בעיות כמותיות

בעיות הסתברות

בעיות הסתברות

רצוי מתוך מצוי

<u>מבוא</u>

בבעיות הסתברות לרוב נישאל **מה הסיכוי** להתרחשותו של מאורע מסוים.
נוסף על כך, לרוב, הסיכוי ייוצג על ידי שבר בין 0 ל-1, אך ייתכן שייוצג גם על ידי אחוזים, שכן אחוזים הם בסך הכול שברים.
אם נתון לנו שהסיכוי להתרחשותו של מאורע מסוים הוא 0, ניתן לקבוע כי המאורע **לא יתרחש**.
כמו כן, אם נתון לנו שהסיכוי להתרחשותו של מאורע מסוים הוא 1, ניתן לקבוע כי המאורע **יתרחש בוודאות**.
מכאן שככל שהסיכוי להתרחשותו של מאורע קרוב ל-1 - **גדל** הסיכוי שהוא יקרה.
לעומת זאת, ככל שהסיכוי להתרחשותו של מאורע קרוב ל-0 - **קטן** הסיכוי שהוא יקרה.

<u>לדוגמה:</u>

כידוע, למטבע ישנם 2 צדדים - "עץ" ו"פלי".
לפיכך, כאשר אנו מטילים מטבע, יכולות להתקבל שתי אפשרויות - המטבע ינחת על "עץ" או שינחת על "פלי".
אם אנו רוצים שהמטבע ייפול על הצד "עץ", אנו למעשה **רוצים** שתתקבל אפשרות **אחת** מתוך **שתיים מצויות**.
כדי לייצג את האמור לעיל בשבר, נחלק את ה**רצוי** ב**מצוי** - $\frac{1}{2}$.
לפיכך, הסיכוי לקבל "עץ" בהטלת מטבע הוגן הוא $\frac{1}{2}$.
כמובן שאילו היינו רוצים לקבל "פלי", הסיכוי היה זהה - $\frac{1}{2}$.

מכאן שה**סיכוי** להתרחשות מאורע מסוים הוא תוצאת החלוקה של ה**רצוי** ב**מצוי**:

$$\text{סיכוי} = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}} = \frac{\text{האפשרויות בהן אנו מעוניינים}}{\text{סך האפשרויות הקיימות}}$$

לכן, אם נחזור לדוגמה שהוצגה לעיל, האפשרות בה היינו מעוניינים הייתה "עץ", והייתה אפשרות **אחת** כזו.
האפשרויות הקיימות היו **שני** צידי המטבע - "עץ" ו"פלי".
על כן, חילקנו את 1 ב-2 - $\frac{1}{2}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

קובייה הוגנת היא קובייה בעלת 6 פאות, שעליהן מופיעות הספרות 1-6 (על כל פאה ספרה אחת).
אם נידרש לחשב את ההסתברות שבהטלת קובייה יתקבל המספר 3, יהיה עלינו - כמו ברוב שאלות ההסתברות - **לחלק** את ה**רצוי** ב**מצוי**.
הספרה 3 מופיעה על **אחת** מפאות הקובייה, ועל כן אנו מעוניינים באפשרות **אחת**.
לקובייה ישנן **6** פאות, ועל כן סך האפשרויות הקיימות הוא **6**.
לפיכך, ההסתברות לכך שבהטלת קובייה יתקבל המספר 3 היא: $\frac{1}{6}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>
מה הסיכוי לקבל מספר זוגי בהטלת קובייה הוגנת?

כדי לענות על שאלה זו, עלינו למצוא את האפשרויות בהן אנו מעוניינים, כלומר את המספרים הזוגיים - 2, 4 ו-6 (**3** אפשרויות).
את מספר האפשרויות בהן אנו מעוניינים, נחלק בסך האפשרויות הקיימות, כלומר בסך המספרים הקיימים - 1-6 (**6** אפשרויות): $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$.

לפיכך, הסיכוי לקבל מספר זוגי בהטלת קובייה הוגנת הוא $\frac{1}{2}$.

כמובן שאילו היינו נשאלים מה הסיכוי לקבל מספר אי-זוגי בהטלת קובייה הוגנת, היינו מקבלים תוצאה זהה, שכן ישנם **3** מספרים אי-זוגיים (1, 3 ו-5) מתוך **6** מספרים אפשריים - $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$.

שאלה לדוגמה - רצוי מתוך מצוי

בבית הספר "הרצל" לומדים 120 תלמידים, מתוכם 30 מרכיבים משקפיים.
בבית הספר "ביאליק" לומדים 60 תלמידים, מתוכם 30 מרכיבים משקפיים.
תלמידי שני בתי הספר השתתפו כולם יחד בתחרות ריצה ולכל אחד מהם סיכוי שווה לזכות.

מה הסיכוי שהמנצח בתחרות **אינו** מרכיב משקפיים?

