בעיות כמותיות

בעיות יחס

בעיות יחס

יחס כשבר

<u>מבוא</u>

יחס בין גורמים או בין קבוצות הוא מושג שכיח במגוון סוגי שאלות כגון: בעיות הספק, תנועה, ממוצע ועוד.

מסיבה זו הוא נלמד ראשון, כמבוא נחוץ ללמידת בעיות כמותיות מסוגים אחרים.

את השיעור נתחיל בקביעה בסיסית מאוד - יחס הוא בסך הכל צורת הצגה של שבר.

<u>לדוגמה:</u>

נתון לנו שהיחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה מסוימת הוא 2:3.

✓ **כלל:** מאחר שמספרים קוראים משמאל לימין, המספר השמאלי (2) מתייחס לנתון שהופיע קודם - מספר הבנים בכיתה, והמספר הימני (3) מתייחס לנתון שהופיע לאחר מכן - מספר הבנות בכיתה.

כניסה	מספר הבנים	הפרש	מספר הבנות	סכום התלמידים
1	2	1	3	5
2	4	2	6	10
3	6	3	9	15

כמו כן, מיחס נתון **לא** ניתן להסיק לגבי גודל ממשי, כלומר מספר הבנים והבנות האמיתי בכיתה.
ניתן להסיק אך ורק שבכיתה המסוימת הזו, על כל 2 בנים ישנן 3 בנות.

לצורך העניין, אם הכיתה הזו הייתה ריקה מתלמידים והיה בכניסה שומר אשר קיבל הוראה להכניס לכיתה 3 בנות על כל 2 בנים שהוא מכניס, הוא היה מכניס 2 בנים ומיד לאחר מכן 3 בנות, ומספר התלמידים בכיתה היה 5.
אם השומר היה מאפשר כניסה נוספת של תלמידים, היו בכיתה 4 בנים ו-6 בנות, ובסה"כ 10 תלמידים.
אם השומר היה מאפשר כניסה נוספת של תלמידים, היו בכיתה 6 בנים ו-9 בנות, ובסה"כ 15 תלמידים.
נציג את הנתונים שהצגנו לעיל בטבלה (שימו לב כי הוספנו את ההפרש בין מספר הבנות למספר הבנים בכיתה לאחר כל כניסה).

נחזור לקביעה שאיתה התחלנו את השיעור - יחס הוא בסך הכל צורת הצגה של שבר.

אם היינו נשאלים לכמה שווה מספר הבנים בכיתה מתוך מספר הבנות בכיתה לאחר הכניסה הראשונה, היה עלינו לחלק את מספר הבנים במספר הבנות, כלומר: $\frac{2}{3}$.

לאחר הכניסה השנייה: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. לאחר הכניסה השלישית: $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$.

זו הסיבה שבגינה קבענו שיחס הוא צורת הצגה של שבר, ומכאן שניתן לצמצם ולהרחיב אותו כאוות נפשנו.

כלומר, אם נמשיך להכניס לכיתה הזו תלמידים על פי היחס, לא משנה כמה, הוא יישאר 2:3 - או לחלופין $\frac{2}{3}$.

אגב, שימו לב כי מספר הבנות בכיתה גדול ממספר הבנים בכיתה פי ערך קבוע - 3 גדול מ-2 פי 1.5 בדיוק כשם ש-6 גדול פי 1.5 מ-4 וכפי ש-9 גדול פי 1.5 מ-6.

בדומה לכך, ניתן לקבוע שמספר הבנים בכיתה מתוך מספר התלמידים הכולל, כלומר היחס ביניהם הוא קבוע וערכו ($\frac{2}{5}$),

שכן $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$.

כמו כן, מספר הבנות בכיתה מתוך מספר התלמידים הכולל, כלומר היחס ביניהם קבוע גם הוא וערכו ($\frac{3}{5}$),

שכן $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}$.

לסיכום החלק הזה של השיעור, נדגיש שתי נקודות חשובות:

1. יחס הוא בסך הכל **צורת הצגה של שבר**.
2. מיחס נתון **לא** ניתן להסיק לגבי גדלים ממשיים. ראינו זאת בדוגמות השונות, כל הנתונים השתנו (מספר הבנות, מספר הבנים, סך כל התלמידים וכו'), אך היחס **נשאר קבוע**.

