אלגברה

חזקות ושורשים

שיעור חזקות ושורשים

שיעור חזקות

להלן טבלת סיכום חזקות, כפי שהופיעה בשיעור חזקות בספר יסודות מתמטיים :

חזקות מיוחדות: $x^1 = x$ $x^0 = 1$ $0^x = 0$ $1^x = 1$ **בסיסים זהים:** $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$	**בסיסים שונים:** $b^a \cdot c^a = (b \cdot c)^a$ $(b \cdot c)^a = b^a \cdot c^a$ $\frac{b^a}{c^a} = \left(\frac{b}{c}\right)^a$ $\left(\frac{b}{c}\right)^a = \frac{b^a}{c^a}$ **חזקה של חזקה:** $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ **חזקה עם מעריך שלילי:** $a^{(-b)} = \frac{1}{a^b}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

חזקות שכדאי לזכור בעל פה

חזקות של המספר 2 :

$2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^8 = 256$ $2^{10} = 1024$

$2^5 = 32$ $2^6 = 64$ $2^7 = 128$ $2^9 = 512$

חזקות של המספר 3 :

$3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$

חזקות של המספר 4 :

$4^2 = 16$ $4^3 = 64$ $4^4 = 256$

חזקות של המספר 5 :

$5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$

חזקות של המספר 6 :

$6^2 = 36$ $6^3 = 216$

בנוסף:

$7^2 = 49$ $8^2 = 64$ $9^2 = 81$

$10^2 = 100$ $11^2 = 121$ $12^2 = 144$

$13^2 = 169$ $14^2 = 196$ $15^2 = 225$

$16^2 = 256$ $17^2 = 289$ $18^2 = 324$

$19^2 = 361$ $20^2 = 400$

עבודה עם בסיסים זהים

בשאלות אלו נשתמש בכללי החזקות כדי לפשט ביטויים.

שאלה לדוגמה – בסיסים זהים

$$\frac{3^6 \cdot 3^{\left(-\frac{9}{5}\right)}}{3^{\frac{1}{5}}} = ?$$

(1) 9   (2) 27   (3) 30   (4) 81

פתרון: כיוון שבביטוי זה כל בסיסי החזקה זהים נוכל להיעזר בחוקי החזקות הנוגעים לכפל וחילוק.

לפי הכלל $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, נוכל לסכום את מעריכי החזקה במונה השבר ונקבל: $\frac{3^6 \cdot 3^{\left(-\frac{9}{5}\right)}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{6-\frac{9}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$.

כעת, נשתמש בכלל: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ונקבל: $\frac{3^{6-\frac{9}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{6-\frac{9}{5}-\frac{1}{5}}$.

נכנס את האיברים המופיעים בחזקה ונקבל: $3^{6-\frac{9}{5}-\frac{1}{5}} = 3^{6-2} = 3^4$.

נזכר כי $3^4 = 81$.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – בסיסים זהים

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^3 \cdot y^{-3}}{x^{-\frac{1}{2}}} = ?$$

(1) 1

(2) $\frac{x}{y}$

(3) x

(4) $x^2 \cdot y^2$

<u>פתרון:</u>

ממבט לתשובות נראה כי עלינו לפשט את הביטוי.

לפי הכלל $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, נוכל לסכום את מעריכי החזקה שבבסיסה y באופן הבא: $y^3 \cdot y^{-3} = y^{3+(-3)} = y^0 = 1$.

מכך, נמצא כי ערכו של הביטוי הנתון הוא: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}$.

לפי הכלל $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, נוכל להציג את הביטוי באופן הבא: $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}} = x^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

ומכך נסיק כי ערכו של הביטוי הוא $x^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$.

התשובה הנכונה היא (3).

כלל: ניתן לפשט בעזרת כללי החזקות רק כאשר מדובר בתרגילי כפל או חילוק.

עבודה עם בסיסים שונים – המרת בסיסים

חזקה היא צורת הצגה שונה של כפל, ולכן ניתן להציג מספרים באמצעות חזקות.

