אלגברה

מספרים שלמים, מחלקים וכפולות

מספרים שלמים

בשיעור זה נכיר מושגי יסוד בתחום המספרים השלמים, כמו זוגיות ומספרים עוקבים.
המושגים הללו ישמשו אותנו כדי להסיק מידע חשוב מנתוני שאלות אלגבריות בבחינה, בהן ביטויים ומשוואות.
כמו כן, בשיעור הבא, סימני חלוקה, נלמד מושגים משלימים לאלו שנלמד בשיעור זה.

מספרים שלמים ולא שלמים

מספרים שלמים הם מספרים המורכבים מיחידות שלמות בלבד.
מספרים שלמים יכולים להיות חיוביים (למשל 3), שליליים (למשל 3-) **או** שווים ל-0, שאינו חיובי ואינו שלילי.

מספרים לא שלמים הם מספרים שלא ניתן לבטא את ערכם ביחידות שלמות, כמו שברים.

לדוגמה: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$ ו- $\sqrt{2}$ - כולם אינם מספרים שלמים. מספר שלם יכול להיות קטן מ-1 או גדול מ-1, חיובי או שלילי.

סכום הספרות

סכום הספרות של מספר הוא תוצאת פעולת החיבור של כל הספרות שמרכיבות אותו.
לדוגמה: סכום הספרות של המספר $4{,}621$ הוא: $4+6+2+1=13$.

כלל: סכום הספרות הקטן ביותר של מספר מסדר גודל מסוים הוא **תמיד** 1, ומתקבל עבור המספר הקטן ביותר מסדר גודל זה.

לדוגמה: סכום הספרות הקטן ביותר של מספר-דו ספרתי הוא 1, ומתקבל עבור המספר הדו-ספרתי הקטן ביותר, שהוא 10.
באופן דומה, סכום הספרות הקטן ביותר של מספר תלת-ספרתי הוא 1, ומתקבל עבור המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר, שהוא 100.

כלל: סכום הספרות הגדול ביותר של מספר מסדר גודל מסוים, הוא סכום הספרות של המספר הגדול ביותר מסדר גודל זה.

לדוגמה: סכום הספרות הגדול ביותר של מספר-דו ספרתי הוא 18 - סכום הספרות של המספר הדו-ספרתי הגדול ביותר, שהוא 99.
באופן דומה, סכום הספרות הגדול ביותר של מספר תלת ספרתי הוא 27 - סכום הספרות של המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר, שהוא 999.

שאלה לדוגמה – סכום ספרות

אם נכפול את סכום הספרות הקטן ביותר של מספר תלת ספרתי, בסכום הספרות הגדול ביותר של מספר תלת ספרתי נקבל -

(1) 1 (2) 81 (3) 27 (4) 999

פתרון:

לפי הכלל שלמדנו, סכום הספרות הקטן ביותר האפשרי של מספר תלת-ספרתי הוא 1 ומתקבל עבור המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר, שהוא 100.

סכום הספרות הגדול ביותר האפשרי של מספר תלת-ספרתי מתקבל עבור המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר.

המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר הוא 999 , וסכום ספרותיו הוא: $9+9+9=27$.

אם נכפול את סכומי הספרות שמצאנו זה בזה נקבל $1\cdot 27=27$.

התשובה הנכונה היא (3).

כאשר סוכמים שני מספרים בעלי מספר ספרות זהה, התוצאה תמיד תהיה מאותו סדר גודל או מסדר גודל הגדול ב-1 מסדר הגודל של שני המספרים.

לדוגמה: סכום של שני מספרים חד-ספרתיים יכול להיות מספר חד-ספרתי (לדוגמה: $1+2=3$) או מספר דו-ספרתי (לדוגמה: $7+8=15$) בלבד.

בדומה לכך, סכום של שני מספרים דו-ספרתיים יכול להיות מספר דו-ספרתי (לדוגמה: $10+20=30$) או מספר תלת-ספרתי (לדוגמה: $70+80=150$) בלבד.

כאשר סוכמים שני מספרים בעלי מספר ספרות **שונה**, התוצאה תהיה מספר מסדר גודל זהה למספר הגדול מבין השניים **או** מסדר גודל גדול ב-1 מזה של המספר הגדול מבין השניים.

לדוגמה: סכום של מספר דו-ספרתי ומספר תלת-ספרתי יכול להיות מספר תלת-ספרתי ($10+100=110$) או ארבע-ספרתי ($990+20=1{,}110$).

שאלה לדוגמה – סדר גודל

A מספר חיובי חד-ספרתי, B מספר חיובי דו-ספרתי, C מספר חיובי תלת-ספרתי.

מה מהבאים **בהכרח אינו נכון**?

(1) סכום ספרותיו של C קטן מסכום ספרותיו של B

(2) המספר $(B+C)$ הוא ארבע-ספרתי

(3) המספר $(C-B)$ הוא חד-ספרתי

(4) המספר $(A\cdot B)$ הוא חד-ספרתי

<u>פתרון:</u>

המספר החד-ספרתי A הוא בין 1 ל- 10. המספר הדו-ספרתי B הוא בין 10 ל- 99.
המספר התלת-ספרתי C הוא בין 100 ל- 999.
נבדוק כל אחת מהתשובות בהתאם לכך.

תשובה (1): סכום הספרות הקטן ביותר של מספר מכל סדר גודל (דו-ספרתי או תלת-ספרתי) הוא 1, ומתקיים עבור המספר הקטן ביותר מסדר גודל זה. ייתכן כי C הוא מספר תלת-ספרתי קטן, כמו 100, ו-B הוא מספר דו-ספרתי גדול, כמו 90. במקרה זה, סכום ספרותיו של C, השווה ל- $1+0+0=1$, יהיה **קטן** מסכום ספרותיו של B, השווה ל- $9+0=9$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם המספרים B ו- C גדולים מספיק, ייתכן כי סכומם יהיה ארבע-ספרתי. ייתכן כי $B=10$ ו- $C=990$, ואז סכומם שווה ל- $B+C=990+10=1{,}000$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): אם המספר B גדול מספיק ו- C קטן מספיק, ייתכן כי הפרשם יהיה אפילו מספר חד-ספרתי. ייתכן כי $B=99$ ו- $C=100$, ואז הפרשם שווה ל- $C-B=100-99=1$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): מכפלה של שני מספרים מסדר גודל שונה, כל עוד ערכו של אחד מהם אינו 0, לא יכול להביא למספר מסדר גודל קטן יותר מזה של המספר הגדול מבין השניים. בשאלה מוגדר כי כל אחד מהנעלמים מייצגים מספרים חיוביים, כלומר, ערכם לא יכול להיות 0. מכאן שממכפלתם של מספר חד-ספרתי (A) בדו-ספרתי (B) לא יכולה להיות מספר חד-ספרתי. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

<u>מספרים זוגיים ואי זוגיים</u>

מספר זוגי מוגדר כמספר שלם המתחלק ב- 2 ללא שארית. לדוגמה: 2, 4 ו-6 הם מספרים זוגיים.

שימו לב: גם **0 הוא מספר זוגי**, מכיוון שהוא מתחלק ב- 2 **ללא שארית** $\frac{0}{2}=0$.

