גיאומטריה

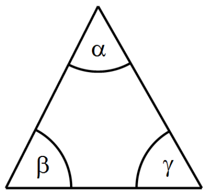
משולשים

משולשים

הגדרה: משולש הוא צורה סגורה בעלת 3 צלעות, 3 קדקודים ו- 3 זוויות פנימיות.

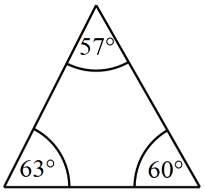
כלל: סכום הזוויות הפנימיות במשולש שווה ל- $180°$.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם מתקיים $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

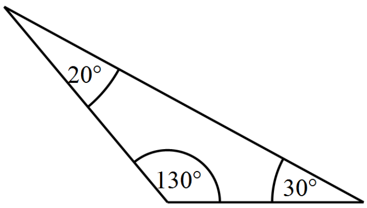


מושגים בסיסיים במשולש:

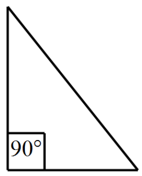
משולש חד זווית: משולש שכל זוויותיו הפנימיות חדות (קטנות מ- $90°$).



משולש קהה-זווית: משולש שאחת מזוויותיו הפנימיות קהה (גדולה מ- $90°$).



משולש ישר זווית: משולש שאחת מזוויותיו בת $90°$.

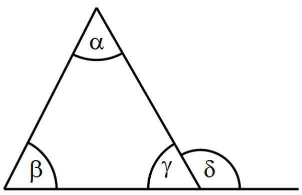


זווית חיצונית למשולש: היא זווית הצמודה לאחת מזוויות המשולש.

כלל: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש הפנימיות שאינן צמודות לה.

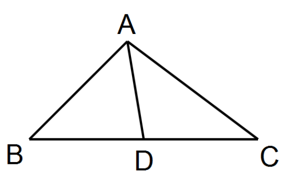
לדוגמה: בסרטוט שלפניכם δ צמודה לזווית המשולש γ ולכן היא זווית חיצונית למשולש.

מכך נוכל להסיק כי: $\delta=\alpha+\beta$.



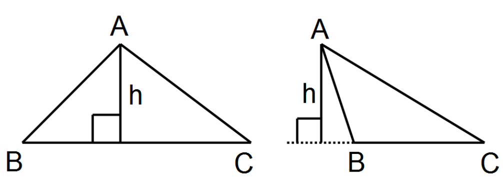
תיכון במשולש: תיכון במשולש הוא קטע המחבר קדקוד משולש עם אמצע הצלע שמולו.
תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים בעלי שטחים שווים.

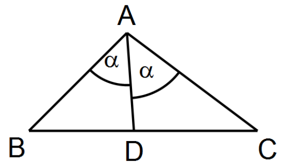
לדוגמה: בסרטוט שלפניכם AD הוא תיכון לצלע BC ומכך נובע כי $BD=DC$,
שטח המשולש ABD שווה לשטח המשולש ADC.



גובה במשולש: גובה לצלע במשולש הוא קטע היוצא מקדקוד במשולש לעבר צלע שמולו (או להמשכה) ומאונך לאותה הצלע (יוצר זווית בת $90°$).

לדוגמה: במשולשים שבסרטוט משמאל, h הוא הגובה לצלע BC.



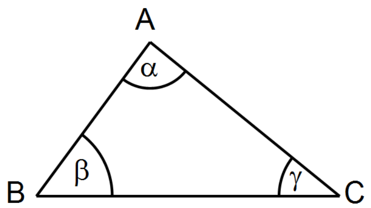


חוצה זווית במשולש: חוצה זווית במשולש הוא קטע היוצא מקדקוד הזווית במשולש לעבר הצלע שמולו ומחלק את הזווית לשתי זוויות שוות בגודלן.

לדוגמה: במשולש שבסרטוט AD חוצה את הזווית BAC.

מכך נובע כי זווית BAD שווה בגודלה לזווית DAC.

זוויות המשולש

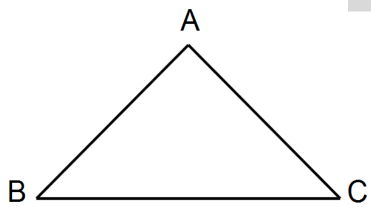


כלל: בכל משולש, מול זווית גדולה יותר נמצאת צלע ארוכה יותר - ולהפך.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם $\gamma < \beta < \alpha$.

מכך נובע כי הצלע AB היא הקצרה ביותר במשולש (היא נמצאת מול הזווית הקטנה ביותר במשולש- γ), הצלע AC היא הצלע הבינונית באורכה (נמצאת מול הזווית הבינונית במשולש- β) והצלע BC היא הצלע הארוכה ביותר במשולש (נמצאת מול הזווית הגדולה ביותר במשולש- α).

אי-שוויון המשולש



כלל: בכל משולש סכום האורכים של כל שתיים מצלעותיו גדול מאורך הצלע השלישית.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם משולש ABC. לפיכך, ניתן לרשום כי:

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AC + AB$$

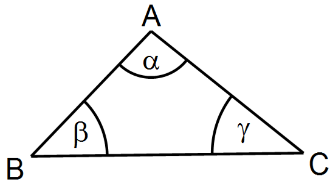
$$AB < AC + BC$$

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש ABC.

נתון: $9 = AC$ ס"מ.

$4 = AB$ ס"מ.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
איזו זווית היא הזווית **הקטנה** ביותר במשולש?

(1) α

(2) β

(3) γ

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרון: הזווית הקטנה ביותר במשולש נמצאת מול הצלע הקצרה ביותר.

שניים מאורכי הצלעות ידועים לנו מנתוני השאלה, $9 = AC$ ס"מ ו- $4 = AB$ ס"מ.

