

אלגברה

מערכת משוואות

שיעור מערכת משוואות

כל הכללים החלים על משוואה אחת חלים גם כאשר פותרים מערכת משוואות. שיעור זה מתבסס על הידע שנלמד בשיעור משוואה אחת.

בידוד והצבה, השוואת מקדמים

שני הכללים הבסיסיים לפתרון מערכת משוואות הם:

1. השוואת המקדמים המספריים של אחד מהנעלמים, וחיסור/חיבור המשוואות כך שנעלם זה יצטמצם. **לדוגמה:**

$$\text{נתון: } 3x + 4y = 12$$

$$6x + 7y = 22$$

$$y = ?$$

נכפול את שני אגפי המשוואה העליונה פי 2 ונקבל: $6x + 8y = 24$.

נכתוב את שתי המשוואות אחת מעל השנייה ונחסר את השנייה מהראשונה:

$$6x + 8y = 24$$

–

$$6x + 7y = 22$$

$$y = 2$$

2. בידוד אחד המשתנים באחת המשוואות והצבתו במשוואה השנייה. **לדוגמה:**

$$\text{נתון: } 3x + 6y = 15$$

$$2x + 5y = 13$$

$$y = ?$$

נחלק את שני אגפי המשוואה העליונה פי 3 ונקבל: $x + 2y = 5$.

נבודד את הנעלם x באגף שמאל על ידי חיסור הביטוי $2y$ משני אגפי המשוואה: $x = 5 - 2y$.

נציב את המשוואה שקבלנו במשוואה התחתונה ונקבל: $2 \cdot (5 - 2y) + 5y = 13$.

נפתח את הסוגריים בצד שמאל של המשוואה ונשווה לצד ימין: $2 \cdot 5 + 2 \cdot (-2y) + 5y = 10 - 4y + 5y = 13$.

נכנס את האיברים הדומים באגף שמאל ונקבל: $10 + y = 13$.

נחסר 10 משני אגפי המשוואה, ונקבל: $y = 3$.

שאלה לדוגמה – בידוד והצבה

$$\text{נתון: } mx + 3ny = 3$$

$$3mx - 6ny = -6$$

$$ny = ?$$

(4) 4

(3) 3

(2) 2

(1) 1

פתרון: כדי לבדוד את הנעלם ny בשאלה, נעבוד בשני שלבים.

ראשית, נכפול את המשוואה העליונה ב-3 על מנת להשוות את המקדם של mx בשתי המשוואות ונקבל: $3mx + 9ny = 9$.
 כעת בשתי המשוואות מופיע הנעלם $3mx$, ולכן נוכל לצמצם אותו על ידי חיסור המשוואות זו מזו (כמו בכלי הפתרון הראשון).

$$3mx + 9ny$$

– נקבל את המשוואה המאוחדת

$$(3mx - 6ny)$$

$$= 9 - (-6)$$

נכנס את האיברים במשוואה המאוחדת ונקבל: $9ny + 6ny = 9 + 6$

$$\text{ומכאן ש- } 15ny = 15$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-15 ונמצא כי $ny = 1$

לחלופין, ניתן לפתור את השאלה על ידי בידוד והצבה.

נבודד את הנעלם mx במשוואה העליונה, ולאחר מכן נציב אותו במשוואה התחתונה.

כך נוכל להציב את mx במשוואה הנותרת ולמצוא את ערכו של הביטוי ny .

נבודד את הנעלם mx במשוואה: $mx + 3ny = 3$ ונמצא כי: $mx = 3 - 3ny$

נציב זאת במשוואה השנייה ונקבל כי: $3 \cdot (3 - 3ny) - 6ny = -6$. נפשט את הסוגריים השמאליים ונמצא כי: $9 - 9ny - 6ny = -6$

נבודד את הנעלם ny משאר הערכים המספריים ונראה כי $-15ny = -15$. נחלק את שני האגפים ב-(-15), ומכאן ש- $ny = 1$.

התשובה הנכונה היא (1).

יותר נעלמים ממשוואות

כאשר מספר המשוואות הנתונות שווה למספר הנעלמים המופיעים בהן, נוכל למצוא את ערכם המספרי של הנעלמים. כאשר יש יותר נעלמים ממשוואות, נוכל לבטא את הנעלמים בעזרת נעלמים אחרים או למצוא את ערכם המספרי של נעלמים, במידה ובתהליך הפישוט של המשוואות נעלמים אחרים יצטמצמו. נשים לב כי בחלק מהתרגילים נתבקש למצוא את ערכם המספרי של נעלמים, אך במקרים אחרים לא נדרש לכך, והתשובה תכיל נעלמים.