לדוגמה: את המספר 64 ניתן להציג בצורות הבאות: $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$.

שאלה לדוגמה – בסיסים שונים

$$\frac{3^5 \cdot 5^2}{45} = ?$$

(1) 180 (2) 225 (3) 90 (4) 135

פתרון:
כדי לצמצם את החישובים של המספרים הגדולים שבשאלה נעזר בחוקי החזקות כדי לצמצם את השבר.
כלומר, נמיר את המספר שבמכנה השבר כך שבסיסיו יהיו זהים במידת האפשר לבסיסים שבמונה.

המספר 45 יכול להיות מוצג גם בתור המכפלה הבאה: $9 \cdot 5$, כלומר: $3^2 \cdot 5$.

מכאן, נוכל להציג את הביטוי באופן הבא: $\frac{3^5 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 5}$.

נעזר בחוקי החזקות $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ונקבל: $\frac{3^5 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 5} = 3^{5-2} \cdot 5^{2-1} = 3^3 \cdot 5^1$.

כעת, נחשב את ערכו של הביטוי שהתקבל ונמצא כי: $3^3 \cdot 5^1 = 27 \cdot 5 = 135$.
התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כאשר קיימים בסיסים שונים בשאלה, ננסה להמיר אותם לבסיס אחד משותף ולאחר מכן נעבוד לפי חוקי החזקות.

שאלה נוספת – בסיסים שונים

$$27^{3x} \cdot 9^{2x} \cdot 3^x = ?$$

(1) 3^{10x} (2) 3^{8x} (3) 3^{16x} (4) 3^{14x}

פתרון:
ממבט על התשובות ניתן לראות כי עלינו להמיר את האיברים שבביטוי כך שבסיס החזקה שלהם יהיה 3.

נזכור כי: $3^3 = 27$, וכן וכי: $3^2 = 9$, ונציג את הביטוי באופן הבא: $27^{3x} \cdot 9^{2x} \cdot 3^x = \left(3^3\right)^{3x} \cdot \left(3^2\right)^{2x} \cdot 3^x$.

לפי חוקי החזקות $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ נציג את הביטוי שהתקבל כך: $\left(3^3\right)^{3x} \cdot \left(3^2\right)^{2x} \cdot 3^x = 3^{9x} \cdot 3^{4x} \cdot 3^x$.

נעזר בחוקי החזקות $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ כדי לסכום את המעריכים המופיעים בביטוי:
$3^{9x} \cdot 3^{4x} \cdot 3^x = 3^{9x+4x+x} = 3^{14x}$.
התשובה הנכונה היא (4).

<u>משוואה מעריכית</u>

במשוואות אלו הנעלם מופיע בתור בסיס או מעריך החזקה.
כדי למצוא את הנעלם, עלינו להשוות בין הבסיסים או המעריכים במשוואה – בהתאם למיקום הנעלם.

כשהנעלם מופיע בבסיס החזקה: עלינו להגיע למצב בו מעריכי החזקה שווים ולאחר מכן נוכל להשוות את הבסיסים.

לדוגמה: כאשר נתונה המשוואה $a^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ נשווה בין הבסיסים ונמצא כי $a = \frac{2}{3}$.

הערה: חשוב לזכור שכאשר מעריך החזקה הוא זוגי יכולות להיות שתי תוצאות אפשרויות.

לדוגמה: $a^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. בפועל יכולות להיות שתי תוצאות המקיימות את **a**: $a = \frac{2}{3}$ וגם $a = -\frac{2}{3}$.

כשהנעלם מופיע במעריך החזקה: עלינו להגיע למצב בו בסיסי החזקה שווים ולאחר מכן נוכל להשוות את המעריכים.

לדוגמה: כאשר נתונה המשוואה $2^{x+1} = 2^6$ נשווה בין המעריכים ונמצא כי: $x+1=6$, ומכאן ש- $x=5$.