סכום האורכים של כל שתיים מצלעות המשולש גדול מאורך הצלע השלישית.

כעת, נוכל למצוא את הטווח האפשרי של אורך הצלע השלישית BC באמצעות כתיבת אי-שוויון המשולש:

$BC < AC + AB$, נציב את האורכים הידועים לנו ונקבל כי $BC < 13$.

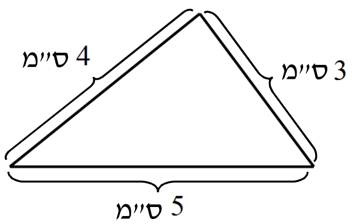
בנוסף, $AC < AB + BC$, נציב את האורכים הידועים לנו ונקבל כי $5 < BC$.

מצאנו כי אורך הצלע BC נע בין 5 ס"מ ל- 13 ס"מ. לפיכך, הצלע הקצרה במשולש היא הצלע AB השווה ל- 4 ס"מ.

הזווית הנמצאת מול צלע זו היא הזווית γ, ולכן זו הזווית הקטנה ביותר במשולש.

התשובה הנכונה היא (3).

היקף משולש

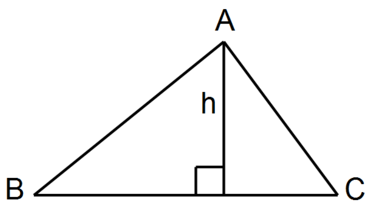


הגדרה: היקף משולש הוא סכום אורכי שלוש הצלעות של משולש זה.

לדוגמה: היקף משולש שאורכי צלעותיו 3 ס"מ, 4 ס"מ ו- 5 ס"מ הוא:

12 ס"מ $= 3 + 4 + 5$.

שטח משולש



הגדרה: שטח משולש שווה למחצית המכפלה של אורך צלע במשולש לאורך הגובה לצלע זו.

שטח המשולש בסרטוט שלפניכם הוא $\frac{BC \cdot h}{2}$.

לדוגמה: שטח משולש שאורך צלעו 5 ס"מ ואורך הגובה לצלע זו 4 ס"מ הוא:

10 סמ״ר $= \frac{20}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$.

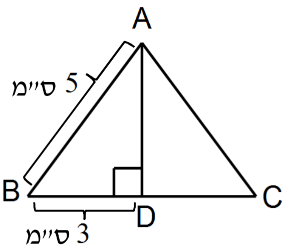
שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם AD תיכון במשולש ABC.

נתון: $AB = 5$ ס״מ

$BD = 3$ ס״מ

היקף המשולש ABD הוא 12 ס״מ



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה שטח המשולש ABC (בסמ״ר)?

(1) $7\frac{1}{2}$

(2) 24

(3) 12

(4) 18

פתרון: על מנת לחשב את שטח המשולש ABC נמצא אורך צלע במשולש ואת אורך הגובה לצלע זו.
בסרטוט מסומנת זווית ישרה בין התיכון AD לצלע המשולש BC (זווית ADB), ומכך נובע כי התיכון AD הוא גם גובה לצלע BC. לכן, נמצא את אורכי הקטעים BC ו- AD ונציב בנוסחת שטח משולש.
AD תיכון ומכך נסיק כי הוא מחלק את הצלע BC לשני חלקים שווים ($BD = DC$).
$BD = 3$ ס״מ ומכך שאורך הצלע BC כפול ושווה ל- 6 ס״מ. על מנת למצוא את אורך הגובה AD, נביט במשולש ABD:
היקף המשולש ABD מורכב מאורכי צלעותיו. שתיים מהצלעות ידועות לנו והצלע השלישית היא AD, אותה אנו מחפשים.
לכן, היקף המשולש הוא $AB + BD + AD$. מהצבת אורכי הצלעות הידועים לנו עולה כי $5 + 3 + AD = 12$,
ומכאן ש- $AD = 4$ ס״מ. כעת, עבור חישוב שטח משולש ABC נשתמש בנוסחת שטח משולש: $\frac{BC \cdot AD}{2}$.
נציב בנוסחה את האורכים שמצאנו ונמצא כי שטח המשולש הוא 12 סמ״ר $= 6 \cdot 2 = \frac{6 \cdot 4}{2}$. התשובה הנכונה היא (3).

חפיפת משולשים

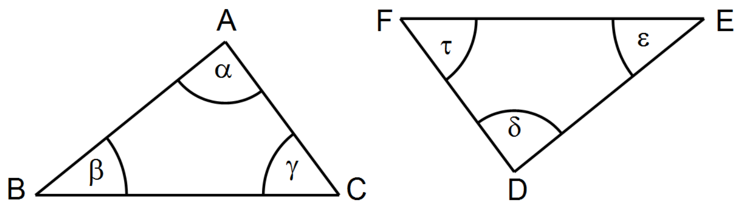
שתי צורות גאומטריות הן צורות חופפות זו לזו אם אפשר להניח אחת מהן על גבי האחרת באופן ששתיהן מכסות בדיוק זו את זו.

ניתן לחפוף כל צורה גיאומטרית, אך כעת נעסוק ב**חפיפת משולשים** בלבד.

במשולשים חופפים, כל הזוויות וכל הצלעות שוות בהתאמה (מול הזוויות השוות מונחות הצלעות השוות).

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם המשולש ABC חופף למשולש DEF.

לכן, במשולשים אלה מתקיים:



$\gamma = \tau$, $AB = DE$

$\beta = \varepsilon$, $AC = DF$

$\alpha = \delta$, $BC = EF$

ישנם 4 משפטי חפיפת משולשים.

נוכל להסיק כי שני משולשים חופפים אם מתקיים עבורם אחד ממשפטי החפיפה.