שאלה לדוגמה – יותר נעלמים

$$\text{נתון: } x + y = z$$

$$z - y = 7$$

$$x = ?$$

(4) 4

(3) -3

(2) 2

(1) 7

פתרון: נבודד את x במשוואה הראשונה ונקבל: $x = z - y$.
עלינו למצוא את ערכו של הביטוי $z - y$ כדי שהוא יצטמצם ונמצא את ערכו המספרי של x .
נתון במשוואה השנייה כי $z - y = 7$ ומכאן ש- $x = 7$.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – יותר נעלמים

$$\text{נתון: } x = 3z + \frac{y}{4}$$

$$z + y = 2x$$

$$\frac{y}{z} = ?$$

(4) 10

(3) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) 1

פתרון: הביטוי שעלינו למצוא כולל רק את הנעלמים y ו- z , ולכן עלינו להיפטר מהנעלם x .
מהמשוואה הראשונה, אנו יודעים כי $x = 3z + \frac{y}{4}$. נציב את ערכו של x במשוואה השנייה ונקבל כי $z + y = 2 \cdot \left(3z + \frac{y}{4}\right)$.
נפתח את הסוגריים באגף הימני ונראה כי $z + y = 6z + \frac{y}{2}$.
נכפול את שני האגפים המשוואה ב-2 ונמצא כי $2z + 2y = 12z + y$.
נבודד את הנעלם z באגף ימין ואת הנעלם y באגף שמאל: $y = 10z$. נחלק את שני האגפים ב- z ונראה ש- $\frac{y}{z} = 10$.
התשובה הנכונה היא (4).

בניית מערכת משוואות

שאלות מורכבות יותר בתחום המשוואות ידרשו מאיתנו לבנות משוואות מתוך תוכן מילולי. עלינו לשים לב למילים מסוימות בניסוח כדי לדעת כיצד להמיר את המילה בפעולה החשבונית המתאימה.

משמעות חשבונית	מילה או ביטוי
+ (חיבור)	ועוד, הוסיפו, יותר, גדל ב-, עלה, סכום
- (חיסור)	פחות, מינוס, הורידו, הפחיתו, קטן, הפרש
× (כפל)	פי, כפול, מהווה, מכפלת מ-
÷ (חילוק)	לחלק ל-, מתוך, חלקי, מחצית, שליש, רבע
= (שווה)	שווה ל-, מהווה, זהה ל-, הוא/הם

שאלה לדוגמה – בניית מערכת משוואות

במקרה 90 פחיות ובקבוקים.
שליש מהפחיות ורבע מהבקבוקים מכילים גזוז.
סך הכל יש 25 פחיות ובקבוקים המכילים גזוז.
כמה פחיות יש במקרה?

45 (4)

25 (3)

30 (2)

60 (1)

פתרון: נסמן את כמות הפחיות במקרה על ידי הנעלם p , ואת כמות הבקבוקים במקרה על ידי הנעלם b . נתון כי סכום הבקבוקים והפחיות במקרה הוא 90, ולכן נוכל לבנות את המשוואה: $p + b = 90$. בנוסף, נתון כי שלישי מהפחיות במקרה מכילות גזוז, ולכן נוכל

להסיק כי במקרה $\frac{p}{3}$ פחיות המכילות גזוז. באופן דומה נוכל להסיק כי במקרה $\frac{b}{4}$ בקבוקים המכילים גזוז. נתון כי סכום הפחיות

והבקבוקים במקרה המכילים גזוז הוא 25, ולכן נוכל לבנות את המשוואה: $\frac{p}{3} + \frac{b}{4} = 25$. נבודד את הנעלם b במשוואה הראשונה

שבנינו ונקבל את המשוואה: $b = 90 - p$. נציב את המשוואה הזאת במשוואה השנייה ונקבל משוואה עם נעלם אחד:

$$\frac{p}{3} + \frac{(90 - p)}{4} = 25 \quad \text{נכפול את שני אגפי המשוואה ב-12 ונקבל: } 4p + 3 \cdot (90 - p) = 25 \cdot 12 \quad \text{נפשט את המשוואה על ידי פתיחת}$$

סוגריים ונקבל: $4p + 270 - 3p = 300$. נבודד את הנעלם p באגף שמאל ונקבל: $p = 30$. לפיכך, אנו יכולים להסיק כי במקרה 30 פחיות, ולכן ניתן להסיק כי במקרה 60 בקבוקים (נזכור כי סכום הפחיות והבקבוקים במקרה הוא 90).

לחלופין, ניתן לפתור את השאלה על ידי הצבת תשובות. נציב את תשובה (2), האומרת כי במקרה 30 פחיות, נוכל להסיק לפי המשוואה הראשונה שמצאנו כי במקרה $(90 - 30)$ בקבוקים, כלומר: 60 בקבוקים. נציב מספרים אלו במשוואה השנייה שמצאנו ונבדוק האם היא מתקיימת. במידה וכמויות אלו של פחיות ובקבוקים יקיימו את המשוואה השנייה – התשובה נכונה. לפי המשוואה השנייה:

$$\frac{p}{3} + \frac{(90 - p)}{4} = 25 \quad \text{נציב את המספרים שמצאנו ונקבל: } \frac{30}{3} + \frac{60}{4} = 10 + 15 = 25 \quad \text{המשוואה מתקיימת, ולכן זו המשוואה הנכונה.}$$

התשובה הנכונה היא (2).

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!