מספר אי זוגי הוא מספר שלם שאם נחלקו ב- 2 נקבל שארית 1.

לדוגמה: אם נחלק את 5 ב-2 נקבל 2 עם שארית 1. מכאן ש- 5 הוא מספר אי זוגי.

<u>פעולות חשבוניות והשפעתן על מספרים זוגיים ואי-זוגיים</u>

להלן טבלה שמציגה את הזוגיות או האי-זוגיות של החיבור, החיסור והכפל של מספרים.

זוגי	+	זוגי	=	זוגי
אי-זוגי	+	זוגי	=	אי-זוגי
אי-זוגי	+	אי-זוגי	=	זוגי
זוגי	−	זוגי	=	זוגי
זוגי	−	אי-זוגי	=	אי-זוגי
אי-זוגי	−	זוגי	=	אי-זוגי
אי-זוגי	−	אי-זוגי	=	זוגי
זוגי	×	זוגי	=	זוגי
זוגי	×	אי-זוגי	=	זוגי
אי-זוגי	×	אי-זוגי	=	אי זוגי

כלל: השפעת פעולת החילוק על מספרים זוגיים אינה קבועה, ועל כן יש לנקוט משנה זהירות.

לדוגמה: אם נחשב את תוצאת החלוקה של מספר זוגי אחד באחר, נוכל לקבל תוצאה זוגית $\frac{4}{2}=2$, אי-זוגית $\frac{2}{2}=1$ או אפילו שבר $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

שאלה לדוגמה – זוגיות

נתונים חמישה מספרים שלמים, חיוביים ושונים זה מזה אשר מכפלתם זוגית.
מספר המספרים הזוגיים מתוך חמשת המספרים הוא -

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) לא ניתן לדעת

פתרון:

למדנו כי מכפלה של מספר זוגי במספר זוגי נותנת תוצאה זוגית, וכן כי מכפלה של מספר זוגי במספר אי-זוגי תיתן תוצאה זוגית.
המצב היחידי בו לא תתקבל תוצאה זוגית הוא כאשר נכפול מספר אי-זוגי במספר אי-זוגי.
כלומר, מספיק מספר זוגי אחד במכפלה כדי שתוצאתה תהיה זוגית.
לכן, לא נוכל לדעת כמה מחמשת המספרים הם זוגיים, אבל נוכל להסיק כי לפחות אחד מהם כן זוגי.
התשובה הנכונה היא (4).

כלל: כפל של מספר זוגי בכל מספר שלם אחר נותן תוצאה זוגית.

שאלה נוספת – זוגיות

x ו- y הם מספרים שלמים וחיוביים.

נתון: ערכו של הביטוי $(x+1)(y-1)$ הוא מספר זוגי.

מה נכון **בהכרח** לגבי x ו- y?

(1) לפחות אחד מהם זוגי
(2) לפחות אחד מהם אי זוגי
(3) שניהם מספרים זוגיים
(4) שניהם מספרים אי זוגיים

פתרון:

אם תוצאת המכפלה שבביטוי $(x+1)(y-1)$ היא זוגית, לפחות אחד מהאיברים זוגי.

תוצאת חיבור של מספר x עם 1 היא זוגית כאשר המספר x הוא אי-זוגי.

באותו אופן, תוצאת חיסור של 1 ממספר y היא זוגית כאשר המספר y הוא אי-זוגי.

אם כך, הרי שלפחות אחד מהנעלמים שבסוגריים, x ו- y, הוא אי-זוגי.

לפיכך, יש שלוש אפשרויות:

א. $(x+1)$ זוגי ו- $(y-1)$ זוגי. במקרה זה, x אי-זוגי ו- y אי-זוגי.

ב. $(x+1)$ זוגי ו- $(y-1)$ אי-זוגי. במקרה זה, x אי-זוגי ו- y זוגי.

ג. $(x+1)$ אי-זוגי ו- $(y-1)$ זוגי. במקרה זה, x זוגי ו- y אי-זוגי.

מצאנו שבכל אחד מהמקרים הללו, לפחות אחד מהנעלמים, x ו- y, אי-זוגי.

התשובה הנכונה היא (2).

מספרים חיוביים ושליליים

מספר חיובי: מספר גדול מ- 0.

מספר שלילי: מספר קטן מ- 0.

כלל: 0 אינו מספר חיובי ואינו מספר שלילי.

פעולת הכפל והשפעתה על מספרים חיוביים ושליליים:

להלן טבלה שמציגה את החיוביות או השליליות של כפל מספרים זה בזה.
מכיוון שחילוק הוא כפל בהופכי, ההשפעות של חיוביות או שליליות על חלוקה של זוג מספרים זהה להשפעה בעת כפל.

חיובי	$\times$	חיובי	$=$	חיובי
שלילי	$\times$	שלילי	$=$	חיובי
חיובי	$\times$	שלילי	$=$	שלילי

שאלה לדוגמה – חיוביות ושליליות

נתון: x הוא מספר זוגי.

ערך הביטוי $\frac{x^2 - x}{2}$ הוא בהכרח -

(1) מספר חיובי
(2) מספר שלילי
(3) מספר שאינו שלם
(4) מספר שלם

נתון כי x הוא מספר זוגי. מכפלה של מספר זוגי בכל מספר תביא תמיד לתוצאה זוגית. מכך נובע כי גם x^2 הוא מספר זוגי.

ההפרש בין מספר זוגי למספר זוגי אחר הוא תמיד זוגי. מכאן ש- $x^2 - x$ הוא מספר זוגי.

מספר זוגי לחלק ל- 2 יכול להביא לתוצאה זוגית $\frac{4}{2} = 2$, אי-זוגית $\frac{2}{2} = 1$ או אפילו לאפס $\frac{0}{2} = 0$.

בכל מקרה, מספר זוגי לחלק ל- 2 יביא לתוצאה שהיא מספר שלם.
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – חיוביות ושליליות

תוצאת המכפלה של שני מספרים עוקבים שלפחות אחד מהם שלילי, **לא יכולה** להיות-

(1) חיובית (2) שלילית (3) שווה ל- 0 (4) גדולה מ- 1

<u>פתרון:</u>

נתון בשאלה כי שני המספרים עוקבים ולפחות אחד מהם שלילי.

לכן, ישנן שתי אפשרויות:

א. אם בדיוק אחד מהם שלילי, מדובר בזוג המספרים -1 ו- 0. מכפלתם שווה ל- 0 $0\cdot(-1)=0$.

ב. אם שני המספרים שליליים, תוצאת המכפלה הייתה חיובית ותמיד גדולה מ- 1. למשל: $-1\cdot-2=2$.

התוצאה היחידה שלא נוכל להגיע אליה היא שלילית, כיוון שזו תתקבל רק ממכפלה של מספר שלילי בחיובי.

התשובה הנכונה היא (2).

<u>מספרים עוקבים</u>

מספרים עוקבים הם מספרים שלמים שביניהם הפרש של 1.

מספרים עוקבים יכולים להיות חיוביים (לדוגמה: 1,2,3,4), שליליים (לדוגמה: -5,-4,-3) או לכלול את המספר 0 (לדוגמה: 1, 0, -1).

שאלה לדוגמה – מספרים עוקבים

נתונים שלושה מספרים עוקבים a, b ו- c שאחד מהם הוא 0.