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{3}{4}$

<u>פתרון</u>
כדי למצוא את הסיכוי לכך שהמנצח **אינו** מרכיב משקפיים, עלינו למצוא את ה**רצוי** (מספר התלמידים ש**אינם** מרכיבים משקפיים) ולחלקו ב**מצוי** (סך התלמידים שהשתתפו בתחרות).
אם בבית הספר "הרצל" 30 תלמידים מרכיבים משקפיים, אזי 90 תלמידים אינם מרכיבים משקפיים ($120-30=90$).
אם בבית הספר "ביאליק" 30 תלמידים מרכיבים משקפיים, אזי 30 תלמידים אינם מרכיבים משקפיים ($60-30=30$).
אם כן, סך כול התלמידים ש**אינם** מרכיבים משקפיים הוא: $30+90=120$.
כמו כן, סך כול התלמידים שהשתתפו בתחרות הוא: $60+120=180$.
כאמור, עלינו **לחלק** את ה**רצוי** ב**מצוי**: $\frac{2}{3}=\frac{120}{180}$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - רצוי מתוך מצוי

בקופסה x קלפים: 12 שחורים והשאר לבנים.

ההסתברות להוציא קלף לבן באופן אקראי היא $\frac{1}{5}$.

$x = ?$

(1) 20

(2) 15

(3) 3

(4) 60

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

נבטא את הסיכוי להוצאת קלף לבן (מספר הקלפים הלבנים בקופסה חלקי מספר הקלפים הכולל בה) באמצעות x, ולאחר מכן נשווה את הביטוי ל-$\frac{1}{5}$, שכן נתון כי זה הסיכוי להוצאת קלף לבן.

בקופסה ישנם x קלפים ומתוכם 12 קלפים שחורים, ועל כן מספר הקלפים הלבנים הוא: $x-12$.

אם כן, מספר הקלפים הלבנים חלקי מספר הקלפים הכולל הוא: $\frac{x-12}{x}$.

כאמור, נשווה את הביטוי אשר מייצג את הסיכוי להוצאת קלף לבן ל-$\frac{1}{5}$:

$\frac{1}{5}=\frac{x-12}{x}$. לאחר מכן, נבצע כפל בהצלבה: $5\cdot(x-12)=1\cdot x$.

נבצע את הכפל בשני האגפים ולאחר מכן נבודד את x: $4x=60$.

כעת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-4 ונקבל: $x=15$.

דרך ב' - בדיקת תשובות:

אחת מהתשובות מייצגת את מספר הקלפים הכולל בקופסה. לפיכך, ניתן לבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתון הנוסף - לפיו ההסתברות להוצאת קלף לבן באופן אקראי היא $\frac{1}{5}$:

תשובה (1): אם ישנם 20 קלפים בקופסה, ישנם 8 קלפים לבנים ($20-12=8$).

לפיכך, ההסתברות להוציא קלף לבן היא: $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אם ישנם 15 קלפים בקופסה, ישנם 3 קלפים לבנים ($15-12=3$).

לפיכך, ההסתברות להוציא קלף לבן היא: $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): לא ייתכן שישנם 3 קלפים בקופסה, שכן נתון שישנם 12 קלפים שחורים. התשובה נפסלת.

תשובה (4): אם ישנם 60 קלפים בקופסה, ישנם 48 קלפים לבנים ($60-12=48$).

לפיכך, ההסתברות להוציא קלף לבן היא: $\frac{4}{5}=\frac{48}{60}$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

מספר אירועים - אירועים שונים

עד כה נגענו בסיכוי להתרחשות מאורע אחד בלבד. אולם, בבחינה ייתכנו שאלות שמורכבותן מעט גבוהה יותר והן יכללו מספר מאורעות. בשיעור הזה, נעסוק בקשרים השונים ("**או**" ו"**וגם**") שייתכנו בין המאורעות.
הטלת שתי קוביות בזו אחר זו למשל, היא דוגמה לשני מאורעות.

<u>לדוגמה:</u>
אורי מטיל שתי קוביות שפאותיהן ממוספרות 1-6 בזו אחר זו - קובייה א' וקובייה ב'.
מה ההסתברות שבהטלת אחת מהן יתקבל המספר 6, ובהטלת השנייה יתקבל המספר 5?

כדי שנקבל את מבוקשנו, ישנן שתי אפשרויות:

1. בהטלת קובייה א' יתקבל המספר 6, ובהטלת קובייה ב' יתקבל המספר 5.
2. בהטלת קובייה א' יתקבל המספר 5, ובהטלת קובייה ב' יתקבל המספר 6.

כעת, נחשב את ההסתברות להתרחשות כל מאורע:

1. ההסתברות שיתקבל המספר 6 בהטלת קובייה א' היא $\frac{1}{6}$, שכן אנו מעוניינים באפשרות אחת מתוך 6 אפשרויות קיימות.
   כמו כן, ההסתברות שיתקבל המספר 5 בהטלת קובייה ב' היא $\frac{1}{6}$ אף היא, שכן גם במאורע הזה אנו מעוניינים באפשרות אחת מתוך 6 אפשרויות קיימות.
   כיוון שאנו מעוניינים שיתקבל המספר 6 בהטלת קובייה א', **וגם** שיתקבל המספר 5 בהטלת קובייה ב', עלינו **לכפול** בין ההסתברויות: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

2. באופן זהה, ההסתברות שיתקבל המספר 5 בהטלת קובייה א' היא $\frac{1}{6}$. כמו כן, ההסתברות שיתקבל המספר 5 בהטלת קובייה ב' היא $\frac{1}{6}$, ועל כן ההסתברות שבהטלת קובייה א' יתקבל המספר 5, **וגם** שבהטלת קובייה ב' יתקבל המספר 6 היא: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

ראינו שישנן 2 אפשרויות לכך שבהטלת קובייה אחת יתקבל המספר 6, ובהטלת השנייה יתקבל המספר 5 - אפשרות 1 **או** אפשרות 2.
כאשר 2 אפשרויות (או יותר) עונות על מבוקשנו, כלומר מתקיים מקרה של "**או**" ביניהן, עלינו **לחבר** את ההסתברויות של האפשרויות.