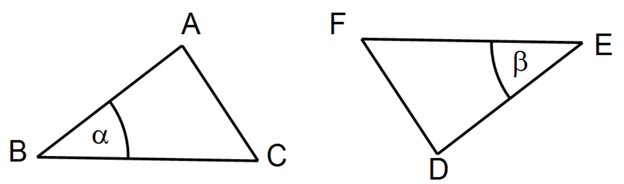
משפטי החפיפה הם:

.1 שני משולשים חופפים אם שתיים מצלעות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים מצלעות המשולש האחר, והזווית שבין צלעות אלו במשולש האחד שווה לזווית שבין צלעות אלו במשולש האחר (בקיצור: **צלע, זווית, צלע**).

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם -

$AB = DE$, $BC = FE$ ו- $\alpha = \beta$.

לכן, המשולשים ABC ו- DEF חופפים.

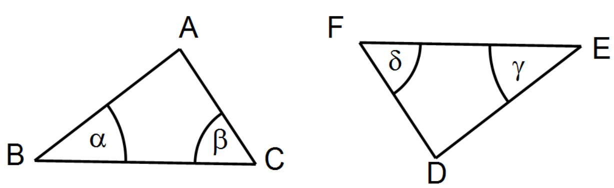


.2 שני משולשים חופפים אם שתיים מזוויות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים מזוויות המשולש האחר, והצלע שבין זוויות אלו במשולש האחד שווה לצלע שבין זוויות אלו במשולש האחר (בקיצור: **זווית, צלע, זווית**).

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם -

$BC = FE$, $\alpha = \gamma$ ו- $\beta = \delta$.

לכן, המשולשים ABC ו- DEF חופפים.

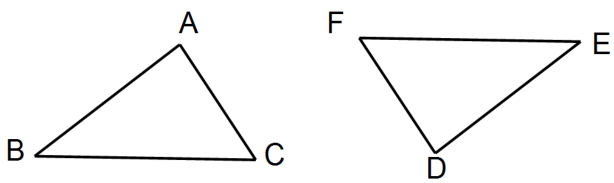


.3 שני משולשים חופפים אם שלוש צלעות המשולש האחד שוות לשלוש צלעות המשולש האחר (בקיצור: **צלע, צלע, צלע**).

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם -

$AB = DE$, $AC = DF$ ו- $BC = FE$.

לכן, המשולשים ABC ו- DEF חופפים.

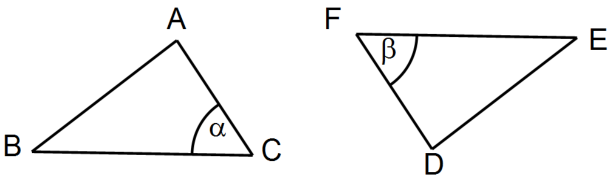


4. שני משולשים חופפים אם שתיים מצלעות המשולש האחד שוות בהתאמה לשתיים מהצלעות במשולש האחר, והזווית שמול הצלע הארוכה מבין השתיים במשולש האחד שווה לזווית המתאימה לה במשולש האחר
(או בקיצור: **צלע, צלע, והזווית** מול הצלע הארוכה מבין השתיים).

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם -

$AB = DE$, $AC = DF$, $AB > AC$ ו- $\alpha = \beta$.

לכן, המשולשים ABC ו- DEF חופפים.



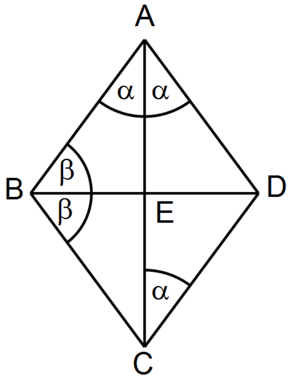
שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם 4 משולשים.

נתון: $AC \perp BD$

$BD = 6$ ס"מ

$AC = 8$ ס"מ

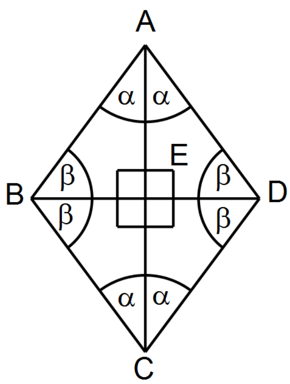


על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה שטח הצורה $ABCD$ (בסמ"ר)?

(1) 18
(2) 20
(3) 12
(4) 24

פתרון: לכל אחד מארבעת המשולשים שבסרטוט זוויות זהות (ראו סרטוט משמאל).
מכאן, שאם אחת מצלעות המשולשים שווה בהתאמה לצלע משולש אחר - משולשים אלה חופפים. נתבונן במשולשים ABD ו-BDC. בשני משולשים אלה הצלע מול זווית הראש 2α היא הצלע BD. נובע מכך כי המשולשים חופפים על פי המשפט זווית צלע זווית (זווית β, זווית β נוספת והצלע שביניהם BD).



נחשב את שטח אחד המשולשים ונכפיל ב- 2 על מנת למצוא את שטח הצורה כולה.
על מנת לחשב את שטח המשולש ABD נצטרך למצוא את אורך צלע BD ואת אורך הגובה לצלע זו.

נחשב את אורכי הצלעות: ידוע מהנתונים כי צלע הבסיס $BD = 6$ ס"מ.

מכיוון שהמשולשים ABD ו-BDC חופפים ומכך ש- $AC = 8$ ס"מ נסיק כי אורך הגובה לצלע BD, הצלע $AE = 4$ ס"מ.

נציב את אורכי הצלעות בנוסחת שטח משולש $\left(\frac{a \cdot h}{2}\right)$ ונמצא כי שטחו שווה ל- 12 סמ"ר $= 2 \cdot 6 = \frac{4 \cdot 6}{2}$.