שאלה לדוגמה – השוואת בסיסים

נתון: $3^{x-1} = 27^2$

$x = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

<u>פתרון:</u>
ניתן לראות כי הנעלם מופיע במעריך החזקה, ולכן עלינו להשוות את בסיסי החזקה כדי שנוכל למצוא אותו.
לפי חוקי חזקות נביע את האיברים באגף הימני בעזרת בסיס 3, וכך נקבל: $3^{x-1} = \left(3^3\right)^2$.
לפיכך, לפי הכלל $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$ ניתן לכפול את המעריכים של האיברים באגף הימני ולקבל $\left(3^3\right)^2 = 3^6$.
במצב זה נקבל את המשוואה: $3^{x-1} = 3^6$.
בסיס החזקה בשני האגפים שווה, ומכך נובע שגם המעריכים שווים, ולכן: $x-1=6$.
נבודד את הנעלם x ונמצא כי $x=7$.
התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – השוואת מעריכים

נתון: $x^{13} = 8^3 \cdot 4^2$

$x = ?$

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4

<u>פתרון:</u>
ניתן לראות כי הנעלם מופיע בבסיס החזקה, ולכן עלינו להשוות את מעריכי החזקה כדי למצוא אותו.
לפי חוקי חזקות ניתן להציג את שני האיברים באגף הימני בעזרת בסיס זהה: $x^{13} = (2^3)^3 \cdot (2^2)^2$.
לפי הכלל $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ ניתן לכפול את המעריכים של האיברים באגף הימני ולקבל $x^{13} = 2^9 \cdot 2^4$.
בנוסף, באגף הימני מכפלה בין שני איברים בעלי בסיס זהה, ולכן ניתן לחבר את מעריכיהם על פי הכלל $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, ולמצוא כי: $x^{13} = 2^{9+4}$.
כלומר, $x^{13} = 2^{13}$.
מעריך החזקה של שני האיברים זהה ואי זוגי, ומכך ניתן להסיק כי בסיסי החזקה זהים, ולכן: $x = 2$.
התשובה הנכונה היא (2).

כלל: אם בסיס החזקה של שני אגפי משוואה זהה, אפשר להשוות את מעריכי החזקה.
אם מעריך החזקה של שני אגפי משוואה זהה ואי זוגי, אפשר להשוות את בסיסי החזקה.
אם מעריך החזקה של שני אגפי המשוואה זהה וזוגי עלינו לשים לב לשתי תוצאות אפשריות – אחת חיובית והשנייה שלילית.

חיוביות ושליליות בחזקות

כשמעלים ביטוי בחזקה כלשהיא, רק ביטויים שבסיס החזקה שלהם שלילי **יכולים** להיות שליליים.
מספר שלילי בחזקה זוגית יביא לתוצאה חיובית.

לדוגמה: $(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=4$

לעומת זאת, מספר שלילי בחזקה אי-זוגית יביא לתוצאה שלילית.

לדוגמה: $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

שאלה לדוגמה – חיוביות ושליליות

נתון: a הוא מספר ראשוני הגדול מ- 3
$c<0<b$

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **אינו** חיובי?

(1) a^{-b} (2) $(a-c)^c$ (3) c^b (4) c^a

פתרון:

דרך א': מכך ש- a הוא מספר ראשוני הגדול מ- 3 נוכל להסיק כי a הוא בהכרח אי-זוגי וחיובי.
כמו כן, ידוע כי b הוא מספר חיובי ו- c הוא מספר שלילי. נבדוק את התשובות ונחפש ביטוי שהוא תמיד שלילי:
תשובה (1): בסיס החזקה a הוא מספר חיובי, ולכן גם התוצאה שתתקבל תהיה תמיד חיובית. התשובה נפסלת.
תשובה (2): ידוע כי c הוא מספר שלילי. נביט בבסיס החזקה: כאשר מחסרים מספר שלילי, אנו בעצם מוסיפים מספר חיובי. לכן, כאשר נחסר את המספר c מ- a נקבל תוצאה חיובית.
כאשר בסיס החזקה חיובי, התוצאה תהיה תמיד חיובית, ולכן התשובה נפסלת.
תשובה (3): ידוע כי c הוא מספר שלילי, ולכן כשנעלה אותו בחזקה אי-זוגית נקבל תוצאה שלילית.
אך מכיוון שכל מה שידוע לנו על b זה כי הוא גדול מאפס, לא נוכל לקבוע בוודאות אם הוא זוגי או אי-זוגי.
כלומר, ייתכן מצב בו b הוא מספר זוגי ולכן תשובה זו אינה נכונה בהכרח. התשובה נפסלת.
תשובה (4): ידוע כי c הוא מספר שלילי וכי a הוא מספר אי-זוגי. הביטוי c^a בהכרח שלילי, מכיוון שאם נכפול את c בעצמו מספר אי-זוגי של פעמים, נקבל מספר שלילי. התשובה מתאימה.
דרך ב': דרך נוספת לפתרון התרגיל היא באמצעות הצבה. נציב מספרים שמקיימים את תנאי השאלה ובעזרתם נפסול תשובות עד שנגיע לתשובה הנכונה: נציב $a=5$, $b=2$, $c=-1$.

תשובה (1): $a^{-b}=5^{-2}=\frac{1}{25}$, התשובה חיובית ולכן נפסלת.

תשובה (2): $(a-c)^c=(5-(-1))^{-1}=(5+1)^{-1}=6^{-1}=\frac{1}{6}$, התשובה חיובית ולכן נפסלת.

תשובה (3): $c^b=(-1)^2=1$, התשובה חיובית ולכן נפסלת.

תשובה (4): $c^a=(-1)^5=-1$. התשובה מתאימה וכיוון שפסלנו את שאר התשובות נוכל להסיק כי זו היא התשובה הנכונה.
התשובה הנכונה היא (4).

כלל: ביטוי עם חזקה יכול להיות שלילי **אם ורק אם** יש לו בסיס שלילי ומעריך אי-זוגי.

שברים אמיתיים ומדומים

נזכר כי: א. שברים אמיתיים הם מספרים חיוביים בהם המונה **קטן** מהמכנה (קטנים מ-1).

לדוגמה: $\frac{1}{2}$

ב. שברים מדומים הם שברים שערכם גדול מ-1 (המונה **גדול** מהמכנה) או קטנים מ-(-1).

לדוגמה: $\frac{4}{3}$ או $-\frac{4}{3}$

שאלה לדוגמה – שברים אמיתיים ומדומים

נתון: $\left(\frac{1}{2}\right)^{a} < \left(\frac{1}{a}\right)^{2}$

a **אינו** יכול להיות-

(1) קטן מ-0 (2) גדול מ-2 (3) שווה ל-3 (4) שווה ל-5

פתרון: נציב מספרים לפי התשובות האפשריות, ונבדוק איזו תשובה לא מתקיימת.

תשובה (1): נציב $a=(-1)$ באי-השוויון ונקבל $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{-1}\right)^{2}$. נפשט לפי חוקי החזקות: $2 < (-1)^2$, ומכאן ש-$2 < 1$.
אי-השוויון מתקיים. התשובה נפסלת.

תשובה (2): נציב $a=3$ באי-השוויון ונקבל $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$. נפשט לפי חוקי החזקות: $\frac{1}{8} < \frac{1}{9}$. אי-השוויון מתקיים. התשובה נפסלת.

תשובה (3): הצבנו $a=3$ עבור תשובה (2) וראינו כי אי-השוויון מתקיים. התשובה נפסלת.

תשובה (4): נציב $a=5$ באי-השוויון ונקבל $\left(\frac{1}{2}\right)^{5} < \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$. נפשט לפי חוקי החזקות: $\frac{1}{32} < \frac{1}{25}$. אי-השוויון אינו מתקיים. זו התשובה הנכונה.
התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כשמעריך החזקה גדול מ-1, החזקה **מקטינה** שברים אמיתיים.

לדוגמה: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ שווה ל-$\frac{1}{4}$, **שקטן** יותר מ-$\frac{1}{2}$. לעומת זאת, 2^2 שווה ל-4, **שגדול** יותר מ-2.