לפיכך, נחבר בין ההסתברויות להתרחשות 2 האפשרויות: $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

מכאן שההסתברות שאחת הקוביות תנחת על הפאה 6 והשנייה על הפאה 5 היא $\frac{1}{18}$.

✓ **כלל:** כאשר אנו מעוניינים שיתרחש מאורע אחד **וגם** מאורע אחר (ייתכנו יותר מ-2 מאורעות), עלינו לחשב את ההסתברות עבור כל מאורע, ולבצע **כפל** ביניהן.

✓ **כלל:** כאשר אנו מעוניינים שיתרחש מאורע אחד **או** מאורע אחר (ייתכנו יותר מ-2 מאורעות), עלינו לחשב את ההסתברות עבור כל מאורע, **ולחבר** ביניהן.

<u>דוגמה נוספת:</u>

עירית מטילה שתי קוביות בזו אחר זו - קובייה א' וקובייה ב'.

מה ההסתברות שעירית תקבל דאבל 6 (בהטלת שתי הקוביות יתקבל המספר 6)?

ההסתברות שבהטלת קובייה א' יתקבל המספר 6 היא $\frac{1}{6}$.

כמו כן, ההסתברות שבהטלת קובייה ב' יתקבל המספר 6 היא $\frac{1}{6}$ גם כן.

כיוון שאנו מעוניינים שבהטלת קובייה א' יתקבל המספר 6, **וגם** שבהטלת קובייה ב' יתקבל המספר 6, עלינו לכפול בין ההסתברויות: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

לפיכך, ההסתברות שעירית תקבל דאבל 6 היא $\frac{1}{36}$.

אגב, ההסתברות לקבל כל אחד מהדאבלים זהה (דאבל 5, דאבל 4, דאבל 3 וכן הלאה).

<u>דוגמה נוספת:</u>

תום מטיל שתי קוביות בזו אחר זו - קובייה א' וקובייה ב'.

מה ההסתברות שתום יקבל דאבל כלשהו (בהטלת שתי הקוביות יתקבל מספר זהה)?

בדוגמה הקודמת, ראינו כי ישנן 6 אפשרויות שונות לדאבל, וכן שההסתברות לקבל דאבל ספציפי היא $\frac{1}{36}$.

לכן, על מנת שתום יקבל את מבוקשו עליו לקבל **או** דאבל 1, **או** דאבל 2, **או** דאבל 3 וכך הלאה עד דאבל 6.

לפיכך, עלינו **לחבר** בין ההסתברויות להתרחשות ששת המאורעות:

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

<u>דרך נוספת לפתרון השאלה הזו</u> (ניגע בה על קצה המזלג משום שנקדיש לכך שיעור שלם בהמשך):

למספר שנקבל בהטלת קובייה א' אין חשיבות, שכן אנו מעוניינים לקבל דאבל כלשהו - לא משנה איזה.

הקובייה תנחת על אחת מפאותיה **בוודאות**, כלומר יתקבל מספר כלשהו בהטלה הראשונה,

ולכן ההסתברות להתרחשות מאורע זה היא 1.

אנו צריכים שבהטלת קובייה ב' יתקבל מספר זהה למספר שהתקבל בהטלת קובייה א', ועל כן צריכים אפשרות אחת ספציפית מתוך 6 אפשריות - כלומר, ההסתברות לכך היא $\frac{1}{6}$.

בין המאורעות קיים קשר של "**וגם**", כלומר אנו מעוניינים שבהטלת קובייה א' יתקבל מספר מסוים - לא משנה איזה - **וגם** שבהטלת קובייה ב' יתקבל מספר זהה.

לפיכך, עלינו **לכפול** בין ההסתברויות: $1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

שאלה לדוגמה - מספר אירועים

הסיכוי שמחר ירד גשם הוא $\frac{1}{10}$. הסיכוי שמחר תזרח השמש הוא $\frac{5}{6}$.
קשת בשמיים מופיעה כאשר ביום כלשהו יורד גשם וגם זורחת השמש.

מה הסיכוי שמחר תופיע קשת בשמיים?

(1) $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{6}$

(4) $\frac{1}{12}$

<u>פתרון</u>

קשת תופיע בשמיים אם מחר ירד גשם **וגם** תזרח השמש.

לפיכך, עלינו לבצע **כפל** בין ההסתברויות להתרחשות כל מאורע: $\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - מספר אירועים

רעות הטילה מטבע הוגן 3 פעמים.