נכפיל את שטח המשולש ומצאנו ב- 2 על מנת למצוא את שטח הצורה כולה ונמצא כי שטחה שווה ל- 24 סמ"ר $= 12 \cdot 2$.

התשובה הנכונה היא (4).

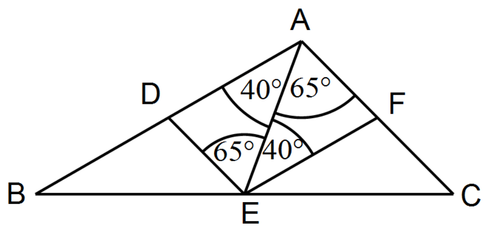
שאלה נוספת

בסרטוט שלפניכם AE תיכון במשולש ABC ו- EF תיכון במשולש AEC.

נתון: BD = 3 ס"מ

DE = 2 ס"מ

BE = 4 ס"מ



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

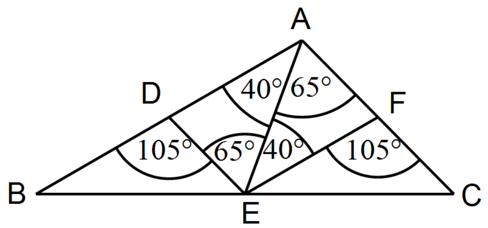
מה היקף המשולש ABC (בס"מ)?

(1) 16
(2) 18
(3) 22
(4) 9

פתרון: על מנת למצוא את היקף המשולש עלינו למצוא את אורכי שלוש צלעותיו.

AE תיכון במשולש ABC ומכך עולה כי אורך הצלע BC הוא פעמיים אורך הקטע BE: 8 ס"מ $= 2 \cdot 4$.

צלע AE משותפת לשני המשולשים ADE ו- AEF והזוויות הנשענות על הצלע זהות גם הן. לפיכך, משולשים אלה חופפים לפי משפט זווית, צלע, זווית.



לכן, נסיק כי: 2 ס"מ = AF = DE.

EF תיכון במשולש AEC ואורך הצלע AC הוא פעמיים אורך הקטע AF ושווה ל- 4 ס"מ $= 2 \cdot 2$.

בנוסף, FC = DE (שני קטעים אלה שווים ל- AF).

BE = EC (AE תיכון במשולש ABC).

זווית BDE חיצונית למשולש ADE ולכן בת $105°$. זווית EFC חיצונית למשולש AEF ולכן בת $105°$ גם היא. זוויות אלו קהות ולכן הן בהכרח הזוויות הגדולות ביותר במשולשים בהם הן מצויות. מול הזווית הגדולה ביותר במשולש מונחת הצלע הארוכה ביותר, ולכן מול זוויות אלה בהכרח מצויה הצלע הארוכה במשולש.

במקרה זה נוכל להשתמש במשפט צלע, צלע, זווית ונסיק כי המשולשים DBE ו-FEC חופפים.

מכך שהמשולשים DBE ו-FEC חופפים אנו לומדים כי: 3 ס"מ = EF = BD.

כמו כן, מכך שהמשולשים ADE ו- AEF חופפים אנו לומדים כי: 3 ס"מ = AD = EF.

הצלע AB מורכבת מסכום הצלעות AD + DB. נציב את הנתונים שמצאנו ונגלה כי אורך הצלע AB הוא 6 ס"מ $= 3 + 3$.

היקף המשולש ABC מורכב מסכום אורכי הצלעות AB + BC + AC. נציב את הנתונים שמצאנו ונראה כי היקף המשולש שווה ל- 18 ס"מ $= 6 + 8 + 4$

התשובה הנכונה היא (2).

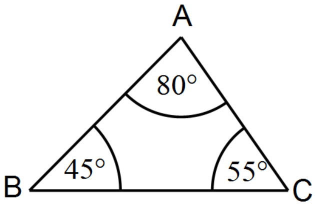
דמיון משולשים

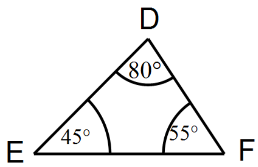
בגאומטריה, דמיון של עצמים הוא מצב בו לשני עצמים אותה צורה.
במילים אחרות, ניתן לקבל את אחד מהעצמים על ידי הקטנה או הגדלה של העצם השני, תוך שמירה על פרופורציות בין חלקיו.

הגדרה: שני משולשים הם משולשים דומים אם שלוש הזוויות במשולש אחד שוות לשלוש הזוויות במשולש האחר.

כתוצאה מכך, **מספיק שנדע כי שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר על מנת שנדע כי המשולשים דומים.**

כלל: במשולשים דומים, היחס בין כל שתי צלעות במשולש האחד שווה ליחס בין שתי הצלעות המתאימות במשולש האחר.





לדוגמה: בסרטוט שלפניכם המשולש ABC דומה למשולש DEF.

לכן, מתקיים: $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$, $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ ו- $\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$.

מכך נובע גם כי היחס בין כל צלע במשולש ABC לצלע המתאימה לה במשולש DEF

הוא יחס קבוע: $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$.

הגדרה: היחס בין כל צלע במשולש אחד לצלע המתאימה לה במשולש האחר נקרא 'יחס הדמיון'.

כלל: היקפי המשולשים מקיימים גם הם את יחס הדמיון.

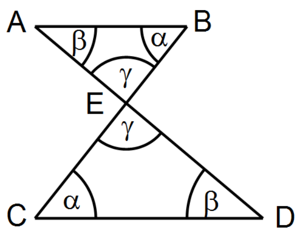
למשל: אם $\frac{AB}{DE}=\frac{3}{2}$ והיקף המשולש DEF הוא 6 ס"מ: $\frac{\text{היקף } ABC}{\text{היקף } DEF}=\frac{3}{2}$,

נציב את היקף המשולש DEF ונקבל: $\frac{\text{היקף } ABC}{6}=\frac{3}{2}$, מכפל בהצלבה עולה כי 9 ס"מ = היקף ABC.