שאלה לדוגמה - יחס כשבר

היחס $a:2$ שווה ליחס $(a-3):1$.

$\frac{a}{3}=?$

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

<u>פתרון</u>

אנו יודעים כי יחס הוא בסך הכול צורת הצגה של שבר. לפיכך, נוכל להציג כל אחד מהיחסים הנתונים בשאלה כשבר וליצור משוואה (יש לשים לב לסדר הגורמים - אם קבענו שהגורם השמאלי ביחס הראשון הוא המונה, על הגורם השמאלי ביחס השני להיות המונה גם כן. בהחלט ניתן לפתור את השאלה גם הפוך):

$\frac{a-3}{1}=\frac{a}{2}$. נכפול בהצלבה ונקבל: $a=2\cdot(a-3)$. נבצע את הכפל באגף הימני של המשוואה: $a=2a-6$.

נעביר אגפים: $a=6$. כעת, נציב את הערך של a בביטוי שנתבקשנו למצוא:

$2=\frac{6}{3}=\frac{a}{3}$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - יחס כשבר

מספר הילדים של עמי שווה ל- $\frac{1}{5}$ ממספר הילדים של תמי.

מה מהבאים **אינו** יכול להיות מספר הילדים הכולל של עמי ותמי?

(1) 12

(2) 16

(3) 18

(4) 24

פתרון

אנו יודעים כי ניתן להציג יחס כשבר, וכמובן שגם להפך. כלומר, מהנתון שמספר הילדים של עמי שווה ל- $\frac{1}{5}$ ממספר הילדים של תמי, ניתן לקבוע כי היחס בין מספר הילדים שלהם הוא 1:5.

מכאן שאם לעמי ילד 1, לתמי 5 ילדים ומספר הילדים הכולל שלהם הוא 6.

אם לעמי 2 ילדים, לתמי 10 ילדים ומספר הילדים הכולל שלהם הוא 12 וכך הלאה.

נציג את הנתונים בטבלה:

מספר הילדים של עמי	מספר הילדים של תמי	מספר הילדים הכולל
1	5	6
2	10	12
3	15	18
4	20	24

ניתן לשים לב כי מספר הילדים הכולל גדל בכל פעם ב-6, כלומר הוא כפולה של 6 ועל כן גם מתחלק ב-6.
המספר היחיד בתשובות ש**אינו** מתחלק ב-6 הוא 16.
התשובה הנכונה היא (2).

הרחבה וצמצום של יחס

בשיעור הקודם קבענו שמיחס נתון לא ניתן להסיק לגבי גדלים ממשיים. אולם, אם נתון לנו גודל ממשי כלשהו ניתן יהיה להסיק ממנו לגבי יתר הגורמים. ניקח את הדוגמה מהשיעור הקודם כדי להסביר את האמור לעיל.

<u>לדוגמה:</u>
נתון לנו שהיחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה מסוימת הוא $2:3$.
כמו כן, נתון לנו שמספר הבנות בכיתה הוא 21.

על פי הקביעה מהשיעור הקודם לפיה - יחס הוא בסך הכול צורת הצגה של שבר - ניתן להרחיב או לצמצם את היחס כרצוננו.
בדוגמה הזו, בכדי להגיע מהערך אשר מייצג את הבנות ביחס (3) לגודל הממשי (21), עלינו לכפול את הערך ביחס פי 7, שכן $3\cdot 7=21$.
חשוב לשים לב, כאשר אנו מרחיבים שבר אנו כופלים הן את המונה והן את המכנה באותו ערך, ועל כן יש לכפול גם את הערך שמייצג את הבנים בכיתה ביחס (2) פי 7: $2\cdot 7=14$.

באותו אופן, מהגודל הממשי הנתון לנו ניתן למצוא את ההפרש בין מספר הבנות בכיתה למספר הבנים בכיתה.
כלומר, אם נחסר את הערך אשר מייצג את מספר הבנים בכיתה ביחס (2) מהערך אשר מייצג את מספר הבנות בכיתה ביחס (3), נקבל 1. כעת, אם נכפול את 1 פי 7, נקבל את ההפרש האמיתי בין מספר הבנות בכיתה למספר הבנים בכיתה.