מה הסיכוי שהמטבע נפל בשתי הפעמים הראשונות על "עץ", ובפעם השלישית על "פלי"?

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{45}$ (4) $\frac{1}{8}$

<u>פתרון</u>

נחשב את ההסתברות להתרחשות כל מאורע, ונבצע **כפל** ביניהן, שכן מדובר במקרה של "**וגם**".

ההסתברות לכך שהמטבע נפל "עץ" היא $\frac{1}{2}$, וההסתברות לכך שהמטבע נפל על "פלי" היא $\frac{1}{2}$ גם כן.

לפיכך, ההסתברות להתרחשות המאורע הראשון היא $\frac{1}{2}$, ההסתברות להתרחשות המאורע השני היא $\frac{1}{2}$ וההתרחשות להתרחשות המאורע השלישי היא $\frac{1}{2}$ אף היא.

אם כן, ההסתברות שהמטבע נפל בשתי הפעמים הראשונות על "עץ", ובפעם השלישית על "פלי" היא: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - מספר אירועים

גדי ושלומית מטילים כל אחד בתורו 2 קוביות הוגנות שעל פאותיהן המספרים 1-6.

נתון: גדי ינצח אם סכום התוצאות שיראו הקוביות יהיה 12.
שלומית תנצח אם סכום התוצאות שיראו הקוביות יהיה 11.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) הסיכוי של גדי לנצח גבוה מהסיכוי של שלומית לנצח

(2) הסיכוי של שלומית לנצח גבוה מהסיכוי של גדי לנצח

(3) הסיכוי של כל אחד מהם לנצח זהה

(4) בכל מצב בו גדי יוכתר כמנצח תוכתר גם שלומית כמנצחת

<u>פתרון</u>

כדי שסכום התוצאות שיראו הקוביות יהיה 12, על גדי לקבל 6 בכל אחת מההטלות, כלומר ישנה אפשרות **אחת** כזו בלבד (6,6) מתוך 36 אפשריות.

לעומת זאת, כדי שסכום התוצאות יהיה 11, ישנן **2** אפשרויות (5,6 או 6,5) מתוך 36 אפשריות.

כיוון שישנן **2** אפשרויות אשר יזכו את שלומית בניצחון, ואפשרות **אחת** בלבד שתזכה את גדי בניצחון - הסיכוי של שלומית לנצח **גבוה** יותר.

שימו לב, ניתן היה - נוסף על ההסבר לעיל - לחשב את ההסתברויות עבור כל אחד מהמקרים ולקבוע איזה סיכוי גבוה יותר.

כדי שסכום התוצאות יהיה 12, על גדי לקבל 6 בכל אחת מההטלות והסיכוי לכך הוא: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

כדי שסכום התוצאות יהיה 11, על שלומית לקבל 6,5 **או** 5,6 והסיכוי לכל אחד מהמקרים הוא: $\frac{1}{36}$.

היות שמדובר במקרה של "**או**", עלינו לחבר בין ההסתברויות: $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

התשובה הנכונה היא (2).

חשיבות או אי-חשיבות של מאורע ראשון

הצגנו בשיעור הקודם, על קצה המזלג, שכאשר למאורע הראשון אין חשיבות (קבלת דאבל כלשהו בהטלת שתי קוביות למשל), הסיכוי להתרחשותו הוא 1 - שכן הוא יתרחש **בוודאות**.
בחלק הזה של השיעור, נעמיק בחשיבותו או אי חשיבותו של המאורע הראשון.

<u>לדוגמה:</u>
שמעון מטיל מטבע הוגן 3 פעמים. מה הסיכוי שהמטבע ייפול על אותו צד בכל 3 הפעמים?

על מנת שתתקבל תוצאה זהה בכל 3 ההטלות, ישנן 2 אפשרויות.
נחשב את הסיכוי עבור כל אחת מהאפשרויות **ונחבר** ביניהם מאחר שמדובר במקרה של "**או**":

1. "עץ", "עץ", "עץ" - הסיכוי לקבל "עץ" הוא $\frac{1}{2}$.

על כן, הסיכוי לקבל "עץ" 3 פעמים ברציפות הוא: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

2. "פלי", "פלי", "פלי". הסיכוי לקבל "פלי" הוא $\frac{1}{2}$.

על כן, הסיכוי לקבל "פלי" 3 פעמים ברציפות הוא: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

כעת, נחבר בין הסיכויים ונקבל: $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

<u>שימו לב כי ניתן היה לפתור את השאלה גם כך:</u>
אנו רוצים שהמטבע ייפול על אותו צד 3 פעמים ברציפות.
לפיכך, לצד שעליו הוא ייפול בפעם הראשונה **אין חשיבות**, כלומר אין זה משנה אם הוא ייפול על "עץ" או על "פלי", כל עוד בשתי ההטלות הבאות הוא ייפול על צד ***זהה***.

אם כן, בהטלה הראשונה המטבע ייפול על צד מסוים **בוודאות** והסיכוי לכך הוא 1.