כלל: שטחי המשולשים מקיימים את יחס הדמיון הקווי בריבוע.

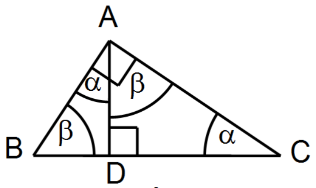
למשל: אם $\frac{AB}{DE}=\frac{3}{2}$ היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המשולש DEF הוא: $\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}$.

כלל: משולשים חופפים הם משולשים דומים שיחס הדמיון ביניהם הוא 1.



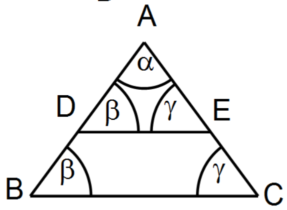
מקרים נפוצים של משולשים דומים:

'שעון חול': שני קטעים מקבילים זה לזה (AB ו- CD) וביניהם 2 ישרים החותכים זה את זה (AD ו- BC). הזוויות המסומנות ב- α מתאימות זו לזו, כך גם הזוויות המסומנות ב- β.
הזוויות המסומנות ב- γ קדקודיות.



גובה ליתר במשולש ישר זווית:

מהורדת גובה ליתר במשולש ישר זווית נוצרים 3 משולשים ישרי זווית דומים זה לזה.
למשל בסרטוט ABC משולש ישר זווית. AD גובה ליתר BC. המשולשים ABC,
ADC ו- ABD דומים.



קטע מקביל לאחת הצלעות:

העברת קטע המחבר שתי צלעות במשולש ומקביל לשלישית יוצר משולשים דומים.

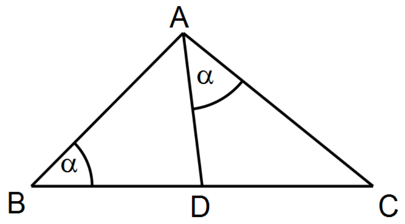
למשל בסרטוט שלפניכם $BC \parallel DE$. המשולש ADE דומה למשולש ABC.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש ABC.

נתון: $AC = 6$ ס"מ

$BC = 8$ ס"מ



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$DC = ?$

(1) $4\frac{1}{2}$ ס"מ

(2) 6 ס"מ

(3) 5 ס"מ

(4) 4 ס"מ

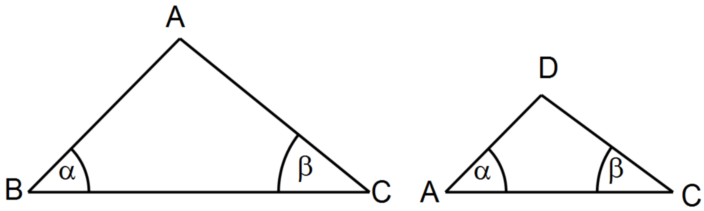
פתרון: הזווית α מופיעה בסרטוט בשני מקומות, היא זווית במשולש ABC וגם במשולש ADC.

כמו כן, זווית ACB במשולש ABC היא גם הזווית ACD במשולש ADC.

במשולשים ABC ו-ADC שתי זוויות זהות בגודלן, ומכאן שגם הזווית השלישית בשני המשולשים זהה.

לכן, משולשים ABC ו-ADC דומים.

למען הנוחות נסמן את הזווית המשותפת ACB כ- β ונסרטט את המשולשים אחד ליד השני כאשר הם פונים לאותו כיוון:



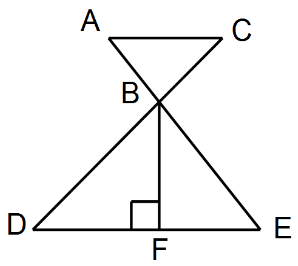
כעת, נוכל לזהות את יחס הדמיון. אנו מחפשים את אורך הצלע DC ויודעים את אורכי הצלעות BC ו- AC (שימו לב - צלע AC משותפת לשני המשולשים). נכתוב משוואת דמיון המורכבת מצלעות אלה:

$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$. נציב את האורכים הידועים לנו במשוואה: $\frac{6}{DC} = \frac{8}{6}$. נבצע כפל בהצלבה ונמצא כי $8 \cdot DC = 36$.

נבודד את הצלע DC על ידי חילוק ב- 8 ונגלה כי אורך צלע DC שווה ל- $\frac{36}{8} = 4\frac{1}{2}$ ס"מ.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת



בסרטוט שלפניכם המשולשים ABC ו- BDE.

נתון: $AC \parallel DE$

$AC = 4$ ס"מ

$BF = 6$ ס"מ

$DE = 8$ ס"מ

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש ABC (בסמ"ר)?

(1) 8
(2) 6
(3) 12
(4) 24

פתרון: מכיוון ש- $AC \parallel DE$, זווית BAC מתחלפת בין מקבילים ולכן שווה לזווית BED וזווית ACB מתחלפת בין מקבילים ולכן שווה לזווית BDE. שתי זוויות במשולשים ABC ו- BDE שוות זו לזו ולכן המשולשים דומים.

שטחי משולשים דומים מקיימים את יחס הדמיון בריבוע. לכן, אם נמצא את שטח המשולש BDE ונמצא את יחס הדמיון, נוכל למצוא את שטח המשולש ABC.

שטח משולש שווה לאורך אחת מצלעותיו כפול הגובה לצלע זו חלקי 2.

נבחר בצלע DE ובגובה BF כיוון שאורכם נתון, ונמצא כי שטח המשולש BDE שווה ל- 24 סמ"ר $= 8 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 6}{2}$.