נתון: $a<b<c$

$a\cdot c<0$

$a+b+c=?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

<u>פתרון:</u>

כיוון ש- $a\cdot c<0$, נסיק כי אחד מהמספרים שלילי והאחר – חיובי. ידוע כי $a<b<c$, ולכן נסיק כי a שלילי ו- c חיובי.

נתון שאחד מהמספרים הוא 0, והסקנו כי a שלילי ו- c חיובי, מכאן ש- $b=0$. לכן, נוכל לקבוע כי $a=-1$ ו- $c=1$.

כעת, נוכל לחשב את הביטוי המבוקש ולמצוא כי $a+b+c$ שווה ל- $-1+0+1=0$. התשובה הנכונה היא (4).

שאלה לדוגמה – מספרים עוקבים

נתונים a, b ו- c מספרים עוקבים כך ש- $a<b<c$.

$\frac{a+c}{b^2}=?$

(1) $1+\frac{1}{a^2}$ (2) $\frac{2}{a+1}$ (3) $a+1$ (4) לא ניתן לדעת

<u>פתרון:</u>

על אף שבביטוי שלפנינו 3 נעלמים שונים, מדובר במספרים עוקבים שבהם ההפרש בין מספר אחד לבא אחריו או לפניו ידוע ושווה ל-1.

לכן, מספיק שנציב ערך בנעלם אחד כדי שנוכל לפתור תרגיל ביטויים זה בהצבה. נציב: $a=1$, ומכאן ש- $b=2$ ו- $c=3$.

כעת, נציב את ערכי הנעלמים בביטוי $\frac{a+c}{b^2}$ ונקבל $\frac{1+3}{2^2}=1$. נציב בתשובות $a=1$ ונמצא כי תשובה (2) נכונה - $\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$.

לחילופין, מכיוון שמדובר במספרים עוקבים - ניתן להביע כל אחד מהנעלמים באמצעות a והמרחק של הנעלם ממנו.

נקבע כי $b=a+1$ ו- $c=a+2$. נציב את ערכי הנעלמים בביטוי המבוקש $\frac{a+c}{b^2}$ ונמצא כי הוא שווה ל- $\frac{2a+2}{(a+1)^2}=\frac{a+a+2}{(a+1)^2}$. נוציא גורם משותף 2 מהמונה: $\frac{2\cdot(a+1)}{(a+1)^2}$. נצמצם ב- $(a+1)$ ונקבל: $\frac{2}{(a+1)}$.

התשובה הנכונה היא (2).

מספרים ראשוניים

מספר ראשוני הוא מספר **חיובי** המתחלק ללא שארית בשני מספרים **בדיוק**: ב- 1 ובעצמו.
לדוגמה: 7 הוא מספר ראשוני כיוון ששני המספרים היחידים שהוא מתחלק בהם ללא שארית הם 7 ו- 1.
שימו לב:
1 אינו מספר ראשוני, שכן הוא מתחלק במספר אחד בלבד (1) ולא בשני מספרים שונים.
2 הוא המספר הראשוני היחיד שהינו **זוגי**, שכן לכל מספר זוגי אחר שלושה מחלקים לפחות; הוא מתחלק ללא שארית בעצמו, ב- 1 וב- 2 לכל הפחות ולכן לא יכול להיות ראשוני.

רשימת המספרים הראשוניים שכדאי לזכור: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

שאלה לדוגמה – מספרים ראשוניים

אם נעלה בריבוע את מספר המספרים הראשוניים בין 6 ל- 26 נקבל -

(1) 36 (2) 25 (3) 16 (4) 49

פתרון:
המספרים הראשוניים בין 6 ל- 26 הם 7, 11, 13, 17, 19, 23. מכאן שישנם 6 מספרים ראשוניים בטווח זה.
אם נעלה את מספרם בריבוע נקבל $6^2 = 36$.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – מספרים ראשוניים

בין 21 לבין a יש בדיוק 3 מספרים ראשוניים.

איזה מהמספרים הבאים **אינו** יכול להיות a?

(1) 32 (2) 12 (3) 36 (4) 10

פתרון:
כיוון שאיננו יודעים למה שווה a, חשוב לזכור כי **ייתכן** ש- a קטן מ-21.
נבדוק איזה מהמספרים שבתשובות **לא** עונה על הנתון "בין 21 לבין a יש 3 מספרים ראשוניים בדיוק":
תשובה (1): נניח כי $a = 32$. מכאן שבין 21 לבין 32, יש 3 מספרים ראשוניים: 23, 29 ו- 31. התשובה נפסלת.
תשובה (2): נניח כי $a = 12$. מכאן שבין 12 לבין 21, יש 3 מספרים ראשוניים: 13, 17 ו- 19. התשובה נפסלת.
תשובה (3): נניח כי $a = 36$. מכאן שבין 21 לבין 36, יש 3 מספרים ראשוניים: 23, 29 ו- 31. התשובה נפסלת.
תשובה (4): נניח כי $a = 10$. מכאן שבין 10 לבין 21, יש 4 מספרים ראשוניים, ולא 3, כפי שנתון בשאלה: 11, 13, 17 ו- 19. זו התשובה הנכונה. התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – מספרים ראשוניים

x ו- y הם מספרים ראשוניים.

נתון: $3x + y = 14$, $1 < x < y$.

x שווה בהכרח ל-

(1) 5

(2) 2

(3) 3

(4) 7

<u>פתרון:</u>

נבדוק את התשובות האפשריות:

תשובה (1): אם $x = 5$, המשוואה היא $3 \cdot 5 + y = 14$. כלומר, $15 + y = 14$. לפי משוואה זו, y יהיה מספר שלילי בסתירה לנתון כי הוא מספר ראשוני. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם $x = 2$, המשוואה היא $3 \cdot 2 + y = 14$. כלומר, $6 + y = 14$. לפי משוואה זו, $y = 8$, אך נתון כי y הוא מספר ראשוני ולכן הוא לא יכול להיות זוגי. התשובה נפסלת.

בנוסף, סכום המספרים (14) הוא מספר זוגי. סכום זוגי מתקבל רק כאשר שני המספרים אי-זוגיים, או ששניהם זוגיים.
כיוון שגם x וגם y ראשוניים ושונים זה מזה, לא ייתכן כי שניהם זוגיים. מכאן כי שניהם אי-זוגיים, ולכן תשובה (2) נפסלת.

תשובה (3): אם $x = 3$, המשוואה היא $3 \cdot 3 + y = 14$. כלומר, $9 + y = 14$. לפי משוואה זו, $y = 5$, ואכן נתון כי y הוא מספר ראשוני. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): אם $x = 7$, המשוואה היא $3 \cdot 7 + y = 14$. כלומר, $21 + y = 14$. לפי משוואה זו, y יהיה מספר שלילי בסתירה לנתון כי הוא מספר ראשוני. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

מספרים נגדיים

מספרים נגדיים הם זוג מספרים שסכומם שווה ל- 0. כלומר, מרחקם של זוג מספרים נגדיים מ- 0 זהה.

המספר הנגדי של x הוא $(-x)$.

לדוגמה: 8 ו- (-8) הם מספרים נגדיים כיוון שסכומם שווה ל- 0 $8+(-8)=0$. מרחקם מ- 0 זהה ושווה ל- 8.