בצורה דומה, אם היינו רוצים למצוא את מספר התלמידים הכולל בכיתה, היינו יכולים לחבר את הערך אשר מייצג את מספר הבנים ביחס (2) עם הערך אשר מייצג את מספר הבנות ביחס (3) ואת הסכום לכפול ב-7:
$5\cdot 7=35$.
נסכם את כל האמור מעלה בטבלה:

	בנים	הפרש	בנות	סכום	
כפלנו פי 7	2	1	3	5	כפלנו פי 7
	14	7	21	35	

שימו לב שבאמצעות היחס הנתון, ניתן היה למצוא את כל הגדלים הממשיים גם אילו היה נתון לנו גודל ממשי אחר, למשל מספר התלמידים הכולל.

<u>לדוגמה:</u>
נתון לנו שהיחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות בכיתה הוא $2:3$.
כמו כן, נתון לנו שמספר התלמידים הכולל בכיתה הוא 25.
אם נחבר את הערכים אשר מייצגים את מספר הבנים והבנות ביחס נקבל: $2+3=5$.
בכדי להגיע מ-5 ל-25, עלינו לכפול ב-5 וכך יש לעשות בכדי לגלות את שאר הגדלים הממשיים.
נציג את הנתונים הללו בטבלה הבאה:

	בנים	הפרש	בנות	סכום	
כפלנו פי 5	2	1	3	5	כפלנו פי 5
	10	5	15	25	

לאור כל האמור לעיל אנו למדים כי כאשר נתון לנו יחס, וכן נתון לנו **גודל ממשי** כלשהו,
לא משנה איזה - גודל אחת הקבוצות, הסכום או ההפרש ביניהן - אנו יכולים למצוא את כל הגדלים הממשיים האחרים.

שאלה לדוגמה - הרחבה וצמצום של יחס

מספר הבנים בכיתה מסוימת קטן פי 4 ממספר הבנות בכיתה.
ההפרש בין מספר הבנות למספר הבנים בכיתה הוא 9.

כמה ילדים יש בסך הכל בכיתה?

(1) 15

(2) 16

(3) 24

(4) 25

<u>פתרון</u>

מספר הבנים בכיתה קטן פי 4 ממספר הבנות, כלומר על כל בן 1 בכיתה, ישנן 4 בנות. מכאן שהיחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות בכיתה הוא 1:4.
אם נחסר את הערך שמייצג את מספר הבנים בכיתה ביחס (1) מהערך שמייצג את מספר הבנות בכיתה ביחס (4) נקבל 3.
כמו כן, נתון לנו ההפרש בין מספר הבנות בכיתה למספר הבנים בכיתה, כלומר הגודל הממשי - 9.
בכדי להגיע לכמות זו, עלינו להרחיב את היחסים פי 3. עלינו לזכור שנתבקשנו למצוא את סך התלמידים בכיתה, ולכן עלינו לחבר את הערך אשר מייצג את מספר הבנים בכיתה ביחס (1) עם הערך אשר מייצג את מספר הבנות בכיתה ביחס (4) ואת הסכום לכפול ב-3 גם כן: $5 \cdot 3 = 15$.
נציג את הנתונים בטבלה הבאה:

	בנים	הפרש	בנות	סכום	
כפלנו פי 3	1	3	4	5	כפלנו פי 3
	3	9	12	15	

התשובה הנכונה היא (1).

פתרון יחס בנעלמים

ראינו עד כה (באמצעות הטבלאות) שכל עוד אנו יודעים גודל ממשי כלשהו, אנו יודעים להסיק ממנו ומהיחס הנתון לגבי שאר הגדלים הממשיים. נציג עתה דרך נוספת להתמודד עם בעיות יחס למי שפחות נוח לו לעבוד עם הטבלה.

<u>לדוגמה:</u>
נתון לנו שהיחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה מסוימת הוא 2:3.
כמו כן, נתון לנו שמספר הבנים בכיתה הוא 18.

כבר למדנו שמהיחס הנתון ניתן להסיק כי מספר הבנים בכיתה הוא כפולה של 2, ואילו מספר הבנות בכיתה הוא כפולה של 3. לפיכך, ניתן לסמן את מספר הבנים בכיתה ב-$2x$, ואילו את מספר הבנות בכיתה ב-$3x$.