הצלע AC והצלע DE נמצאות מול זוויות קדקודיות מתאימות, ולכן יחס הדמיון בין המשולשים הוא כיחס צלעות אלו. $AC = 4$ ס"מ ו- $DE = 8$ ס"מ, ומכך עולה כי יחס הדמיון הוא $4 : 8$. נצמצם ונקבל כי יחס הדמיון הוא $1 : 2$.

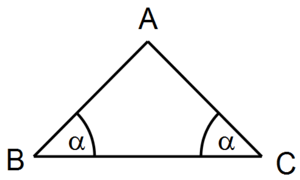
יחס השטחים הוא כאמור יחס הדמיון בריבוע, ולכן שווה ל- $1^2 : 2^2 = 1 : 4$.

מצאנו כי היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המשולש BDE הוא $1 : 4$.

מכאן ששטח המשולש ABC שווה לרבע משטח המשולש BDE ולכן שווה ל- 6 סמ"ר $= \frac{24}{4}$.

התשובה הנכונה היא (2).

משולש שווה שוקיים



הגדרה: משולש שווה שוקיים הינו משולש ששתיים מצלעותיו שוות זו לזו באורכן.

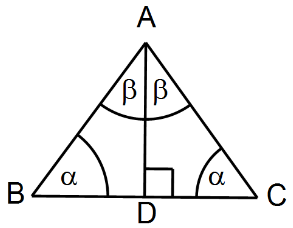
שתי הצלעות השוות נקראות 'שוקיים' והצלע השלישית במשולש נקראת 'בסיס'.

הזוויות שמול הצלעות השוות נקראות זוויות הבסיס והזוויות השלישית במשולש נקראת זווית הראש.

כלל: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם ABC משולש שווה שוקיים בו מתקיים: $AB = AC$.

לכן, זווית ABC שווה לזווית ACB.



כלל: במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון וגם חוצה את זווית הראש.
כמו כן, קטע זה מחלק את המשולש לשני משולשים בעלי שטחים שווים.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם ABC משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

הקטע AD גובה לבסיס. מכאן ש- $BD = DC$, הזווית BAD שווה לזווית DAC

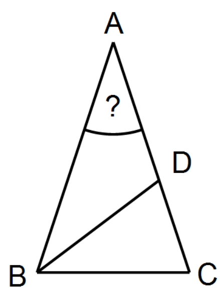
ושטח המשולש BAD שווה לשטח המשולש DAC.

כלל: אם שניים מהבאים: גובה, תיכון וחוצה זווית במשולש מתלכדים - אז מדובר במשולש שווה שוקיים.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.

נתון: $AD = BD = BC$.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

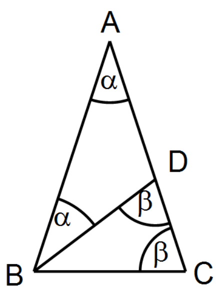
מה גודל הזווית BAC?

(1) $36°$

(2) $45°$

(3) $30°$

(4) $60°$



פתרון: מנתוני השאלה עולה כי בסרטוט שלושה משולשים שווי שוקיים: ABC, ABD ו- BCD.

נסמן באות α את הזווית אותה אנו מחפשים, זווית BAC. זווית זו היא זווית הבסיס של משולש שווה-שוקיים ABD, ולכן גם זווית DBA תסומן באות α. בנוסף, נסמן ב- β את זוויות הבסיס של משולש BCD (ראה סרטוט). זווית β חיצונית למשולש ABD ומכאן כי היא שווה לסכום שתי

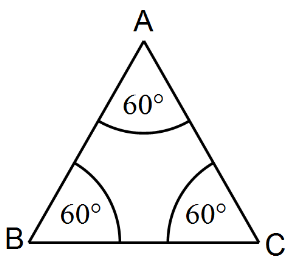
הזוויות שאינן צמודות לה. כעת, ניתן לרשום כי $\beta = 2\alpha$.

בנוסף, זווית ABC שווה גם היא ל- β, שכן משולש ABC שווה-שוקיים.

נתבונן במשולש ABC: זווית הראש שלו היא α, זוויות הבסיס הן β.

על פי סכום זוויות במשולש זה: $\alpha + 2\beta = 180°$. נציב $\beta = 2\alpha$ כפי שמצאנו ונקבל כי $5\alpha = 180°$, נחלק את שני האגפים ב-5 ונגלה כי $\alpha = 36°$. התשובה הנכונה היא (1).

משולש שווה צלעות



הגדרה: משולש שווה צלעות הוא משולש שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם משולש שווה צלעות. מכך ש: $AB = BC = AC$.

כלל: במשולש שווה צלעות כל אחת מהזוויות בת $60°$.

כלל: כל אחד מהגבהים במשולש שווה צלעות הוא גם תיכון וחוצה זווית.

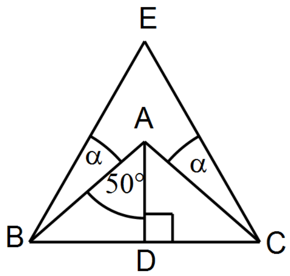
כלל: אורך גובה משולש שווה צלעות שאורך צלעו a ס"מ הוא $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$.

כלל: שטח משולש שווה צלעות שאורך צלעו a ס"מ הוא $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ סמ"ר.

לדוגמה: שטח משולש שווה צלעות שאורך צלעו 4 ס"מ הוא: $4\sqrt{3}$ סמ"ר $= \frac{16\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ ששטחו 6 סמ"ר.



נתון: $20° = \alpha$

$AD = 2$ ס"מ

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה שטח המשולש EBC (בסמ"ר)?