בהטלה השנייה, אנו רוצים שהמטבע ייפול על צד ספציפי - הצד שעליו המטבע נפל בהטלה הקודמת - והסיכוי לכך הוא $\frac{1}{2}$, וכך גם לגבי ההטלה השלישית ($\frac{1}{2}$).

לפיכך, הסיכוי שהמטבע ייפול על אותו צד בכל 3 הפעמים הוא: $1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

כפי שניתן לראות, בשתי הדרכים הגענו לתוצאה זהה.

שאלה לדוגמה - חשיבותו של המאורע הראשון

בבניין יש x קומות ובכל קומה יש 4 דירות.
רבקה ואלונה בחרו כל אחת באקראי דירה בבניין.

מה ההסתברות ששתיהן בחרו באותה הדירה ($x \neq 0$)?

(1) $\frac{1}{4x^2}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{1}{4x}$

(4) $\frac{1}{16x^2}$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

נמצא את ההסתברות עבור כל אחת מהבחירות ונבצע ביניהן כפל.
בבניין יש x קומות ובכל קומה 4 דירות. לפיכך, בבניין ישנן $4 \cdot x$ דירות.
בשאלה הזו, אין חשיבות לבחירה הראשונה, כלומר אנו צריכים שאחת מהן תבחר בדירה כלשהי - לא משנה איזו - ואנו יודעים שהדבר יקרה בוודאות, ולכן ההסתברות לכך היא 1.
לאחר שאחת מהן בחרה בדירה מסוימת, על השנייה לבחור באותה דירה ספציפית, כלומר בדירה אחת מתוך 4x אפשרויות.
ההסתברות לכך היא: $\frac{1}{4x}$. כעת, נבצע כפל בין ההסתברויות: $1 \cdot \frac{1}{4x} = \frac{1}{4x}$.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>

היות שחלק מהתשובות תלויות בנעלם שמופיע בשאלה, ניתן להציב במקומו מספר נוח - נציב $x = 3$.
על-פי הצבה זו, בבניין ישנן 3 קומות ובכל קומה 4 דירות. לפיכך, מספר הדירות בבניין הוא: $4 \cdot 3 = 12$.
כאמור, אין חשיבות לבחירה הראשונה, כלומר אנו צריכים שאחת מהן תבחר בדירה כלשהי - לא משנה איזו - ואנו יודעים שהדבר יקרה בוודאות, ולכן ההסתברות לכך היא 1.
לאחר שאחת מהן בחרה בדירה מסוימת, על השנייה לבחור באותה דירה ספציפית, כלומר בדירה אחת מתוך 12 אפשרויות.
ההסתברות לכך היא: $\frac{1}{12}$. כעת, נבצע כפל בין ההסתברויות: $1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

נציב $x = 3$ בתשובות ונפסול את התשובות שערכן **לא** שווה ל- $\frac{1}{12}$:

תשובה (1): $\frac{1}{36} = \frac{1}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4 \cdot 3^2} = \frac{1}{4x^2}$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{1}{4}$ אינו שווה ל- $\frac{1}{12}$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4x}$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $\frac{1}{144} = \frac{1}{16 \cdot 9} = \frac{1}{16 \cdot 3^2} = \frac{1}{16x^2}$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - חשיבותו של המאורע הראשון

7 כיסאות מסודרים במעגל.
יובל מתיישב באחד הכיסאות באופן אקראי, ואז ישי מתיישב באחד הכיסאות הנותרים באופן אקראי.

מה הסיכוי שיובל וישי התיישבו זה לצד זה?

(1) $\frac{2}{7}$

(2) $\frac{1}{49}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{42}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הסיכוי עבור כל אחד מהמקרים, ונבצע כפל ביניהם.
יובל בוחר להתיישב באחד מ-7 הכיסאות, אך לכיסא בו הוא יבחר אין חשיבות, שכן הוא יתיישב באחד מהכיסאות בוודאות.
לפיכך, הסיכוי שיתיישב בכיסא מסוים הוא 1.
מאחר שהכיסאות מסודרים במעגל, ישנם 2 כיסאות בהם יוכל ישי להתיישב - מימינו של יובל או משמאלו.
2 הכיסאות הללו הם מתוך 6 פנויים, ועל כן הסיכוי שהוא יישב באחד מהם הוא: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

כעת, נבצע כפל בין הסיכויים: $1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

<u>שימו לב כי ניתן היה לפתור את השאלה גם כך:</u>

הסיכוי שיובל יתיישב בכיסא אחד מסוים מתוך 7 הכיסאות הוא $\frac{1}{7}$.

כאמור, ישי יכול להתיישב משמאלו של יובל או מימינו, ועל כן הסיכוי שיישב לידו הוא: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

נבצע כפל בין הסיכויים ונקבל: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{21}$.

אולם, חשוב לזכור כי האפשרות שהוצגה לעיל זהה עבור 7 כיסאות שונים, כלומר - כיסא 1 **או** כיסא 2 **או** כיסא 3 וכך הלאה עד כיסא 7. כיוון שמדובר במקרה של "**או**", עלינו לחבר בין 7 המקרים השונים,
או לחלופין לכפול ב-7 (פעולה שערכה המתמטי זהה): $\frac{1}{21}\cdot 7=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

התשובה הנכונה היא (3).