לאחר שסימנו את מספר הבנים בכיתה ב-$2x$ ונתון לנו כי ערך זה שווה ל-18, ניתן ליצור משוואה בנעלם אחד ולפתור אותה: $2x = 18$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x = 9$.
שימו לב: x הוא למעשה הערך שבו כפלנו את היחסים בטבלה בשני השיעורים הקודמים.

בדומה לעבודה עם הטבלה, כאשר נתון לנו גודל ממשי של אחד הגורמים בשאלה, אנו יכולים למצוא את ערכו של x ולהשתמש בו על מנת למצוא את הגדלים הממשיים האחרים.

בדוגמה הזו, אם נחבר את מספר הבנים בכיתה ($2x$) למספר הבנות בכיתה ($3x$), נקבל את סך התלמידים בכיתה - כלומר $5x$. נציב $x = 9$ ונקבל: $5x = 5 \cdot 9 = 45$.

באותו אופן, יכולנו למצוא את ההפרש בין מספר הבנות בכיתה למספר הבנים בכיתה.
נחסר את מספר הבנים ($2x$) ממספר הבנות ($3x$) ונקבל x. אנו יודעים כי $x = 9$ ולכן זה ההפרש.

נסכם את שתי הטכניקות שאותן למדנו עד כה:

1. **עבודה עם טבלה** - נציג את היחס הנתון בטבלה ובאמצעות גודל ממשי נתון, נמצא פי כמה הרחבנו את היחס כדי להגיע לגודל הממשי. כאשר אנו מוצאים את הערך שבו הרחבנו את היחס, נוכל למצוא את כל הגדלים הממשיים האחרים.
2. **סימון ב-x** - נסמן את אחד הגורמים בשאלה ב-x ואותו נשווה לגודל הממשי הנתון. כאשר נמצא את ערכו של x נוכל למצוא את כל הגדלים הממשיים האחרים.

שאלה לדוגמה - פתרון יחס בנעלמים

היחס בין מספר זוגות המכנסיים למספר החולצות בארון הוא 3:10.
ההפרש בין מספר החולצות למספר זוגות המכנסיים בארון הוא 42.

כמה זוגות מכנסיים יש בארון?

(1) 18

(2) 21

(3) 9

(4) 24

<u>פתרון</u>
על פי היחס, נסמן את מספר המכנסיים בארון ב-$3x$, ואילו את מספר החולצות נסמן ב-$10x$.
נחסר ביניהם ונקבל: $10x - 3x = 7x$. נשווה את $7x$ (ההפרש ביחס) להפרש הממשי הנתון: $7x = 42$.
לאחר מכן, נחלק את שני האגפים ב-7 ונקבל: $x = 6$. כעת, נציב את הערך שמצאנו בביטוי שמייצג את מספר המכנסיים: $3x = 3 \cdot 6 = 18$.
התשובה הנכונה היא (1).

יחס משתנה, שינויים ביחס

בשיעור זה נלמד על שאלות מסוג יחס משתנה.

לרוב, בשאלות הללו מעורבים שלושה גורמים: היחס ההתחלתי, השינוי ביחס והיחס החדש.

<u>לדוגמה:</u>

היחס בין מספר החולצות של טלי למספר החצאיות שלה הוא 3:1.

אם טלי תקנה עוד 6 חצאיות, היחס בין מספר החולצות למספר החצאיות יהיה 1:1.

לרוב, שאלות מסוג זה נוח לפתור בשתי דרכים:

1. **<u>בניית משוואה:</u>**

מהיחס ההתחלתי אנו יודעים כי מספר החולצות של טלי גדול פי 3 ממספר החצאיות שלה, ולכן ניתן לסמן את מספר החולצות שלה ב-$3x$ ואת מספר החצאיות שלה ב-x.

נתון לנו שאם טלי תקנה 6 חצאיות נוספות, היחס יהיה 1:1, כלומר הכמויות יהיו שוות.