(1) 12

(2) $18\sqrt{3}$

(3) 36

(4) $9\sqrt{3}$

פתרון: משולש ABC הוא שווה שוקיים, ולכן AD המשמש כגובה במשולש (לפי הסרטוט) הוא תיכון לצלע BC ($BD = DC$) וחוצה זווית. זווית BAD בת $50°$. כיוון ש- AD חוצה זווית, ניתן להסיק כי זווית BAC כולה בת $100°$. לפי סכום זוויות במשולש וכיוון שזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות, כל אחת מזוויות הבסיס במשולש בת $40°$. כל אחת מהזוויות EBC ו- ECB מורכבת מזווית הבסיס במשולש ABC ועוד זווית α. מכאן שזוויות הבסיס של משולש EBC בנות $60° = 20 + 40$. לכן, גם הזווית השלישית בת $60°$ (סכום זוויות במשולש) וזהו משולש שווה צלעות.

נמצא את צלע BC, המשותפת למשולשים ABC ו- EBC, בעזרת שטח המשולש ABC. בעזרתה נחשב את שטח משולש EBC.

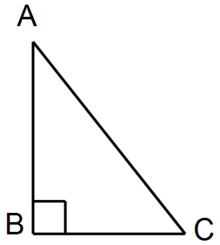
שטח משולש $ABC = \frac{BC \cdot AD}{2}$, מהצבת הנתונים עולה כי $6 = \frac{BC \cdot 2}{2}$. נפשט את המשוואה ונמצא כי $BC = 6$ ס"מ.

לפי נוסחת שטח משולש שווה צלעות, שטח EBC שווה ל- $9\sqrt{3}$ סמ"ר $= \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4}$.

התשובה הנכונה היא (4).

משולש ישר זווית

הגדרה: משולש ישר זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו ישרה (בת $90°$).



הצלע שמול הזווית הישרה נקראת יתר (בסרטוט: הצלע AC).

שתי הצלעות מול הזוויות שאינן ישרות נקראות ניצבים (בסרטוט: הצלעות AB ו- BC).

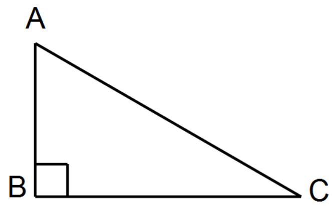
הגובה לניצב במשולש ישר זווית הוא הניצב השני, מכך עולה כי

כלל: שטח משולש ישר זווית ניתן לחשב בעזרת הנוסחה: $\frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם שטח המשולש $ABC = \frac{AB \cdot BC}{2}$.

משפט פיתגורס

הגדרה: במשולש ישר זווית ריבוע אורך היתר שווה לסכום ריבועי אורכי הניצבים.



משפט פיתגורס מתקיים בכל משולש ישר זווית.

לדוגמה: בסרטוט מתקיים כי $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

בעזרת נוסחה זו נוכל למצוא את אורכה של כל צלע במשולש ישר זווית אם ידועים לנו אורכי הצלעות האחרות במשולש.

לדוגמה: במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו 3 ס"מ ו- 4 ס"מ, נחשב את אורך היתר לפי משפט פיתגורס באופן הבא:

$$\text{יתר}^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\text{יתר}^2 = 9 + 16$$

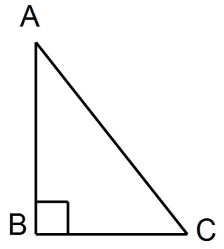
$$\text{יתר}^2 = 25$$

$$\text{יתר} = \sqrt{25} = 5 \text{ ס"מ}$$

שלשה פיתגורית היא שלשה של מספרים המקיימים את משפט פיתגורס.

מומלץ להכיר בעל פה את השלשות הפיתגוריות הנפוצות: $(3,4,5)$, $(6,8,10)$ ו- $(5,12,13)$ כדי לחסוך זמן בשאלות מסוג זה.

שאלה לדוגמה



בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ששטחו $4\sqrt{2}$ סמ"ר.

נתון: BC = 4 ס"מ.

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$AC = ?$

(1) 6 ס"מ

(2) $2\sqrt{6}$ ס"מ

(3) $2\sqrt{2}$ ס"מ

(4) 5 ס"מ

פתרון: בעזרת שטח המשולש ואורך הניצב BC הידועים לנו, נוכל למצוא את אורך הניצב AB.
כאשר נדע את אורכי שני הניצבים, נחשב בעזרת משפט פיתגורס את אורך היתר AC.

נוסחת שטח משולש ישר זווית היא $\frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$.

במקרה שלפנינו, שטח משולש $ABC = \frac{AB \cdot BC}{2}$. נציב את אורכי הצלעות ונמצא כי $4\sqrt{2} = \frac{AB \cdot 4}{2}$.

מפישוט המשוואה עולה כי $2AB = 4\sqrt{2}$, נחלק את שני אגפי המשוואה ב- 2 ונמצא שאורך הצלע AB הוא $2\sqrt{2}$ ס"מ.

על פי משפט פיתגורס, במשולש ישר הזווית ABC מתקיים כי $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
נציב את אורכי הצלעות הידועים לנו:

$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2$, לפי חוקי חזקות ניתן להפעיל מעריך חזקה על שני גורמים וביניהם כפל, ולכן

$AC^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 4^2$, נעלה בחזקה המתאימה את הגורמים ונמצא כי

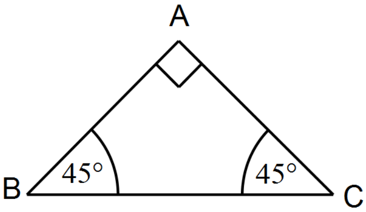
$AC^2 = 4 \cdot 2 + 16$, מפישוט המשוואה עולה כי $AC^2 = 24$, ועל ידי הוצאת שורש נגלה כי $AC = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$ ס"מ

התשובה הנכונה היא (2).

משולש ישר זווית ושווה שוקיים

כלל: במשולש ישר זווית ושווה שוקיים גודלי הזוויות הם $45°$, $45°$ ו- $90°$.