שאלה לדוגמה – מספרים נגדיים

מה הממוצע של שני מספרים נגדיים?

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) לא ניתן לדעת

<u>פתרון:</u>

ממוצע של קבוצת איברים הוא סכום האיברים לחלק למספר האיברים.

מספרים נגדיים הם זוג מספרים שסכומם שווה ל-0, ומכאן שהממוצע שלהם שווה ל- $\frac{0}{2}=0$.

התשובה הנכונה היא (3).

מספרים הופכיים

מספרים הופכיים הם זוג מספרים שתוצאת מכפלתם שווה ל- 1.

לדוגמה: 2 ו- $\frac{1}{2}$ הם מספרים הופכיים כיוון ש- $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$.

כלל: ל- 0 אין מספר הופכי.

שאלה נוספת – מספרים הופכיים

נתון: B ו- G הם מספרים הופכיים.

איזה מהבאים נכון **בהכרח**?

(1) $B = \frac{G}{3}$

(2) $\frac{B}{G} = \frac{B}{2G}$

(3) $B^3 - G^{-3} = 0$

(4) $|B| = \frac{1}{G}$

פתרון:

נבדוק עבור איזה זוג מהתשובות, תוצאת מכפלתם היא **בהכרח** 1.

תשובה (1): לפי משוואה זו, מכפלת הנעלמים $B \cdot G$ שווה ל- $\frac{G^2}{3} = \frac{G}{3} \cdot G$. אין מספר שלם וחיובי עבורו $\frac{G^2}{3} = 1$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): נפתח משוואה זו בעזרת כפל בהצלבה ונקבל $2GB = GB$. נחלק ב- GB ונקבל: $2 = 1$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): לפי חוקי חזקות, ניתן להציג חזקה שלילית באופן הבא $B^3 - \frac{1}{G^3} = 0$. נעביר אגפים ונקבל $B^3 = \frac{1}{G^3}$.

מעריך אי-זוגי אינו משנה סימן של בסיס החזקה. לכן, כאשר נוציא שורש שלישי משני אגפי המשוואה נמצא כי $B = \frac{1}{G}$.

מכאן ש- B ו- G הם זוג מספרים הופכיים, שכן מכפלתם שווה ל- $B \cdot G = \frac{1}{G} \cdot G = 1$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): לפי הגדרת הערך המוחלט, ייתכן כי $B = \frac{1}{G}$ ומנגד ייתכן כי $B = -\frac{1}{G}$.

לפי האפשרות הראשונה, B ו- G הם זוג מספרים הופכיים שמכפלתם שווה ל- $B \cdot G = \frac{1}{G} \cdot G = 1$, בעוד שלפי האפשרות השנייה מכפלתם תהיה שווה ל- $B \cdot G = -\frac{1}{G} \cdot G = -1$.

התשובה הנכונה היא (3).

סוף שיעור, בהצלחה בתרגול!

שיעור מחלקים וכפולות

מבוא

בשיעור זה נערוך היכרות עם מושגים מעולם המחלקים והכפולות.
בסוף השיעור נדע כיצד לזהות בזריזות את המחלקים של מספר, כיצד לקשור ולהבדיל בין תכונות מעולם המספרים השלמים לעולם סימני החלוקה וגם כיצד לבנות ביטוי המכיל שארית.
הכלים השימושיים שנרכוש ישמשו אותנו בשאלות סימני חלוקה כמו גם בשאלות המשלבות נושאים נוספים, כמו משוואות ואי-שוויונות.

סימני חלוקה

סימן חלוקה הוא "מבחן" שמאפשר לנו לקבוע האם מספר מתחלק **ללא שארית** במספר אחר במהירות וללא חישוב מורכב.
נסקור את הכללים שאנו ממליצים לזכור בעל פה.

חלוקה ב-2

כלל: כל מספר אשר ספרת האחדות שלו היא זוגית, כלומר 2, 4, 6, 8 או 0, הוא מספר זוגי, ולכן מתחלק ב- 2 ללא שארית.

לדוגמה: ספרת האחדות של המספר 120,798 היא 8. כיוון ש- 8 הוא מספר זוגי, המספר 120,798 הינו זוגי ומתחלק ב- 2 ללא שארית.

חלוקה ב-3

כלל: כל מספר שסכום הספרות שלו מתחלק ב- 3 ללא שארית, מתחלק גם הוא ב- 3 ללא שארית.

לדוגמה: סכום הספרות של 126 הוא $1+2+6=9$. כיוון ש- 9 מתחלק ב- 3 ללא שארית, נסיק כי 126 מתחלק גם הוא ב- 3 ללא שארית.

חלוקה ב-4

כלל: כל מספר שספרות העשרות והאחדות שלו יוצרות מספר דו ספרתי המתחלק ב- 4 ללא שארית, מתחלק גם הוא ב- 4 ללא שארית.

לדוגמה: ספרות העשרות והאחדות במספר 192,940 יוצרות את המספר 40 שמתחלק ב-4 ללא שארית, ולכן המספר 192,940 מתחלק אף הוא ב- 4 ללא שארית.

הערה: כל מספר שמסתיים בספרות 00 מתחלק ב- 4 (למשל 100 חלקי 4 שווה ל- 25).

חלוקה ב-5

כלל: כל מספר שספרת האחדות שלו היא 5 או 0 מתחלק ב- 5 ללא שארית.

לדוגמה: ספרת האחדות במספר 29,805 היא 5, ולכן המספר מתחלק ב- 5 ללא שארית.

חלוקה ב-6

כלל: כל מספר המתחלק ללא שארית ב- 2 **וגם** ב- 3 על פי הכללים הרשומים מעלה, מתחלק ללא שארית גם ב- 6.

לדוגמה: המספר 1,932 מתחלק ללא שארית ב- 2 כיוון שספרת האחדות שלו היא 2, כלומר זוגית. בנוסף לכך, סכום הספרות של המספר 1,932 הוא $1+9+3+2=15$. כיוון ש- 15 מתחלק ללא שארית ב- 3, גם המספר 1,932 מתחלק ללא שארית ב- 3.
כלומר, המספר 1,932 מתחלק ללא שארית גם ב- 2 וגם ב- 3, ולכן הוא מתחלק ללא שארית ב- 6.

חלוקה ב-7

כלל: נחסר מהמספר ללא ספרת האחדות את ספרת האחדות מוכפלת ב- 2 . אם המספר שנוצר מתחלק ב- 7 , גם המספר המקורי מתחלק ב- 7 .

לדוגמה: נבחן את המספר 721. נחסר מהמספר 72 את המספר $2\cdot 1$ ונקבל $72-2=70$. כיוון ש- 70 מתחלק ב- 7 ללא שארית, גם 721 מתחלק ב- 7 ללא שארית.

לחלופין, אנו יודעים ש- 700 מתחלק ב- 7 ללא שארית. מכאן, נוסיף 7 ועוד 7 ועוד 7 ונקבל 721. כלומר, גם 721 מתחלק ב- 7.

בדרך דומה, 723 לא מתחלק ב- 7.