לפיכך, נוסיף 6 למספר החצאיות ונשווה כמות זו למספר החולצות:

$x + 6 = 3x$. לאחר מכן, נעביר את x אגף: $2x = 6$. לאחר מכן, נחלק ב-2 את שני אגפי המשוואה ונקבל: $x = 3$. כעת, עלינו לשים לב מה ביקשו מאיתנו למצוא - את מספר החצאיות או את מספר החולצות - ולהציב את ערכו של x בביטוי המייצג את הגורם המתאים.

ניתן היה לפתור את התרגיל באמצעות עקרון דומה, אך בדרך מעט שונה.

כאשר נציג את הנתונים בטבלה, נראה שההפרש בין מספר החולצות של טלי למספר החצאיות שלה הוא $2x$, ואילו הסכום הוא $4x$:

חולצות	הפרש	חצאיות	סכום
$3x$	$2x$	x	$4x$

נתון לנו שאם טלי תקנה 6 חצאיות נוספות, מספר החולצות שלה יהיה שווה למספר החצאיות שלה.

מכאן ניתן להסיק כי ההפרש בין החולצות לחצאיות הוא 6. כעת, נוכל להשוות את הביטוי המייצג את ההפרש ($2x$) להפרש הממשי, כלומר 6: $2x = 6$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2: $x = 3$.

על כל פנים, הגענו לכך ש- $x = 3$.

2. **<u>בדיקת תשובות:</u>**

לצורך הדוגמה, אילו היו ניתנות לנו ארבע תשובות אפשריות אשר כל אחת מהן מייצגת את מספר החולצות של טלי, היינו יכולים להשתמש בהן כדי לבדוק מי מהן מקיימת את הנתונים (נזכיר שהיחס בין מספר החולצות למספר החצאיות הוא 3:1, וכן שלאחר קנייה של 6 חצאיות היחס הוא 1:1):

(1) 3
(2) 6
(3) 9
(4) 12

תשובה (1): אם מספר החולצות של טלי הוא 3, מספר החצאיות שלה הוא 1. לאחר קניית של 6 חצאיות, יהיו לה 7 חצאיות ו-3 חולצות. הערכים אינם שווים ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם מספר החולצות של טלי הוא 6, מספר החצאיות שלה הוא 2. לאחר קניית של 6 חצאיות, יהיו לה 8 חצאיות ו-6 חולצות. הערכים אינם שווים ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (3): אם מספר החולצות של טלי הוא 9, מספר החצאיות שלה הוא 3. לאחר קניית של 6 חצאיות, יהיו לה 9 חצאיות ו-9 חולצות. הערכים שווים ועל כן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): אם מספר החולצות של טלי הוא 12, מספר החצאיות שלה הוא 4. לאחר קניית של 6 חצאיות, יהיו לה 10 חצאיות ו-12 חולצות. הערכים אינם שווים ועל כן התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה לדוגמה - יחס משתנה, שינויים ביחס

מספר הצלחות במטבח של אורן שווה ל- $\frac{3}{8}$ ממספר הכוסות במטבח.

לאחר שאורן שבר 4 כוסות יש במטבח פי 2 יותר כוסות מצלחות.

מה מספר הצלחות במטבח של אורן?

(1) 8

(2) 11

(3) 6

(4) 4

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - בניית משוואה:</u>

נסמן את מספר הכוסות ב-$8x$, זאת בכדי להימנע מעבודה עם שברים, ומכאן שמספר הצלחות שווה ל- $8x\cdot\frac{3}{8}=3x$.

אנו יודעים כי לאחר שנשברו 4 כוסות, מספרן היה גדול פי 2 ממספר הצלחות.

לפיכך, נחסר ממספר הכוסות 4 ונשווה את התוצאה למספר הצלחות כפול 2 (נשים לב שבכדי ליצור **משוואה**, עלינו לכפול את הערך **הקטן** יותר פי 2, כלומר "לתת למסכן"):

$8x-4=2\cdot3x$. נבצע את הכפל באגף הימני של המשוואה: $8x-4=6x$.

לאחר מכן, נעביר אגפים: $2x=4$. כעת, נחלק ב-2 ונקבל: $x=2$. עלינו לזכור שנתבקשנו למצוא את מספר הצלחות, ולכן להציב את ערכו של x בביטוי המייצג את מספר הצלחות: $3x=3\cdot2=6$.

