac{2y+1}{y}-\frac{2y}{y}$. לשני השברים מכנה זהה, ועל כן ניתן לחסר ביניהם:

$\frac{2y+1}{y}-\frac{2y}{y}=\frac{2y+1-2y}{y}=\frac{1}{y}$.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>

נציב בביטוי $y=2$ ו-$x=1$ ונקבל: $\frac{2x(2y+1)}{2xy}-2=\frac{2\cdot1(2\cdot2+1)}{2\cdot1\cdot2}-2=\frac{\cancel{2}\cdot5}{{}_{2}\cancel{4}}-2=2\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$.

כעת, נציב $y=2$ ו-$x=1$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו $\frac{1}{2}$:

תשובה (1): $x=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $y=2$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

פירוק מונים

הטכניקה הבאה בה נעסוק היא **פירוק מונים**. הפעולה הזו היא, למעשה, פעולה הפוכה ליצירת מכנה משותף.
בשאלות מסוימות, ייתכן שהפתרון אליו נגיע לאחר פישוט הוא לא הפתרון אשר מופיע בתשובות, וזאת משום שעלינו לפרק מונים. כמו כן ייתכן שפירוק מונים הוא הפעולה היחידה שנצטרך לבצע כדי להגיע לתשובה הנכונה.

פירוק מונים פירושו חלוקה של כל אחד מהגורמים במונה בגורם במכנה.

<u>לדוגמה:</u>

$\frac{a+2}{4a^2}=?$, $a\neq 0$. משמעות התרגיל הזה היא חלוקה של a ב- $4a^2$ ועוד חלוקה של 2 ב- $4a^2$.

כלומר: $\frac{a+2}{4a^2}=\frac{\cancel{a}}{4a^{\cancel{2}}}+\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}^{2}\cancel{4}a^2}=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a^2}$.

מי מכם שהביטוי נראה לו מוכר - זו הדוגמה הראשונה לה יצרנו מכנה משותף בחלק הקודם של השיעור.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$\frac{x^2z+2z+xz}{xz}=?$, $x,z\neq 0$

לאחר ביצוע פירוק מונים: $\frac{x^2z+2z+xz}{xz}=\frac{x^2z}{xz}+\frac{2z}{xz}+\frac{xz}{xz}$.

לאחר צמצום: $\frac{x^{\cancel{2}}\cancel{z}}{\cancel{xz}}+\frac{2\cancel{z}}{x\cancel{z}}+\frac{\cancel{xz}}{\cancel{xz}}=x+\frac{2}{x}+1$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$\frac{3x+12+3(x-2)}{6}=?$

לאחר ביצוע פירוק מונים: $\frac{3x+12+3(x-2)}{6}=\frac{3x}{6}+\frac{12}{6}+\frac{3(x-2)}{6}$.

לאחר צמצום: $\frac{{}^{1}\cancel{3}x}{{}^{2}\cancel{6}}+\frac{12}{6}+\frac{{}^{1}\cancel{3}(x-2)}{{}^{2}\cancel{6}}=\frac{x}{2}+2+\frac{(x-2)}{2}=\frac{x}{2}+2+\frac{x}{2}-\frac{2}{2}=x-1$.

שאלה לדוגמה - פירוק מונים

$\frac{16a+7b}{56}=?$

(1) $\frac{2a+b}{7}$ (2) $\frac{2a}{7}+\frac{b}{8}$ (3) $\frac{4a+b}{19}$ (4) $\frac{a}{7}+\frac{2b}{8}$

<u>פתרון</u>

משום של-16 ול-7 אין מחלק משותף, ניתן להסיק כי לא ניתן להוציא גורם משותף במונה ושיש לבצע פירוק מונים:
$\frac{16a+7b}{56}=\frac{16a}{56}+\frac{7b}{56}$. לאחר צמצום: $\frac{{}^{2}\cancel{16}a}{{}^{7}\cancel{56}}+\frac{{}^{1}\cancel{7}b}{{}^{8}\cancel{56}}=\frac{2a}{7}+\frac{b}{8}$.

התשובה הנכונה היא (2).

ביטויים שמכילים עצרת

המושג עליו נדבר בחלק הזה של השיעור הוא **עצרת**.
עצרת היא פעולה חשבונית אשר מסומנת על ידי סימן קריאה (!), ומשמעותה כפל של כלל המספרים השלמים מהערך שצמוד לסימן העצרת (!) ועד 1.

<u>לדוגמה:</u>
!5 פירושו מכפלת כלל המספרים השלמים מ-5 ועד 1: $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.
<u>דוגמה נוספת:</u>
!x פירושו מכפלת כלל המספרים השלמים מ-x ועד 1: $x!=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)...\cdot1$.

<u>מכיוון שסבירות הופעתם של הערכים הבאים גבוהה יותר, אנו ממליצים לזכור אותם בעל-פה:</u>

$1!=1$

$2!=2\cdot1=2$

$3!=3\cdot2\cdot1=6$

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

כאשר יופיע ערך בעצרת אשר גדול מהערכים המופיעים לעיל, לרוב, ניתן יהיה לצמצם אותו.