חלוקה ב-8

כלל: כל מספר שבו ספרות המאות, העשרות והאחדות יוצרות מספר תלת ספרתי המתחלק ב- 8 ללא שארית, מתחלק בעצמו ב-8 ללא שארית. כלל זה מתאים למספרים הגבוהים מ- 999 .

לדוגמה: ספרות המאות, העשרות והאחדות במספר 192,800 יוצרות את המספר 800 שמתחלק ב- 8 ללא שארית, ומכאן

כלל : אם מספר אינו מתחלק ב- 4 הוא אינו יכול להתחלק ב- 8. כלל זה יעזור לנו לעתים לפסול תשובות.

שהמספר 192,800 מתחלק גם הוא ב- 8 ללא שארית.

חלוקה ב-9

כלל: כל מספר אשר סכום הספרות שלו מתחלק ב- 9 ללא שארית, מתחלק גם הוא ב-9 ללא שארית.

לדוגמה: סכום הספרות של 126 הוא $1+2+6=9$. כיוון ש- 9 מתחלק ללא שארית ב- 9, נדע ש- 126 מתחלק גם הוא ב- 9 ללא שארית.

חלוקה ב-10

כלל: כל מספר שספרת האחדות שלו היא 0 מתחלק ב- 10 ללא שארית.

לדוגמה: ספרת האחדות במספר 79,400 היא 0, לכן המספר 79,400 מתחלק ב- 10 ללא שארית.

חלוקה ב-11

<u>מספר דו ספרתי:</u> כל מספר דו ספרתי שספרת האחדות בו זהה לספרת העשרות מתחלק ב- 11 ללא שארית. לדוגמה : 11, 33, 66.

<u>מספר תלת ספרתי:</u> כל מספר תלת ספרתי שבו הסכום של ספרת האחדות והמאות פחות ספרת העשרות נותן תוצאה המתחלקת ב- 11 ללא שארית, מתחלק גם הוא ב-11 ללא שארית.

לדוגמה: סכום ספרת האחדות וספרת המאות במספר 319 הוא $3+9=12$. אם נחסר ממנו את ספרת העשרות (1), נקבל :

$12-1=11$. מכיוון ש- 11 מתחלק ללא שארית ב- 11 גם המספר 319 מתחלק ללא שארית ב- 11.

שאלה לדוגמה – סימני חלוקה

x הוא מספר שלם וחיובי.

הביטוי $126x+165$ מתחלק **בהכרח** ב-

(1) 7 (2) 2 (3) 3 (4) 11

פתרון:

כדי שהביטוי $126x+165$ יתחלק במספר מסוים, גם $126x$ וגם 165 צריכים להתחלק במספר זה ללא שארית.
כלומר, הביטוי מתחלק בגורמי החלוקה המשותפים של שני רכיבי הביטוי.

לא ידוע לנו ערכו של x. עם זאת, המספר $126x$ בהכרח מתחלק בכל המחלקים של 126.
$126x$ מתחלק ב-2 כיוון ש-126 הוא מספר זוגי, ומספר זוגי כפול כל מספר x אחר נותן תוצאה זוגית.
$126x$ מתחלק גם ב-3 כיוון שסכום ספרותיו של 126 מתחלק ב-3 ללא שארית ($1+2+6=9$).
כיוון שמצאנו כי 126 מתחלק ללא שארית ב-2 וגם ב-3, הוא מתחלק גם ב-6.
אם מחסרים מהמספר ללא ספרת האחדות (12) את ספרת האחדות (6) מוכפלת ב-2 מקבלים $12-2\cdot 6=0$. כידוע, 0 מתחלק בכל מספר ללא שארית, ומכאן ש-126 מתחלק גם ב-7.
מצאנו ש-$126x$ מתחלק ללא שארית ב-2, 3, 6 ו-7.

המספר 165 מתחלק ב-3 כיוון שסכום ספרותיו מתחלק ב-3 ללא שארית ($1+6+5=12$).
המספר 165 מתחלק ללא שארית גם ב-5 כיוון שספרת האחדות שלו שווה ל-5.
בנוסף, המספר 165 מתחלק ללא שארית גם ב-11 כיוון שספרת העשרות שלו (6) שווה לסכום ספרת האחדות וספרת המאות ($1+5=6$).
מצאנו ש-165 מתחלק ללא שארית ב-3, 5 ו-11.

לפיכך, הביטוי $126x+165$ מתחלק בהכרח ב-3 ללא שארית, שהוא המחלק המשותף היחיד.
התשובה הנכונה היא (3).

כלל: כדי שביטוי יתחלק במספר מסוים, על המספר להיות מחלק של כל אחד מרכיבי הביטוי.

מציאת המחלקים של מספר

מחלק (גורם) הוא כל מספר **שלם** ו**חיובי** שבו מתחלק מספר מסוים שגם הוא שלם וחיובי, **ללא שארית**.

לדוגמה: המחלקים של 8 הם 8, 4, 2 ו- 1. זאת מכיוון ש- 8 מתחלק ללא שארית בכל ארבעת המחלקים הללו.

כלל: אם נחלק מספר במחלק שלו, נקבל תוצאה שגם היא מחלק של אותו מספר.

לדוגמה: אם נחלק את 24 ב- 2, תוצאת החלוקה היא $\frac{24}{2}=12$. תוצאת החלוקה שקיבלנו, 12, היא בעצמה מחלק של 24,

שכן המספר 24 מתחלק ב- 12 ללא שארית - $\frac{24}{12}=2$.

שימו לב: משמעות המונח "מחלק" זהה למשמעות המונח "גורם חלוקה".

<u>דוגמה למציאת המחלקים של מספר:</u>

נמצא את כל המחלקים של המספר 24 על ידי בדיקת המספרים שבין 1 ל- 24. נעזר בסימני החלוקה שלמדנו לזירוז התהליך.

ראשית, המספר 24 מתחלק ב- 1 ובעצמו. נרשום זאת כך: $24 \ ... \ 1$.

המספר 24 מתחלק גם ב- 2 ללא שארית כיוון שספרת האחדות בו זוגית, ותוצאת החלוקה היא 12. נרשום זאת:
$1 , 2 ... 12 , 24$

נמשיך בבדיקה - המספר 24 מתחלק גם ב- 3 ללא שארית כיוון שסכום ספרותיו מתחלק ב- 3, ותוצאת החלוקה היא 8. נרשום זאת: $1 , 2 , 3 ... 8 , 12 , 24$.

לבסוף, המספר 24 מתחלק גם ב- 4 ללא שארית, ותוצאת החלוקה היא 6. נרשום זאת: $1 , 2 , 3 , 4 ... 6 , 8 , 12 , 24$

בין המספר 4 ל- 6, נמצא רק המספר השלם 5, מספר אי-זוגי. לכן, אין הוא יכול להיות מחלק של 24

סיימנו למצוא את כל המחלקים של המספר 24, והם: $1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24$

כלל: כדי למצוא את כל גורמי החלוקה השונים של מספר מסוים, נחלק את המספר במחלקים אפשריים ונרשום את תוצאת החלוקה. נפסיק לחלק את המספר כאשר בין המחלק האחרון שבדקנו ותוצאת החלוקה שהתקבלה – אין עוד מחלקים אפשריים.

שאלה לדוגמה - מחלקים

כמה מחלקים שונים יש למספר 100?