כלל: לפי משפט פיתגורס, במשולש מסוג זה שני הניצבים שווים זה לזה באורכם והיתר ארוך פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצבים.



מכלל זה עולה כי יחס אורכי הצלעות במשולש זה הוא:

ניצב : ניצב : יתר $= 1:1:\sqrt{2}$.

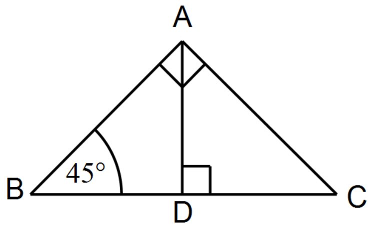
לדוגמה: במשולש ישר זווית ושווה שוקיים שאורך אחד מניצביו 3 ס״מ:

אורך הניצב השני גם הוא 3 ס״מ.

אורך היתר $3\sqrt{2}$ ס״מ.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ששטחו 8 סמ״ר.



על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$AD = ?$

(1) $4\sqrt{2}$ ס״מ
(2) 2 ס״מ
(3) $2\sqrt{2}$ ס״מ
(4) 4 ס״מ

פתרון: שטח משולש ישר זווית ניתן לחשב בעזרת הנוסחה $\frac{\text{ניצב}\cdot\text{ניצב}}{2}$.

במקרה זה, המשולש ABC ישר זווית ושווה שוקיים (זווית הבסיס שלו בת $45°$) ומכך שניצביו שווים באורכם.

לכן, ניתן לחשב את שטח המשולש ע״י הנוסחה: $\frac{(\text{ניצב})^2}{2}$. נשווה לשטח הנתון: $8 = \frac{(\text{ניצב})^2}{2}$

מכפל של האגפים ב- 2 נקבל כי $16 = (\text{ניצב})^2$. מכאן שאורך כל אחד מהניצבים במשולש ABC, AB ו- AC, הוא 4 ס״מ.

זווית ADB ישרה וזווית ABD בת $45°$, ולפיכך משולש ABD הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים גם הוא.

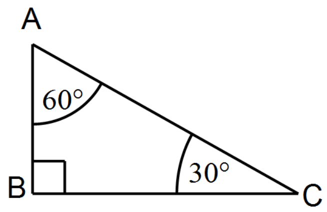
אורכו של היתר במשולש זה, AB, ידוע לנו (4 ס״מ) ואחד הניצבים במשולש הוא AD, שאת אורכו אנו מחפשים.

היתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים ארוך פי $\sqrt{2}$ מהניצב, ולכן ל מנת למצוא את אורך הניצב במשולש זה נחלק את אורך היתר ב- $\sqrt{2}$ באופן הבא: $AD = \frac{4}{\sqrt{2}}$. ניתן לפרק את המונה $AD = \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}$ ומצמצום נראה כי $AD = 2\sqrt{2}$ ס״מ.

התשובה הנכונה היא (3).

משולש $90°$, $60°$, $30°$

כלל: במשולש ישר זווית שבו גודלי הזוויות הם $30°$, $60°$ ו- $90°$ מתקיים כי אורך הניצב שמול הזווית בת ה- $30°$ שווה למחצית מאורך היתר, ואורך הניצב שמול הזווית בת ה- $60°$ גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הניצב הקצר.



מכך, שיחס אורכי הצלעות במשולש זה הוא:

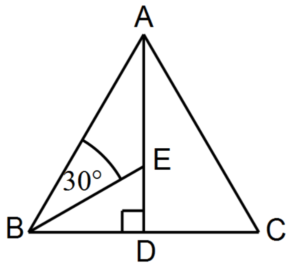
(יתר) 2 : (ניצב קטן) 1 : (ניצב גדול) $\sqrt{3}$.

לדוגמה: במשולש $30°,60°,90°$ שאורך ניצבו הקצר 3 ס״מ:

אורך הניצב הארוך הוא $3\sqrt{3}$ ס״מ. אורך היתר הוא 6 ס״מ.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם משולש שווה צלעות ABC.



על פי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$$\frac{\text{שטח המשולש } ABC}{\text{שטח המשולש } BDE} = ?$$

(1) 5
(2) 6
(3) 8
(4) 4

פתרון: כיוון שביחס אין חשיבות לאורך הממשי, מותר להציב ערך מספרי כל עוד שומרים על עקביות עם נתוני השאלה.

על מנת להקל על הפתרון, נציב $DE = 1$.

זווית EBD שווה לתוצאת חיסור זווית ABE מזווית ABD. הזווית ABD נמצאת במשולש שווה צלעות ולכן בת $60°$.

מכך, שהזווית EBD בת $60° - 30° = 30°$ ולכן משולש EBD הוא משולש $30°,60°,90°$.

במשולשים מסוג זה יחס הצלעות הוא $2 : \sqrt{3} : 1$, הגדרנו כי $DE = 1$ ומכך נובע שאורך הניצב השני, BD, הוא $\sqrt{3}$.

נוסחת שטח משולש היא $\frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$, מכך עולה כי שטח המשולש $BDE = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ סמ״ר.

משולש שווה צלעות הוא גם משולש שווה שוקיים ומכאן שהגובה AD הוא גם תיכון. מכך נלמד כי $BD = DC$ ואורך הצלע BC הוא פעמיים אורכו של BD, ולכן שווה ל- $2\sqrt{3}$ ס״מ. נציב אורך זה בנוסחת שטח משולש שווה צלעות ונמצא כי שטח המשולש ABC שווה ל- $3\sqrt{3}$ סמ״ר $= \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

לכן, היחס המבוקש הוא $\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, מ׳כפל בהופכי׳ עולה כי היחס שווה ל- $6 = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{3}}$. התשובה הנכונה היא (2).

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!

עמוד ריק