כעת, נעבור למספר דוגמאות בהן נתונים ביטויים בעצרת אשר ניתן לפשט:

1. $\frac{x!}{x}$ - הביטוי במונה פירושו מכפלת כלל המספרים השלמים מ-x ועד 1 ולכן:
$\frac{x!}{x}=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)...\cdot1}{x}$. לאחר שנצמצם את x נקבל:
$\frac{\cancel{x}(x-1)(x-2)(x-3)...\cdot1}{\cancel{x}}=(x-1)(x-2)(x-3)...\cdot1$.
הביטוי שהתקבל הוא מכפלת כל המספרים השלמים מ- $(x-1)$ ועד 1, ובמילים אחרות: $(x-1)!$.

2. $13\cdot12!$ - למעשה, הביטוי הזה הוא מכפלת כל המספרים מ-12 ועד 1 ב-13: $13\cdot1\cdot...\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12$.
היות שאין חשיבות לסדר האיברים בכפל, ניתן לכתוב את הביטוי כך: $1\cdot...\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13$.
הביטוי שהתקבל הוא מכפלת כלל המספרים השלמים מ-13 ועד 1, ובמילים אחרות: $13!$.

3. $(x+1)\cdot x!$ - !x פירושו מכפלת כלל המספרים השלמים מ-x ועד 1 ולכן:
$(x+1)\cdot x!=(x+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)...\cdot1$.
הביטוי שהתקבל הוא מכפלת כל המספרים השלמים מ- $(x+1)$ ועד 1, ובמילים אחרות: $(x+1)!$.

שאלה לדוגמה - ביטויים שמכילים עצרת

$\frac{9!}{7!} = ?$

(1) 42
(2) 56
(3) 72
(4) 96

<u>**פתרון**</u>

מונה הביטוי הוא מכפלת כלל המספרים השלמים מ-9 ועד 1, ואילו מכנה הביטוי הוא מכפלת כל המספרים מ-7 ועד 1.

לפיכך: $\frac{9!}{7!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$.

לאחר צמצום: $\frac{9\cdot8\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 9\cdot8 = 72$.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. **מבוא לביטויים והצבת מספרים:**

- ביטוי - צירוף של מספרים ו\או אותיות הקשורים ביניהם באמצעות פעולות חשבון.
- הבחינה הפסיכומטרית היא "אמריקאית", ולכן כאשר נתבקש לפשט ערך של ביטוי אשר כולל נעלמים, תהיה תשובה אחת נכונה בלבד. כלומר, רק תשובה אחת תהיה פישוט נכון של הביטוי.
  לפיכך, כאשר נציב מספרים במקום נעלמים בביטוי ונקבל ערך מסוים, אותו ערך בהכרח יתקבל גם כאשר נציב את אותם מספרים בתשובה הנכונה.
  עם זאת, ייתכן שבהצבה מסוימת יתקבל, במקרה, ערך זהה ביותר מתשובה אחת.
  ולכן כאשר אנו מציבים מספרים, עלינו **לפסול** 3 תשובות.

2. **פישוט ביטוי על ידי פתיחת סוגריים:**

נזכיר כי כאשר אנו מבצעים כפל בין איברים בסוגריים, עלינו לכפול את כל האיברים בסוגריים בכל אחד מהאיברים בסוגריים האחרים.

לדוגמה:

$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

3. **פישוט ביטוי על ידי הוצאת גורם משותף:**

בשאלות מסוימות נידרש להוציא גורם משותף על מנת לפשט את הביטוי.

כאשר אנו מוציאים גורם משותף ישנן מספר אפשרויות לעשות כן:

- להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר, כך שבסוגריים יישאר הביטוי בעל הערך הקטן ביותר.
- להוציא גורם משותף **זהה** במונה ובמכנה, לאו דווקא הגדול ביותר אשר מתאפשר.
- להוציא גורם משותף אשר יביא למצב בו בתוך הסוגריים במונה ובמכנה יוותר ביטוי **זהה**.

4. **מכנה משותף:**

כדי שנוכל לחבר או לחסר בין שברים, עלינו לוודא שלכולם מכנה משותף.

אם אין להם מכנה משותף, נעבור על כל המכנים בתרגיל ונמצא אותו.

5. **פירוק מונים:**

לעתים, כדי להגיע לתשובה נכונה נצטרך לבצע פירוק מונים. פירוק מונים פירושו חלוקה של כל אחד מהגורמים במונה בגורם במכנה.

לדוגמה:

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

6. **ביטויים שמכילים עצרת:**

כאמור, עצרת היא פעולה חשבונית אשר מסומנת על ידי סימן קריאה (!), ומשמעותה כפל של כלל המספרים השלמים מהערך שצמוד לסימן העצרת (!) ועד 1.

כאשר ניתקל בביטוי אשר מכיל את סימן העצרת, נפרק אותו למכפלה, וכך עשוי לעלות הסיכוי לזהות את הצמצום שאותו נידרש לעשות כדי להגיע לפתרון.

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!