(1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10

פתרון:

ראשית, המספר 100 מתחלק ב- 1 ובעצמו. נרשום זאת כך: 1 ... 100

המספר 100 מתחלק גם ב- 2 ללא שארית, ותוצאת החלוקה היא 50. נרשום זאת: 1 , 2 . . . 50 , 100

נמשיך בבדיקה - המספר 100 מתחלק גם ב- 4 ללא שארית, ותוצאת החלוקה היא 25. נרשום זאת:
1 , 2 , 4 . . . 25 , 50 , 100

המספר 100 מתחלק גם ב- 5 ללא שארית, ותוצאת החלוקה היא 20. נרשום זאת: 1 , 2 , 4 , 5 . . . 20 , 25 , 50 , 100

לבסוף, המספר 100 מתחלק גם ב- 10 ללא שארית, ותוצאת החלוקה היא 10.

בין 5 ל- 10 אין עוד מחלקים אפשריים של 100.

סיימנו למצוא את כל גורמי החלוקה של המספר 100, והם: 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20 , 25 , 50 , 100

התשובה הנכונה היא (3).

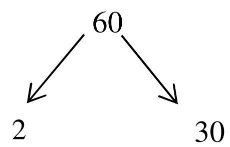
<u>מציאת המחלקים הראשוניים של מספר</u>

מחלק ראשוני הוא מחלק שהוא גם מספר ראשוני.

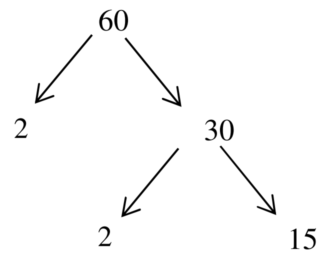
לדוגמה: המחלקים של 8 הם 8, 4, 2 ו- 1. מתוכם, רק 2 הוא גורם ראשוני של 8 (להסבר נוסף אודות מספרים ראשוניים עיינו בשיעור מספרים שלמים).

על מנת למצוא את כל המחלקים הראשוניים של מספר מסוים, נחלק את המספר במחלקים ראשוניים עד שנצמצם את המספר המקורי למספר ראשוני כלשהו. נמחיש זאת באמצעות עץ מחלקים.

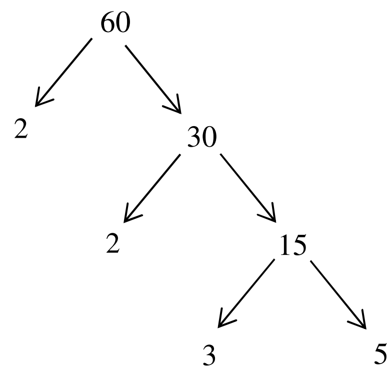
לדוגמה: נמצא את כל גורמי החלוקה הראשוניים של המספר 60 . המספר 60 מתחלק ב- 2 והתוצאה של חלוקה זו היא 30 .



כעת, נמשיך את אותו תהליך על המספר 30 . המספר 30 מתחלק גם כן ב- 2 , והתוצאה של חלוקה זו היא 15 .



המספר 15 מתחלק ב- 3 שהִינו גורם ראשוני, והתוצאה של חלוקה זו היא 5 . כיוון שגם התוצאה הִנה גורם ראשוני, לא נוכל לחלק אותה בעוד גורם.



לסיכום, המחלקים הראשוניים של 60 הם 2, 2, 3, 5 ובסך הכול ישנם 4 מחלקים ראשוניים המרכיבים את המספר 60 .

כלל: ניתן לכתוב כל מספר חיובי וגדול מ-1 כמכפלת כל המחלקים הראשוניים שלו. אם תוצאת הכפל בין כל גורמי הפירוק אינה המספר שאותו פירקנו למחלקים, עלינו לחפש היכן טעינו תוך כדי התהליך.

שימו לב: תוצאת מכפלת הגורמים הראשוניים של מספר היא המספר עצמו - $2\cdot2\cdot3\cdot5=60$.

שאלה לדוגמה – מחלקים ראשוניים

$a = 2^3 \cdot 6^4 \cdot 15$

באיזה מהמספרים הבאים a **אינו** מתחלק ללא שארית?

(1) 21 (2) 8 (3) 36 (4) 18

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי יש בביטוי a מכפלה בין איברים. אם נפרק את הביטוי a לגורמים ראשוניים, נקבל כי $a = 2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(3\cdot5)$. לכן, הביטוי a מתחלק בכל מכפלה של צירוף פנימי.

נבדוק את התשובות האפשריות:

תשובה (1): המחלקים הראשוניים של המספר 21 הם 3 ו-7. אלו מספרים ראשוניים ולכן חייבים להופיע בשלמותם בביטוי a כדי שהוא יתחלק בו ללא שארית. 7 לא מופיע בביטוי a, ולכן הוא אינו יכול להתחלק ללא שארית. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): המחלקים הראשוניים שמרכיבים את המספר 8 הם 2, 2 ו-2. בביטוי a מופיעים מחלקים אלה באיבר 2^3. כלומר, a מתחלק ללא שארית ב-8. התשובה נפסלת.

תשובה (3): המחלקים שמרכיבים את המספר 36 הם 6 ו-6. בביטוי a מופיעים מחלקים אלה באיבר 6^4. כלומר, a מתחלק ללא שארית ב-36. התשובה נפסלת.

תשובה (4): המחלקים הראשוניים שמרכיבים את המספר 18 הם 2, 3 ו-3. בביטוי a מופיעים מחלקים אלה באיבר 6^4, אשר שווה ל- $(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)$. כלומר, a מתחלק ללא שארית ב-18. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

מחלקים ראשוניים שונים זה מזה

מספר המחלקים הראשוניים של מספר מסוים עשוי להיות גדול ממספר הגורמים הראשוניים **השונים** של מספר זה.

לדוגמה: המחלקים הראשוניים של 6 הם 2 ו- 3, כלומר שני מחלקים ראשוניים שהם גם שני מחלקים שונים. המחלקים הראשוניים של 8 הם 2, 2 ו-2, כלומר שלוש פעמים אותו גורם. לכן, אם נישאל כמה מחלקים ראשוניים יש למספר 8 התשובה היא 3, אך אם נישאל כמה מחלקים ראשוניים **שונים** יש למספר 8 התשובה היא גורם 1.
בדוגמה של המספר 60, ראינו כי גורמי החלוקה הראשוניים הם 2, 2, 3, 5. כלומר – 4 מחלקים ראשוניים, ו- 3 מחלקים ראשוניים שונים.

שאלה לדוגמה – מחלקים שונים

למי מהמספרים הבאים יש את מספר המחלקים הראשוניים השונים הרב ביותר?

(1) 20 (2) 42 (3) 49 (4) 75

פתרון:
נבדוק כל אחת מהתשובות כפי שלמדנו:

תשובה (1): המספר 20 מתחלק במספר הראשוני 2 ללא שארית, שכן $10 = \frac{20}{2}$. המספר 10 מתחלק במספר הראשוני 5 ללא שארית, שכן $2 = \frac{10}{5}$. המספר 2 לא מתחלק באף מספר ראשוני אחר, מלבד עצמו. לכן, למספר 20 יש שני מחלקים ראשוניים ושונים - 2 ו- 5.