חזקות מיוחדות

כשלא ניתן לעבוד עם חוקי החזקות, ננסה לעבוד באמצעות הצבת החזקות המיוחדות:

$x^1 = x$

$x^0 = 1$

$0^x = 0$

$1^x = 1$

שאלה לדוגמה – חזקות מיוחדות

$3^x = 4^x + x$

x הוא בהכרח –

(1) חיובי

(2) שלילי

(3) זוגי

(4) אי-זוגי

פתרון: חוקי החזקות שלמדנו לא עובדים בתרגילי חיבור וחיסור. בנוסף, בסיסי החזקה במשוואה הנתונה שונים, כך שלא ניתן כלל לצמצם או לכנס איברים.

החלופה היחידה היא שמדובר במקרה קיצון, כאשר $x = 0$.

ואכן, כשנציב $x = 0$ במשוואה נקבל: $3^0 = 4^0 + 0$.

כיוון שעבור כל מספר a שונה מ-0 נקבל $a^0 = 1$, המשוואה היא $1 = 1 + 0$. המשוואה מתקיימת.

מכאן ש-$x = 0$, מספר זוגי שאינו חיובי ואינו שלילי.

נוכל גם לפסול תשובות על ידי הצבת $x = 1$. כך נקבל: $3^1 = 4^1 + 1$ כלומר $3 = 5$. כמובן שביטוי זה אינו נכון, נוכל לפסול את תשובות (2) ו- (4) כיוון ש- 1 הוא מספר אי זוגי וחיובי. בדרך דומה נפסול את תשובה (4) על ידי הצבת $x = -1$. נקבל: $3^{-1} = 4^{-1} + 1$, כלומר $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} - 1$ שכמובן גם הוא אינו ביטוי נכון.

התשובה הנכונה היא (3).

שיעור שורשים

טבלת סיכום חוקי שורשים:

כפל של שורשים: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a\cdot b}$ **חלוקת שורשים:** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt[x]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}$	**מעבר בין שורש לחזקה:** $\sqrt[c]{a^b}=a^{\frac{b}{c}}$ $\sqrt[c]{a}=a^{\frac{1}{c}}$ **כפל של שורש ריבועי בעצמו:** $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$ $\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

שורשים שכדאי לזכור בעל פה:

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$
$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{121}=11$
$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{196}=14$
$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{289}=17$
$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{400}=20$

הקשר בין שורש לחזקה

נוכל להשתמש בקשר שבין שורש לחזקה כדי לפשט שאלות הכוללות גם חזקות וגם שורשים.

שאלה לדוגמה – מעבר משורש לחזקה

נתון: $\sqrt[5]{a^{3x}}=a^6$

$x=?$

(1) 10 (2) 12 (3) 6 (4) 8

פתרון: ניתן לעבור בין שורש לחזקה באופן הבא: $\sqrt[c]{a^b}=a^{\frac{b}{c}}$. מכאן ש- $\sqrt[5]{a^{3x}}=a^{\frac{3x}{5}}$. לפיכך, ניתן לכתוב את המשוואה הנתונה כך: $a^{\frac{3x}{5}}=a^6$. בסיסי החזקה זהים (שווים ל- a), לכן גם המעריכים שווים: $\frac{3x}{5}=6$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- 5 ונקבל: $3x=30$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב- 3 ונקבל: $x=10$.
התשובה הנכונה היא (1).

תרגילים עם בסיסים זהים

בשאלות אלו נשתמש בכללי החזקות והשורשים כדי לפשט ביטויים.

שאלה לדוגמה – בסיסים זהים

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = ?$$

(1) $\sqrt[6]{x}$ (2) $\sqrt[2]{x}$ (3) $\sqrt[3]{x}$ (4) $\sqrt[4]{x}$

פתרון: ניתן לעבור בין שורש לחזקה לפי הכלל $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$. מכאן ש- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ו- $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

לפיכך, נוכל לכתוב את הביטוי הנתון כך: $\sqrt[5]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}$.