✓ **כלל:** כאשר לבחירה הראשונה אין חשיבות, יש להתייחס אליה כמאורע שההסתברות להתרחשותו היא 1.

עם או בלי החזרה

עד כה, עסקנו בדוגמאות בהן כל מאורע היה "**חדש**".
כלומר, המאורע הראשון לא השפיע על המאורעות שאחריו.

לדוגמה, בהטלת קובייה או מטבע, כאשר התקבלה תוצאה מסוימת, היא יכולה הייתה להתקבל פעם נוספת.
שאלות בהן המאורע הראשון לא משפיע על המאורעות שאחריו, ניתן לכנות שאלות "**עם החזרה**", זאת כיוון שהתוצאה שהתקבלה, כאמור, יכולה להתקבל פעם נוספת.

אולם, ישנן שאלות בהן המאורע הראשון משפיע על המאורעות שאחריו, ועל כן ניתן לכנותן שאלות "**בלי החזרה**". למשל, אם נוציא כדור מסוים מתוך סל מבלי להחזירו, מספר האפשרויות בהוצאה הבאה יצטמצם.

<u>לדוגמה:</u>
בכיתה ישנם 20 תלמידים: 10 בנות ו-10 בנים. המורה מוציאה מהכיתה תלמידים באקראי, ונתון שתלמיד שיצא מהכיתה לא חוזר אליה.

ההסתברות להוצאת בת מהכיתה כעת היא $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$, שכן זו התוצאה של חלוקת מספר הבנות בכיתה במספר התלמידים הכולל בכיתה.

לאחר שבת מסוימת יצאה מהכיתה, מספר הבנות בכיתה קטן וכעת הוא: 9 ($10-1=9$).
אי לכך, מספר התלמידים בכיתה ירד גם כן וכעת הוא: 19 ($20-1=19$).

לפיכך, אם היינו נשאלים מה ההסתברות להוצאת בת נוספת מהכיתה, היא הייתה $\frac{9}{19}$.
זאת, כיוון שכפי שנאמר קודם לכן - לאחר שבת אחת יצאה מהכיתה, הן מספר הבנות בכיתה והן מספר התלמידים הכולל בכיתה השתנו.

לסיכום, כאשר אנו נדרשים לחשב את ההסתברות להתרחשותו של מאורע מסוים, עלינו לבדוק האם יש לו השפעה על המאורעות שאחריו.

שאלה לדוגמה - עם או בלי החזרה

בכד 5 כדורים צהובים, 3 כדורים אדומים ו-2 כדורים כחולים.

מה ההסתברות להוציא באקראי כדור צהוב ולאחריו כדור אדום (מבלי להחזיר את הכדור הצהוב אל הכד)?

(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{20}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{5}$

<u>**פתרון**</u>
נחשב את ההסתברות להוצאת כדור צהוב, ולאחר מכן נחשב את ההסתברות להוצאת כדור אדום.
נבצע בין ההסתברויות כפל, שכן מדובר במקרה של "**וגם**".
בכד ישנם 5 כדורים צהובים מתוך 10 כדורים בסך הכול. לפיכך, ההסתברות להוצאת כדור צהוב היא: $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$.
בכד ישנם 3 כדורים אדומים, ולאחר שהוצא ממנו כדור צהוב ישנם 9 כדורים בסך הכול ($10-1=9$).
לפיכך, ההסתברות להוצאת כדור אדום היא: $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$. כאמור, עלינו לכפול בין ההסתברויות: $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

מאורע משלים

עד כה, עסקנו בשאלות בהן חישבנו את ההסתברות לכך שמאורע כלשהו **יתרחש**.
אולם, ישנן שאלות בהן יהיה נוח הרבה יותר לחשב מה ההסתברות שהמאורע **לא יתרחש**.

ראשית, חשוב לעמוד על המונח "מאורע משלים".
כפי שלמדנו עד כה, ההסתברות לכך שמאורע יתרחש בוודאות היא 1.
לפיכך, אם אנו יודעים את ההסתברות ל**התרחשותו** של מאורע מסוים, ניתן לחסר אותה מ-1 ולמצוא את ההסתברות שהוא **לא** יתרחש.

<u>לדוגמה:</u>
שיר מטילה קובייה הוגנת. מה הסיכוי שבהטלת הקובייה **לא** יתקבל המספר 4?

על מנת ששיר לא תקבל את המספר 4, היא צריכה שיתקבלו המספרים 1 **או** 2 **או** 3 וכך הלאה עד 6,
העיקר שלא יתקבל 4 - כלומר ישנן 5 אפשרויות מתאימות.
אנו יודעים את ההסתברות עבור כל אחד מהמקרים ($\frac{1}{6}$), ומכיוון שמדובר במקרה של "**או**", נחבר בין ההסתברויות:
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
אם כן, ההסתברות לכך שבהטלת הקובייה **לא** יתקבל המספר 4 היא $\frac{5}{6}$.

<u>שימו לב כי לשאלה הזו היה פתרון פשוט הרבה יותר:</u>
ניתן היה לחשב את ההסתברות לכך **שכן** יתקבל המספר 4 ($\frac{1}{6}$), ולחסר אותה מ-1: $1-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
זו דוגמה פשוטה יחסית, אך חשוב להבין את העיקרון בבסיסה.