<u>דרך ב' - בדיקת תשובות:</u>

התשובות מייצגות את מספר הצלחות במטבח, ולכן ניתן לבדוק איזו תשובה מקיימת את נתוני השאלה. מספר הצלחות במטבח של אורן שווה ל- $\frac{3}{8}$ ממספר הכוסות במטבח. לפיכך, בכדי לבצע מעבר ממספר הצלחות למספר הכוסות, נכפול בערך ההופכי של $\frac{3}{8}$, כלומר $\frac{8}{3}$. לאחר שנמצא את מספר הכוסות, נבדוק האם לאחר שבירה של 4 מהן, מספרן גדול פי 2 ממספר הצלחות:

תשובה (1): $8\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{3}$. התוצאה המתקבלת אינה מספר שלם ולכן לא יכולה לייצג את מספר הכוסות. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $11\cdot\frac{8}{3}=\frac{88}{3}$. התוצאה המתקבלת אינה מספר שלם ולכן לא יכולה לייצג את מספר הכוסות. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $6\cdot\frac{8}{3}=\frac{48}{3}=16$. נחסר 4 ממספר הכוסות ונקבל: $16-4=12$. 12 אכן גדול פי 2 מ-6. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $4\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$. התוצאה המתקבלת אינה מספר שלם ולכן לא יכולה לייצג את מספר הכוסות. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - יחס משתנה, שינויים ביחס

במשמרת בוקר בבית חולים מסוים יש פי 3 יותר אחיות מרופאות.
בשעה 12 בצהריים מגיעות לבית החולים 2 רופאות נוספות ועוזבות את בית החולים 2 אחיות.
לאחר שינוי זה, בבית החולים יש פי 2 יותר אחיות מרופאות.

מה מספר הרופאות בבית החולים במשמרת **הבוקר**?

(1) 1

(2) 6

(3) 3

(4) 7

פתרון

דרך א' - בדיקת תשובות:

נשתמש בתשובות האפשריות ונבדוק איזו אחת מהן מקיימת את הנתונים.

תשובה (1): אם ישנה רופאה אחת במשמרת הבוקר, ישנן 3 אחיות. לאחר הגעה של 2 רופאות נוספות ישנן 3 רופאות. כמו כן, לאחר עזיבה של 2 אחיות ישנה אחות 1. $3 \cdot 2 \neq 1$ ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם ישנן 6 רופאות במשמרת הבוקר, ישנן 18 אחיות. לאחר הגעה של 2 רופאות נוספות ישנן 8 רופאות. כמו כן, לאחר עזיבה של 2 אחיות ישנן 16 אחיות. $8 \cdot 2 = 16$ ועל כן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): אם ישנן 3 רופאות במשמרת הבוקר, ישנן 9 אחיות. לאחר הגעה של 2 רופאות נוספות ישנן 5 רופאות. כמו כן, לאחר עזיבה של 2 אחיות ישנן 7 אחיות. $5 \cdot 2 \neq 7$ ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (4): אם ישנן 7 רופאות במשמרת הבוקר, ישנן 21 אחיות. לאחר הגעה של 2 רופאות נוספות ישנן 9 רופאות. כמו כן, לאחר עזיבה של 2 אחיות ישנן 19 אחיות. $9 \cdot 2 \neq 19$ ועל כן התשובה נפסלת.

דרך ב' - בניית משוואה:

נסמן את מספר הרופאות במשמרת הבוקר ב-x, ומכאן שמספר האחיות הוא $3x$. אנו יודעים כי הגיעו 2 רופאות ועזבו 2 אחיות. עוד אנו יודעים כי לאחר שינוי זה, מספר האחיות היה גדול פי 2 ממספר הרופאות. נשתמש בכל האמור לעיל על מנת ליצור משוואה (נשים לב כי בכדי ליצור שוויון עלינו לכפול את מספר הרופאות פי 2, ולא את מספר האחיות): $3x - 2 = 2 \cdot (x + 2)$.

נבצע את הכפל באגף ימין של המשוואה: $3x - 2 = 2x + 4$.

לאחר מכן, נעביר אגפים ונקבל: $x = 6$.

התשובה הנכונה היא (2).