לפי חוקי החזקות מתקיים: $a^b\cdot a^c = a^{b+c}$ ולכן: $\sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{3+2}{6}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{5}{6}}}$.

נעבור משורש לחזקה באמצעות הנוסחה: $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$ ונקבל: $x^{\frac{\frac{5}{6}}{5}} = x^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{6}}$.

נעבור בין חזקה לשורש ונקבל: $x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$.

התשובה הנכונה היא (1).

דגש: ניתן לפשט שורשים בעזרת חוקי החזקות רק כאשר מדובר בתרגילי כפל או חילוק.

עבודה עם בסיסים שונים – המרת בסיסים

בשאלות בהן בסיסי השורשים שונים, ננסה להמיר לבסיס אחד בעזרת חוקי החזקות, ולאחר מכן נוכל להיעזר בכללי החזקות והשורשים שאנו מכירים.

שאלה לדוגמה – בסיסים שונים

$$4 \cdot \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = ?$$

(1) 16 (2) 24 (3) 32 (4) 8

פתרון: כדי לצמצם את הביטוי, נביע את כל האיברים המופיעים בביטוי כחזקות של 2.

מכאן ש- $64 = 2^6$, $8 = 2^3$ ו- $4 = 2^2$

נציב זאת בביטוי ונקבל: $4 \cdot \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = 2^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{2^3}}$

ניתן לעבור בין שורש לחזקה לפי הכלל: $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$, ומכאן: $2^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{2^3}} = 2^2 \cdot \frac{2^{\frac{6}{3}}}{2^{\frac{3}{3}}} = 2^2 \cdot \frac{2^2}{2^1}$

לפי הכלל $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ ניתן לחבר את מעריכי החזקות שבמונה: $2^2 \cdot \frac{2^2}{2^1} = \frac{2^{2+2}}{2^1} = \frac{2^4}{2^1}$

לפי הכלל $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ ניתן לחסר את מעריכי החזקות שבמונה ובמכנה: $\frac{2^4}{2^1} = 2^{4-1} = 2^3 = 8$

התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כאשר קיימים בסיסים שונים בשאלה, ננסה להמיר לבסיס משותף ולעבוד לפי חוקי השורשים.

הצבה בשאלות של חזקות ושורשים

ניתן להשתמש בהצבה בשאלות חזקות ושורשים. כשנעשה זאת, נדאג להציב מספרים נוחים לחישוב.

שאלה לדוגמה – הצבה

נתון: x ו- y הם מספרים חיוביים.

מה מהבאים בהכרח **אינו** נכון?

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{x}$

(2) $\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}$

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$

(4) $\sqrt{x-y}=0$

פתרון: על פי הנתון, x ו y הם חיוביים. מכיוון שנשאלנו מה בהכרח אינו נכון עלינו לנסות להציב מספרים שיקיימו את המשוואה בכל אחת מן התשובות. אם נצליח נוכל לפסול את התשובה.

ננסה להציב שני מספרים חיוביים, $x=y=1$, ונבדוק אילו תשובות מתקיימות.

תשובה (1): $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\sqrt{1}$. כלומר, $1+1=2$. המשוואה מתקיימת. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\sqrt{1+1}=\sqrt{2\cdot 1}$. כלומר, $\sqrt{2}=\sqrt{2}$. המשוואה מתקיימת. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\sqrt{1}+\sqrt{1}=\sqrt{1+1}$. כלומר, $2=\sqrt{2}$. המשוואה אינה מתקיימת.

תשובה זו אינה מתקיימת עבור אף זוג מספרים חיוביים. נוכל לראות זאת אם נעלה את המשוואה הנתונה בריבוע:

נקבל כי $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x+y}\right)^2$, נוכל לפתוח את הסוגריים ונקבל כי $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$,

נחסר משני אגפי המשוואה $(x+y)$ ונקבל כי $2\sqrt{xy}=0$. נשים לב כי כיוון ששני הנעלמים שלנו הם מספריים חיוביים הביטוי $2\sqrt{xy}$ הוא תמיד חיובי ולכן לעולם לא יוכל להיות שווה לאפס, ולכן תשובה זו בהכרח אינה נכונה.