<u>דוגמה נוספת:</u>
יותם מטיל שתי קוביות הוגנות. מה הסיכוי שסכום התוצאות שיראו הקוביות **לא** יהיה 12?

ישנן אפשרויות רבות לקבל סכום **שאינו** 12: (3,4), (5,1), (6,3), (4,4) וכן הלאה.
אי לכך, חישוב הסיכוי עבור כל המאורעות **שכן** יקרו הוא מסובך יחסית.
אולם, ישנה אפשרות אחת בלבד **לקבל** סכום 12 והיא קבלת 6 בשתי הקוביות. כזכור, הסיכוי לכך הוא: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.
לפיכך, נוכל לחסר אותו מ-1 וכך לקבל את **המאורע המשלים** - הסיכוי שסכום התוצאות שיראו הקוביות **לא** יהיה 12:
$1-\frac{1}{36}=\frac{36}{36}-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$.

שאלה לדוגמה - מאורע משלים

הוטלו 3 מטבעות הוגנים בו-זמנית.

מה ההסתברות שלפחות אחד מהם נחת על "עץ"?

(1) $\frac{7}{8}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{1}{4}$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - מאורע משלים:</u>

ישנם מספר מאורעות שיקיימו את הדרישה בשאלה - לפיה לפחות אחד מהמטבעות נחת על "עץ".
אפשר שמטבע אחד ינחת על "עץ", אפשר ששניים, וכן אפשר ששלושתם ינחתו על "עץ".
כמו כן, סדר התרחשות המאורעות מגדיל אף הוא את מספר המאורעות. למשל:
"עץ", "עץ", "פלי" ו-"עץ", "פלי", "עץ".

מכאן שיהיה פשוט יותר לחשב את ההסתברות לכך שאף אחד מהמטבעות **לא** נחת על "עץ" - המקרה היחיד שלא מקיים את הדרישה בשאלה - ולחסר אותה מ-1.
ההסתברות לכך שאף אחד מהמטבעות **לא** נחת על "עץ" זהה להסתברות שהוא ינחת על "פלי" ב-3 הפעמים, כלומר:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. כאמור, נחסר את ההסתברות הזו מ-1 ונקבל: $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

<u>דרך ב' - מספר מאורעות:</u>

נחשב את ההסתברות עבור כל אחד מהמאורעות ונעמוד על הקשר ביניהם.
ההסתברות לקבל תוצאות זהות בשלוש ההטלות היא $\frac{1}{8}$, שכן: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.
כעת, נוכל לברר כמה רצפים מקיימים את דרישת השאלה, ולחבר ביניהם שכן מדובר במקרה של "**או**".
הרצפים הם:
3 פעמים "עץ" - ("עץ", "עץ", "עץ").
פעמיים "עץ" - ("עץ", "עץ", "פלי"), ("עץ", "פלי", "עץ"), ("פלי", "עץ", "עץ").
פעם אחת "עץ" - ("עץ", "פלי", "פלי"), ("פלי", "עץ", "פלי"), ("פלי", "פלי", "עץ").
כלומר, ישנן 7 אפשרויות שונות, ועל כן עלינו לכפול את $\frac{1}{8}$ ב-7: $\frac{1}{8}\cdot 7=\frac{7}{8}$.

התשובה הנכונה היא (1).

מאורע שאינו הוגן

הנושא הבא בו נעסוק הוא נדיר למדי, והסיכוי להופעתו בבחינה נמוך.

עד כה עסקנו בהטלת מטבעות **הוגנים**, כלומר מטבעות שבהטלתם ישנו סיכוי **שווה** לכך שייפלו על כל אחד מהצדדים ($\frac{1}{2}$).
כך גם לגבי קוביות, עסקנו בהטלת קוביות **הוגנות**, כלומר קוביות שבהטלתן ישנו סיכוי **שווה** לכך שייפלו על כל אחת מהפאות ($\frac{1}{6}$).
עם זאת, ייתכן שהמטבע או הקובייה או כל דבר אחר שיהיה נתון לכם בשאלה יהיו **לא הוגנים**, כלומר שהסיכוי להתרחשות המאורעות השונים **לא** יהיה **שווה**.
מה שחשוב לזכור בשאלות הללו הוא שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

לפיכך, אם נתון לכם למשל, שההסתברות לכך שמטבע לא הוגן ינחת על "עץ" היא $\frac{2}{5}$, ההסתברות לכך שהוא ינחת על "פלי" היא: $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.
לסיכום, זכרו שסכום ההסתברויות שווה ל-1, כך שגם אם ההסתברות אינה נתונה לכם, אתם יכולים למצוא אותה על ידי יצירת משוואה.

שאלה לדוגמה - מאורע שאינו הוגן

במטבע שאינו הוגן, ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי" היא $\frac{2}{3}$ מההסתברות שהוא ייפול על "עץ".

מה ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי"?