יחס ישר לעומת יחס הפוך

בשיעור זה נדבר על המושג **יחס הפוך**. עד כה התייחסנו למושג **יחס ישר** בלבד, לפיו אם אנו מכפילים גורם אחד בערך מסוים, כך יש לעשות גם עבור הגורם השני.

למשל, אם נתון לנו היחס x:y ניתן לכפול פי 3 את שני הנעלמים ולהרחיב את היחס ל-3x:3y (ראו טבלה):

כפלנו פי 3	x	y	כפלנו פי 3
	$3x$	$3y$	

<u>לדוגמה:</u>

הדוגמאות הבאות הן מחיי היום-יום והן יערבו מחיר של מוצר, הכמות הנרכשת והמחיר שיהיה עלינו לשלם בסך הכול.

אורי מעוניין לרכוש 2 מסטיקים כאשר כל אחד מהם עולה 4 שקלים.

לצורך קנייה זו, אורי יצטרך לשלם 8 שקלים.

אם אורי רצה לרכוש כמות הגדולה פי 2, כלומר 4 מסטיקים, והמחיר עודנו 4 שקלים עבור כל מסטיק, אורי יצטרך לשלם 16 שקלים, שהם פי 2 יותר מ-8 שקלים.

מדוגמה זו אנו למדים שכל עוד המחיר של כל פריט נשאר זהה, ישנו **יחס ישר** בין ה**כמות** ל**מחיר הכולל** והדבר אינטואיטיבי למדי - אם נרצה לקנות יותר מוצרים הגיוני שנצטרך לשלם עבורם סכום גדול יותר.

אם אורי ירצה לרכוש כמות זהה של מסטיקים (4) ונתון שמחיר כל אחד מהם הוכפל, כלומר כעת הוא 8 שקלים, המחיר שיהיה עליו לשלם הוא: $4 \cdot 8 = 32$. כלומר, 32 שקלים, שהם מחיר גדול פי 2 מ-16 שקלים.

מדוגמה זו אנו למדים שכל עוד הכמות זהה, ישנו **יחס ישר** בין ה**מחיר של כל מוצר** ל**מחיר הכולל** והדבר אינטואיטיבי למדי גם כן - אם מחיר כל מוצר יעלה, הגיוני שנצטרך לשלם יותר בעבור קנייה זהה.

נסכם את כל האמור לעיל בטבלה הבאה:

מחיר כולל		כמות		מחיר מוצר	
8		2		4	
16	$\cdot 2$	4	$\cdot 2$	4	
32	$\cdot 2$	4		8	$\cdot 2$

במקרה של יחס הפוך, אם **נגדיל** את אחד הערכים פי 2, השני **יקטן** פי 2:

<u>לדוגמה:</u>

אם אורי מעוניין לקנות 4 מסטיקים ומחיר כל אחד מהם הוא 8 שקלים, הוא יצטרך לשלם 32 שקלים בסך הכול.

אם ידוע כי לאורי ישנם 32 שקלים בלבד, ונתון כי מחיר כל מסטיק עלה ל-16 שקלים, אורי יוכל לרכוש 2 מסטיקים בלבד, כלומר כמות אשר קטנה פי 2 מהכמות המקורית.

מדוגמה זו אנו למדים שכל עוד המחיר הכולל נשאר זהה, ישנו **יחס הפוך** בין **מחיר כל מוצר** ל**כמות** שניתן לקנות. נסכם את כל האמור לעיל בטבלה:

מחיר כולל	כמות		מחיר מוצר	
32	4		8	
32	2	קטנה פי 2	16	גדל פי 2

שאלה לדוגמה - יחס ישר לעומת יחס הפוך

מחיר לינה למשך 6 לילות במלון "חמישה כוכבים",
זהה למחיר הלינה למשך 9 לילות במלון "ארבעה כוכבים".

מה היחס בין מחיר 2 לילות במלון "חמישה כוכבים" למחיר 6 לילות במלון "ארבעה כוכבים"?