תשובה (2): המספר 42 מתחלק במספר הראשוני 2 ללא שארית, שכן $21 = \frac{42}{2}$. המספר 21 מתחלק במספר הראשוני 3 ללא שארית, שכן $7 = \frac{21}{3}$. המספר 7 לא מתחלק באף מספר ראשוני אחר, מלבד עצמו. לכן, למספר 42 יש 3 מחלקים ראשוניים ושונים - 2, 3 ו- 7.

תשובה (3): המספר 49 מתחלק במספר הראשוני 7 ללא שארית, שכן $7 = \frac{49}{7}$. המספר 7 לא מתחלק באף מספר ראשוני אחר, מלבד עצמו. לכן, למספר 49 יש מחלקים ראשוניים ושונה אחד - 7.

תשובה (4): המספר 75 מתחלק במספר הראשוני 5 ללא שארית, שכן $15 = \frac{75}{5}$. המספר 15 מתחלק במספר הראשוני 3 ללא שארית, שכן $5 = \frac{15}{3}$. המספר 5 לא מתחלק באף מספר ראשוני אחר, מלבד עצמו. לכן, למספר 75 יש שני מחלקים ראשוניים ושונים - 5 ו- 3. נשים לב שמספר המחלקים של המספר 42 הוא הגדול ביותר.
התשובה הנכונה היא (2).

<u>מחלקים משותפים</u>

מחלק משותף הוא מספר **שלם** ו**חיובי** מסוים שבו מתחלקים שני מספרים שונים, ללא שארית.
לדוגמה: מחלק משותף של 6 ו- 8 הוא 2. זאת מכיוון שגם 6 וגם 8 מתחלקים שניהם ב- 2 ללא שארית.

שימו לב: לשני מספרים עשויים להיות כמה מחלקים משותפים.
לדוגמה: במקרה של 12 ו-16 המחלקים המשותפים שלהם הם 1, 2 ו- 4.

שאלה לדוגמה – מחלקים משותפים

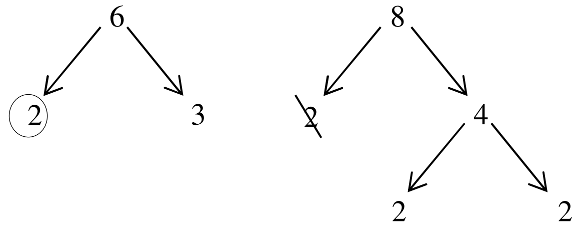
אור: כל מספר שמתחלק ב- 8 וב- 6 מתחלק גם ב- 24.

לירון: כל מספר שמתחלק ב- 8 וב- 6 מתחלק גם ב- 48.

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) רק אור צודק
(2) רק לירון צודק
(3) גם אור וגם לירון צודקים
(4) גם אור וגם לירון טועים

<u>**פתרון:**</u>
כדי לבדוק אם אור או לירון צודקים, נמצא את המספר הקטן ביותר אשר מתחלק גם ב- 6 וגם ב- 8.
נעשה זאת באמצעות המחלקים הראשוניים של 6 ו- 8. נשים לב שמספר זה לא יכיל מחלקים משותפים "עודפים" של 6 ו- 8, אחרת היינו מקבלים מספר שאמנם מתחלק גם ב- 6 וגם ב- 8, אך אינו הקטן ביותר.
המחלקים הראשוניים של המספר 6 הם 2 ו- 3. המחלקים הראשוניים של המספר 8 הם 2, 2 ו- 2.



כעת, נכפול את כל המחלקים הראשוניים של 6 ו- 8 זה בזה. נזכור כי אם לשני המספרים ישנו מחלק משותף, נדאג שיופיע במכפלת המחלקים פעם **אחת** בלבד. המחלקים הראשוניים המשותפים הם "עודפים", ומספיק אחד מהם במכפלה כדי "לפצות" על העדר השני. המחלק הראשוני המשותף של שני המספרים הוא 2.
לכן, המספר הקטן שמתחלק ב- 6 וב- 8 הוא $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
ניתן לראות כי 24 מתחלק במכפלת כל המחלקים הראשוניים של 6 וגם במכפלת כל המחלקים הראשוניים של 8.
לעומת זאת, 24 לא מתחלק ב- 48 ללא שארית. מכאן שמצאנו כי כל מספר שמתחלק ב- 6 וב- 8 מתחלק בהכרח גם ב- 24, אבל לא מתחלק בהכרח ב- 48. לכן, אור צודק ולירון טועה.
התשובה הנכונה היא (1).

כלל: המספר הקטן ביותר שמתחלק בשני מספרים, x ו- y, יכול להיות **קטן יותר** ממכפלת שני המספרים זה בזה $x \cdot y$.

שאלה נוספת – מחלקים משותפים

N הוא מספר זוגי וחיובי.
למי מזוגות הביטויים הבאים יש את המספר **הרב ביותר** של מחלקים ראשוניים ומשותפים **בהכרח**?

(1) $N+10\ ;\ N+5$ **(2)** $N+6\ ;\ N+8$ **(3)** $12\ ;\ 6\cdot N+18$ **(4)** $N+7\ ;\ N$

<u>פתרון:</u>

ערכו של הנעלם N אינו ידוע לנו. אנו יודעים כי N זוגי וחיובי, ולכן הוא מתחלק ב- 2, מספר ראשוני, ללא שארית.
כדי שלזוג ביטויים יהיה מחלק משותף, עליו להתחלק **בהכרח** בכל רכיבי הביטויים.
נבדוק את התשובות האפשריות:

תשובה (1): אחד מהביטויים הוא אי-זוגי, ולכן לא ניתן לומר כי שניהם מתחלקים ב- 2 ללא שארית. כיוון שאיננו יודעים במה N מתחלק, מלבד ב- 2, לא נוכל להכריע האם הביטוי מתחלק ב- 5. אין בהכרח לזוג זה מחלקים משותפים.

תשובה (2): שני הביטויים הם זוגיים, ולכן מתחלקים ב- 2 ללא שארית. כיוון שאיננו יודעים במה N מתחלק, מלבד ב- 2, לא נוכל להכריע האם הביטוי מתחלק במחלקים נוספים. לזוג זה מחלק משותף וראשוני אחד בהכרח.

תשובה (3): שני הביטויים הם זוגיים, ולכן מתחלקים ב- 2 ללא שארית. בנוסף, כל רכיבי הביטויים הם כפולה של 3 ולכן מתחלקים ב- 3 ללא שארית. לזוג זה שני מחלקים ראשוניים משותפים בהכרח.

תשובה (4): הביטוי $N+7$ הוא סכום של מספר זוגי ומספר ראשוני אי-זוגי, ולכן מדובר בביטוי אי-זוגי. מכאן שהוא לא מתחלק ב- 2 ללא שארית. כיוון שאיננו יודעים במה N מתחלק, מלבד ב- 2, לא נוכל להכריע האם יש מחלקים משותפים נוספים לביטויים אלו. אין בהכרח לזוג זה מחלקים משותפים.
התשובה הנכונה היא (3).

כלל: לביטויים שונים מחלקים משותפים רק כאשר המחלקים מחלקים את כל הרכיבים של שני הביטויים.