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{6}$

(4) $\frac{2}{5}$

פתרון
אומנם לא נתונה לנו ההסתברות לכך שהמטבע ייפול על "פלי" או על "עץ", אך אנו יודעים שסכום ההסתברויות שווה ל-1.
באמצעות ההבנה הזו אנו יכולים ליצור משוואה בנעלם אחד.
נסמן את ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" ב-$3x$.
אם כן, ההסתברות לכך שהמטבע ייפול על "פלי" היא: $\cancel{3}x\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=2x$.
כאמור, סכום ההסתברויות שווה ל-1 ועל כן: $3x+2x=1$. נכנס איברים דומים: $5x=1$.
כעת, נחלק את שני אגפי המשוואה ב-5: $x=\frac{1}{5}$.
נציב את x בביטוי שמייצג את ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי": $2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

התשובה הנכונה היא (4).

סיכום

1. <u>רצוי מתוך מצוי:</u>

- $\text{סיכוי} = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}} = \frac{\text{האפשרויות בהן אנו מעוניינים}}{\text{סך האפשרויות הקיימות}}$.
- ההסתברות להתרחשותו או אי-התרחשותו של מאורע נעה בין 0 ל-1.

  הסתברות 0 פירושה שהמאורע לא יתרחש, ואילו הסתברות 1 פירושה שהמאורע יתרחש בוודאות.

2. <u>מספר אירועים:</u>

- כאשר אנו מעוניינים שיתרחש מאורע אחד **וגם** מאורע אחר (ייתכנו יותר מ-2 מאורעות), עלינו לחשב את ההסתברות עבור כל מאורע, ולבצע **כפל** ביניהן.
- כאשר אנו מעוניינים שיתרחש מאורע אחד **או** מאורע אחר (ייתכנו יותר מ-2 מאורעות), עלינו לחשב את ההסתברות עבור כל מאורע, **ולחבר** ביניהן.

3. <u>חשיבות או אי חשיבות של מאורע ראשון:</u>

- כאשר לבחירה הראשונה **אין חשיבות**, כלומר היא תתרחש **בוודאות**, יש להתייחס אליה כמאורע שההסתברות להתרחשותו היא 1.

4. <u>עם או בלי החזרה:</u>

- כאשר אנו נדרשים לחשב את ההסתברות להתרחשותו של מאורע מסוים, עלינו לבדוק האם יש לו השפעה על המאורעות שאחריו.

  <u>לדוגמה:</u>

  אם הוצאנו כדור מסוים מכד מבלי להחזירו, מספר האפשרויות בהוצאה הבאה מצטמצם.

5. <u>מאורע משלים:</u>

בשאלות מסוימות, ייתכן שיהיה פשוט יותר לחשב את הסיכוי שמאורע מסוים לא יתרחש, אף על פי ששאלו מה הסיכוי לכך שהוא כן יתרחש.

- לדוגמה, אם הסיכוי שמאורע מסוים יתרחש הוא $\frac{1}{3}$, אזי הסיכוי שהוא **לא** יתרחש הוא $\frac{2}{3}$.
- לעיתים, המילה "לפחות" עשויה לרמוז לכך שפשוט יותר למצוא את המאורע המשלים.

6. <u>מאורע שאינו הוגן:</u>

- זכרו שסכום ההסתברויות שווה ל-1, כך שגם אם לא נתונה לכם ההסתברות להתרחשותו או אי-התרחשותו של מאורע מסוים, אלא היחס ביניהן - ניתן ליצור משוואה בנעלם אחד ולמצוא את ההסתברויות.

סכומים והסתברויות בהטלת 2 קוביות הוגנות:

סכום התוצאות שיתקבל בהטלת 2 קוביות הוגנות, משתנה לפי המספר המבוקש, ובהתאם לכך גם ההסתברות לקבלתו.
ההסתברות נקבעת על-פי מספר המצבים האפשריים עבור כל סכום, כפי שנראה בטבלה הבאה:

סכום הקוביות	מספר המצבים	המצבים	ההסתברות
7	6	(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)	$6\cdot\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\boxed{\frac{1}{6}}$
8 **או** 6	5 עבור כל אחד	**עבור 8:** (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6) **עבור 6:** (5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)	$5\cdot\frac{1}{36}=\boxed{\frac{5}{36}}$
9 **או** 5	4 עבור כל אחד	**עבור 9:** (6,3), (5,4), (4,5), (3,6) **עבור 5:** (4,1), (3,2), (2,3), (1,4)	$4\cdot\frac{1}{36}=\frac{4}{36}=\boxed{\frac{1}{9}}$
10 **או** 4	3 עבור כל אחד	**עבור 10:** (6,4), (5,5), (4,6) **עבור 4:** (3,1), (2,2), (1,3)	$3\cdot\frac{1}{36}=\frac{3}{36}=\boxed{\frac{1}{12}}$
11 **או** 3	2 עבור כל אחד	**עבור 11:** (6,5), (5,6) **עבור 3:** (2,1), (1,2)	$2\cdot\frac{1}{36}=\frac{2}{36}=\boxed{\frac{1}{18}}$
12 **או** 2	1 עבור כל אחד	**עבור 12:** (6,6) **עבור 2:** (1,1)	$\boxed{\frac{1}{36}}$

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!