תשובה (4): $\sqrt{1-1}=\sqrt{0}=0$. המשוואה מתקיימת. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

חיוביות ושליליות בחזקות ושורשים

בדומה לחזקות, המצב היחיד בו תתקבל תוצאה שלילית לאחר פעולת שורש הוא כאשר מעריך השורש הוא מספר אי-זוגי ובסיס השורש הוא מספר שלילי.

שאלה לדוגמה – חיובית ושליליות

נתון: x ו- a הם מספרים שלמים

$\sqrt[a]{x} = (-3)^3$

a הוא בהכרח –

(1) זוגי (2) אי-זוגי (3) חיובי (4) שלילי

פתרון: נפעיל את החזקה באגף ימין של המשוואה ונמצא כי $\sqrt[a]{x} = -27$
כמו בחזקות, כאשר תוצאה של שורש מסוים היא מספר שלילי נוכל להסיק כי בסיס השורש הוא מספר שלילי ומעריך השורש הוא מספר אי-זוגי. אנו נשאלים על מעריך השורש a, ולכן נוכל להסיק כי עליו להיות אי-זוגי.
התשובה הנכונה היא (2).

שברים אמיתיים ושברים מדומים

נזכר כי: א. שברים אמיתיים הם מספרים חיוביים בהם המונה **קטן** מהמכנה (קטנים מ-1).

לדוגמה: $\frac{1}{2}$

ב. שברים מדומים הם שברים שערכם גדול מ-1 (המונה **גדול** מהמכנה) או קטנים מ-(-1).

לדוגמה: $\frac{4}{3}$ או $-\frac{4}{3}$

שאלה לדוגמה – שברים אמיתיים ושברים מדומים

נתון: $\frac{3}{x} < \sqrt{\frac{3}{x}}$

x בהכרח –

(1) גדול מ-1 (2) קטן מ-0 (3) גדול מ-3 (4) קטן מ-3

פתרון: כשאנו מבצעים את פעולת השורש על **שבר מדומה** (מספר הגדול מ-1) ערכו של המספר **קטן**.

כמו כן, כאשר מבצעים את פעולת השורש על **שבר אמתי** (הנמצא בין 0 ל-1) ערכו של המספר **גדל**.
כללים אלה תקפים לבסיסים חיוביים.

בשאלה זו ניתן לראות כי פעולת השורש מקטינה את ערכו של הביטוי ולכן נוכל להסיק כי הביטוי $\frac{3}{x}$ בהכרח גדול מ-1.

כדי שהביטוי $\frac{3}{x}$ יהיה גדול מ-1, המכנה צריך להיות קטן מ-3 (אחרת נקבל שבר אמתי שערכו קטן מ-1).

התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כאשר מבצעים את פעולת השורש, הפעולה **מקטינה** שברים מדומים חיוביים **ומגדילה** שברים אמיתיים חיוביים.
הערה: כאשר מעריך השורש הוא מספר אי-זוגי ובסיס השורש הוא מספר שלילי ההשפעה היא הפוכה.

לדוגמה: $\sqrt{\frac{1}{4}}$ שווה ל-$\frac{1}{2}$, ש**גדול** יותר מ-$\frac{1}{4}$. לעומת זאת, $\sqrt{4}$ שווה ל-2, ש**קטן** יותר מ-4.

הוצאת שורש כגורם משותף

בחלק משאלות הביטויים נוכל לפרק את האיברים בביטוי בעזרת חוקי השורשים.

שאלה לדוגמה – גורם משותף

$$\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=?$$

(1) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}+3}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

פתרון: נזכור כי $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ וכי $x=\sqrt{x}\sqrt{x}$.

נציג את הביטוי שבשאלה באופן הבא: $\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}$.

כעת נוכל להוציא מהמונה ומהמכנה גורם משותף באופן הבא: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

לפיכך, נוכל לחלק את המונה והמכנה של הביטוי שהתקבל ב- $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ ונקבל כי ערך הביטוי הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

התשובה הנכונה היא (4).