<u>זוגיות, ראשוניות וסימני חלוקה</u>

בחלק משאלות הבחינה נראה שילוב בין המושגים שלמדנו בשיעור מספרים שלמים והמושגים מעולם סימני החלוקה.
השאלות עשויות לשלב ביטוי או משוואה. אנו נתבקש להסיק מסקנות מתוך נתונים אלה ולשייך את נתוני השאלה לעולם התוכן המתאים.

שאלה לדוגמה – שילוב מושגים

נתון: n מספר שלם וגדול מ-1.
מספר התותים של גלעד הוא מכפלת המספרים הראשוניים מ-1 עד n.
לירדן יש תות אחד.

סכום התותים של גלעד וירדן יחד בהכרח **אינו** -

(1) זוגי
(2) אי-זוגי
(3) מתחלק ב-7
(4) ראשוני

<u>פתרון:</u>

כיוון ש-n הוא מספר שלם וגדול מ-1, מכפלת המספרים הראשוניים מ-1 עד n בהכרח כוללת בתוכה את המספר 2.
כלומר, מספר התותים של גלעד הוא זוגי. מספר התותים של גלעד וירדן יחד הוא מספר זוגי ועוד 1, ומכאן שהוא אי-זוגי.
לכן, מספר התותים של גלעד וירדן יחד בהכרח **אינו** זוגי.
תשובה (3): אם $n = 3$, אז מספר התותים של גלעד שווה ל-$2 \cdot 3 = 6$. לכן, מספר התותים של גלעד וירדן יחד שווה ל-$6 + 1 = 7$. מכאן שהמספר מתחלק ב-7 והתשובה נפסלת.
תשובה (4): ראינו כי מספר התותים של גלעד וירדן יחד בהכרח **אינו** זוגי ועשוי להיות ראשוני. למעשה, סכום התותים של גלעד וירדן לא יכול להתחלק באף אחד מהמספרים הראשוניים מ-1 עד n, שכן אז שארית החלוקה תהיה 1. מכאן שסכום התותים של שניהם הוא **תמיד** מספר ראשוני.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – מחלקים במשוואה

n ו- k הם מספרים שלמים.

נתון: $n+1 = 2k \cdot (k+2)$

n בהכרח -

(1) זוגי
(2) אי-זוגי
(3) מתחלק ב- 5 ללא שארית
(4) לא מתחלק ב- 5 ללא שארית

__פתרון:__

באגף ימין של המשוואה מכפלה של מספר זוגי, $2k$, ב- $(k+2)$. לכן, באגף ימין מספר זוגי. מכאן שגם באגף שמאל צריך להיות מספר זוגי.

אגף שמאל מורכב מחיבור מספר שערכו לא ידוע n עם 1, מספר אי-זוגי. כיוון שתוצאת החיבור של n עם מספר אי-זוגי צריכה להיות מספר זוגי, נסיק כי n הוא מספר אי-זוגי בעצמו.

תשובות (3) ו-(4) אינן נכונות בהכרח, כיוון שאין אנו יודעים מה ערכו של n.

ייתכן כי $n = 5$ ו- $k = 1$, ובמקרה זה המשוואה מתקיימת: $5+1 = 2 \cdot (1+2)$. כלומר, $6 = 6$. במקרה זה n כן מתחלק ב- 5 ללא שארית.

לחילופין, ייתכן גם כי $n = 31$ ו- $k = 4$, וגם במקרה זה המשוואה מתקיימת: $31+1 = 8 \cdot (4+2)$. כלומר, $32 = 32$. במקרה זה n לא מתחלק ב- 5 ללא שארית.

התשובה הנכונה היא (2).

שארית

שארית היא החלק שנשאר מתוצאת חלוקה.
השארית קטנה מהמספר בו מחלקים, ולכן לא ניתן לחלק אותה שוב במספר זה ולקבל תוצאה שלמה.

לדוגמה: אם נחלק את המספר 5 ב-3 נקבל תוצאה של 1 עם שארית 2.
המספר 2 קטן מהמספר בו חילקנו, 3, ולכן הוא השארית.

שאלה לדוגמה – שארית

a הוא מספר שלם וחיובי. שארית החלוקה של a ב-2 היא 1.

מה שארית החלוקה של $(a+1)$ ב-3?

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרון:
אם שארית החלוקה של a ב-2 היא 1, נסיק כי a הוא מספר אי-זוגי.
כל מספר אי-זוגי הוא המספר הזוגי הקודם לו ועוד 1. לדוגמה: 3, מספר אי-זוגי, שווה ל-2 ועוד 1.
אם $a=3$, אז $(a+1)=4$ ושארית החלוקה של 4 ב-3 היא 1.

לעומת זאת, אם $a=5$, מספר אי-זוגי אחר, אז $(a+1)=6$. המספר 6 מתחלק ללא שארית ב-3 ושווה ל-$2=\frac{6}{3}$.

שימו לב: שארית חלוקה תמיד קטנה מהמספר בו מחלקים, ולכן לא ייתכן כי שארית החלוקה של $(a+1)$ ב-3 תהיה שווה ל-3 או גדולה ממנו.
התשובה הנכונה היא (4).

בניית ביטוי עם שארית חלוקה

כפולה היא מספר **שלם** המתחלק במספר מסוים ללא שארית.
לדוגמה: 9, 12 ו-81 הם כפולות של 3, כיוון שהם מתחלקים ב-3 ללא שארית.

בחלק מהשאלות נתון מספר שמתחלק במספר אחר, עם או בלי שארית.
במילים אחרות, כל מספר יכול להיות מוצג באופן הבא: **שארית** $+$ a $\times$ **מחלק** , כאשר a $\times$ **מחלק** הוא **כפולה** של המחלק.

בנייה זו תאפשר לנו ליצור משוואות ולהסיק מסקנות לגבי אופי הביטוי שנוצר.

לדוגמה: M הוא מספר אשר מתחלק ב-5 עם שארית 3.
M שווה ל**כפולה** של 5 ועוד 3.
לכן, נוכל לבנות את M באופן הבא- $5\cdot a+3$, כאשר $5\cdot a$ הוא כפולה של 5.

עבור כל מספר שנציב ב-a, נקבל מספר M שמתחלק ב-5 עם שארית 3.

שאלה נוספת – ביטוי עם שארית

נתון: $y=\frac{3x}{\sqrt{5}}$, y הוא מספר שלם וחיובי שמתחלק ב-6 ללא שארית.

x^2 בהכרח -

(1) מתחלק ב-5 ללא שארית
(2) אינו מספר שלם
(3) מתחלק ב-3 עם שארית 1
(4) שווה ל-20

פתרון:
y הוא מספר שלם וחיובי שמתחלק ב-6 ללא שארית, ולכן נוכל לבנות אותו באופן הבא: $6\cdot a$ (כאשר a יכול להיות כל מספר שלם וחיובי).

לכן, נוכל להציב במשוואה הנתונה $y=6a$, המשוואה תהיה $6a=\frac{3x}{\sqrt{5}}$

נבודד את הנעלם x ונמצא כי $2\sqrt{5}a=x$. מהעלאת שני אגפי המשוואה בריבוע, נראה כי $20a^2=x^2$

כלומר, x^2 הוא כפולה כלשהי של המספר 20 ולכן מתחלק ב-5 ללא שארית.
התשובה הנכונה היא (1).

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!