(1) $\frac{1}{3}$
(2) $\frac{2}{3}$
(3) $\frac{1}{2}$
(4) $\frac{1}{4}$

פתרון

דרך א' - שימוש ביחס הפוך:

מאחר שמתקיים שוויון בין המחיר הכולל, ניתן להסיק כי המחיר עבור כל לילה במלון "חמישה כוכבים" יקר יותר, שכן אנו מקבלים עבור אותו סכום מספר לילות קטן יותר. יתרה מכך, ניתן לקבוע שמתקיים בין כמות הלילות למחיר עבור כל לילה **יחס הפוך**. כלומר, היחס בין מספר הלילות במלון "חמישה כוכבים" למספר הלילות במלון "ארבעה כוכבים" הוא 6:9, ולכן היחס בין המחיר עבור כל לילה הוא 9:6.

לפיכך, נוכל לסמן את המחיר עבור כל לילה במלון "חמישה כוכבים" ב-$9x$, ואת המחיר עבור כל לילה במלון "ארבעה כוכבים" ב-$6x$. מכאן שמחיר 2 לילות במלון "חמישה כוכבים" הוא: $2 \cdot 9x = 18x$, ואילו מחיר 6 לילות במלון "ארבעה כוכבים" הוא: $6 \cdot 6x = 36x$ - והיחס ביניהם הוא: $\frac{18x}{36x} = \frac{1}{2}$.

דרך ב' - הצבת מספרים:

מאחר שהשאלה עוסקת ביחסים ניתן להציב מספר נוח אשר מקיים את נתוני השאלה. נציב במקום המחיר הכולל עבור הלינה בכל אחד מהמלונות 18 שקלים, שכן מדובר בגורם משותף של 6 ו-9. לפיכך, המחיר עבור כל לילה במלון "חמישה כוכבים" הוא: $\frac{18}{6} = 3$. כלומר, 3 שקלים. לעומת זאת, המחיר עבור כל לילה במלון "ארבעה כוכבים" הוא: $\frac{18}{9} = 2$. כלומר, 2 שקלים. כעת, נציב את הנתונים שמצאנו בשאלה. מחיר 2 לילות במלון "חמישה כוכבים" הוא: $2 \cdot 3 = 6$. כלומר, 6 שקלים. לעומת זאת, מחיר 6 לילות במלון "ארבעה כוכבים" הוא: $6 \cdot 2 = 12$. כלומר, 12 שקלים. לפיכך, היחס בין המחירים הוא: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. יחס כשבר

- יחס הוא בסך הכול צורת הצגה של שבר, ומשום כך ניתן להרחיב או לצמצם אותו כאוות נפשנו כל עוד ההרחבה או הצמצום הם באותו ערך.
- מיחס נתון **לא** ניתן להסיק לגבי גדלים ממשיים.
- יחס קוראים משמאל לימין, כלומר אם נתון שהיחס בין מספר המחקים בקלמר למספר העטים בקלמר הוא 1:2, 1 מתייחס למספר המחקים, ואילו 2 למספר העטים.

2. הרחבה וצמצום של יחס

כאשר נתון לנו יחס, וכן נתון לנו **גודל ממשי** כלשהו, **לא משנה איזה** - גודל אחת הקבוצות, הסכום או ההפרש ביניהן - אנו יכולים למצוא את כל הגדלים הממשיים האחרים.

3. פתרון יחס בנעלמים

ניתן לסמן את הגורמים בשאלה ב-x ואותם להשוות לגודל הממשי הנתון. כאשר נמצא את ערכו של x נוכל למצוא את כל הגדלים הממשיים האחרים.

4. יחס משתנה, שינויים ביחס

שאלות מסוג זה, ניתן לפתור באמצעות שתי דרכים עיקריות:

- בניית משוואה - נסמן את אחד הגורמים ביחס ב-x ובהתאם גם את השני, נחסר או נוסיף על פי האמור בשאלה ולבסוף ניצור משוואה.
- בדיקת תשובות - נבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתונים בשאלה.

5. יחס ישר לעומת יחס הפוך

- **יחס ישר** פירושו ביצוע אותה פעולה על שני ערכים, למשל אם אנו קונים כמות גדולה פי 2, יהיה עלינו לשלם סכום אשר גדול פי 2.
- לעומת זאת, **יחס הפוך** פירושו ביצוע פעולה הפוכה. למשל, כאשר הסכום שברשותנו זהה ומחיר של מוצר **עלה** פי 2, כמות המוצרים שנוכל לקנות **קטנה** פי 2.

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!