הערכת סדר גודל

ישנן שאלות בהן לא ניתן לזהות את הדרך לפישוט ולפתרון, ולכן נעדיף להשתמש בערך המספרי של שורש מסוים כדי להגיע לתשובה הנכונה.

הערה: הערכים המספריים המוצגים לפנינו הינם קירוב של הערך המספרי האמתי (הסימן $\approx$ משמעותו היא "בקירוב")

$\sqrt{2} \approx 1.4$

$\sqrt{3} \approx 1.7$

$\sqrt{5} \approx 2.2$

שאלה לדוגמה – הערכת סדר גודל

$$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = ?$$

(1) $\sqrt{3}+1$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $3-\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{3}-3$

פתרון: ידוע כי $\sqrt{3} \approx 1.7$, נציב את ערך זה בביטוי ונמצא כי הוא שווה ל- $\frac{1.7}{2+1.7} = \frac{1.7}{3.7}$.

נוכל להרחיב את השבר פי 10: $\frac{17}{37}$, ונמצא כי ערכו מעט יותר קטן מחצי, שכן אנו יודעים כי $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$ והמספר שקיבלנו קרוב בערכו למספר זה.

נבדוק איזה מהתשובות מתאימה:

תשובה (1): $\sqrt{3}+1 \approx 1.7+1 = 2.7$, התשובה גדולה מחצי, ולכן נפסלת.

תשובה (2): $2\sqrt{3} \approx 2\cdot 1.7 = 3.4$, התשובה גדולה מחצי, ולכן נפסלת.

תשובה (3): $3-\sqrt{3} \approx 3-1.7 = 1.3$, התשובה גדולה מחצי, ולכן נפסלת.

תשובה (4): $2\sqrt{3}-3 \approx 2\cdot 1.7-3 = 3.4-3 = 0.4$, תשובה זו קטנה מעט מחצי, ולכן זו התשובה המתאימה.

התשובה הנכונה היא (4).

שורשים של מספרים אשר אין אנו יודעים למה הם שווים במדויק, אפשר להעריך את סדר הגודל באמצעות שורשים מוכרים וקרובים ככל הניתן לשורש הנתון.

לדוגמה: $\sqrt{12}$ גדול יותר מ- $3=\sqrt{9}$ וקטן יותר מ- $4=\sqrt{16}$.

שאלה נוספת – הערכת סדר גודל

$$\frac{\sqrt{96}+16}{2}=?$$

(1) 24.6 (2) $\sqrt{24}+8$ (3) $4\sqrt{6}+8$ (4) $\sqrt{13}+4$

פתרון: במקום להוציא גורם משותף, ננסה להעריך את גודלו של הביטוי. $\sqrt{96}$ הוא מעט קטן מ- $10=\sqrt{100}$.

מכאן שהביטוי הכולל מעט קטן מ- $13=\frac{26}{2}=\frac{10+16}{2}$.

תשובה (1): נפסלת כיוון שהיא גדולה מ- 13.

תשובה (2): $\sqrt{24}$ הוא קצת קטן יותר מ- $5=\sqrt{25}$, ולכן $\sqrt{24}+8$ קטן מעט יותר מ- $13=5+8=\sqrt{25}+8$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $\sqrt{6}$ הוא גדול מ- $2=\sqrt{4}$ וקטן מ- $3=\sqrt{9}$. כלומר, $\sqrt{6}\approx 2.5$. מכאן ש- $4\sqrt{6}\approx 4\cdot 2.5=10$. לכן,

$4\sqrt{6}+8\approx 10+8=18$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\sqrt{13}$ הוא גדול מ- $3=\sqrt{9}$ וקטן מ- $4=\sqrt{16}$. כלומר, $\sqrt{13}\approx 3.5$. מכאן ש- $\sqrt{13}+4\approx 3.5+4=7.5$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

דגש: בשאלות בהן אנו נדרשים לחשב שורשים שאינם שלמים, נוכל להעריך את סדר הגודל של הביטוי ולפסול תשובות בהתאם.

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!