אלגברה

פעולות מומצאות

פעולות מומצאות

מבוא

"פעולות מומצאות" הוא נושא אשר מופיע בבחינה הפסיכומטרית, והוא אינו נלמד בבית הספר במתכונת הזו, בשונה מנושאים כמו שברים או חזקות. פתרון שאלות מהסוג הזה דורש ידע אלגברי בלבד, והוא מתבצע, לרוב, בעזרת הצבה של מספר בביטוי מסוים. כמו כן, הנושא הזה מגוון למדי, והשאלות בו משלבות את כל הנושאים האלגבריים המופיעים בחומר הנלמד לבחינה הפסיכומטרית (משוואות, אי-שוויונות, נוסחאות כפל מקוצר, שברים, חזקות, שורשים ועוד).

שימו לב כי בשאלות מהסוג הזה חשוב לשים לב לסדר הפעולות בחשבון.
כזכור, כפל וחילוק קודמים לחיבור ולחיסור, חזקה או שורש קודמים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות, ופעולות הנמצאות בתוך הסוגריים קודמות לכל פעולה אחרת.

פעולות מומצאות במספרים

אנו מכירים פעולות חשבון שונות כמו חיבור או חיסור, כפל או חילוק, וגם הוצאת שורש או העלאה בחזקה.
לכל אחת מהפעולות הללו קיים סימן קבוע (למשל: $\sqrt{\ }$, +), והן קבועות מבחינה אלגברית גם כן.
לעומתן, פעולה מומצאת היא סימן (בבחינה הוא יהיה לרוב $) שאין לו הגדרה חשבונית קבועה, והוא ישתנה משאלה לשאלה.

<u>לדוגמה:</u>

לכל מספר x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x)=\frac{x+2}{3}$

$\$(10)=?$

לפי הגדרתו של הסימן $ בשאלה הזו, עלינו להוסיף למספר אשר מופיע בסוגריים 2 ולחלק את התוצאה ב-3.
לפיכך: $\$(10)=\frac{10+2}{3}=\frac{12}{3}=4$.

שאלה לדוגמה - פעולות מומצאות במספרים

עבור כל x השונה מ-(-3) הוגדרה הפעולה $\$(x)$ כך: $\$(x)=\frac{x-2}{x+3}$.

$\frac{\$(7)}{\$(12)}=?$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{6}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

<u>פתרון</u>

פירוש הפעולה $ בשאלה הזו הוא חיסור 2 מ-x (המונה) וחלוקת התוצאה בסכום של x ושל 3 (המכנה).
תחילה, נחיל את הפעולה על **המונה**: $\$(7)=\frac{7-2}{7+3}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. כעת, נחיל את הפעולה על **המכנה**: $\$(12)=\frac{12-2}{12+3}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.
אם כן: $\frac{\$(7)}{\$(12)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$. נבצע כפל בהופכי: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - פעולות מומצאות במספרים

לכל שני מספרים m ו-n הוגדרה הפעולה $\$(m,n)$ כך:

אם $n \le m$ אז $\$(m,n)=m-n$

אם $m<n$ אז $\$(m,n)=m+n^2$

$\$(\$(-3,-2),1)=?$

(1) 1

(2) 6

(3) -6

(4) 0

<u>פתרון</u>

ראשית, שימו לב כי למיקום המספרים בסוגריים ישנה חשיבות - בהגדרת השאלה ($\$(m,n)$) m מופיע בצד שמאל של הסוגריים,

ולכן המספר השמאלי בסוגריים (3-, למשל) מייצג את m. האמור לעיל תקף לכל שאלה בנושא הזה.

הביטוי שאת ערכו נתבקשנו למצוא מורכב יחסית, ולכן עלינו לעבוד באופן מסודר מאוד.

נתחיל מהסוגריים הפנימיים: $\$(-3,-2)$.

האיבר הימני (2-), אשר מייצג את n, גדול מהאיבר השמאלי אשר מייצג את m ($m<n$).

אם כן, עלינו להשתמש בתנאי השני ולהחיל את הפעולה המתאימה לו:

$\$(m,n)=m+n^2 \Rightarrow \$(-3,-2)=-3+(-2)^2=-3+4=1$.

לפיכך: $\$(\$(-3,-2),1)=\$(1,1)$.

כעת, האיברים שווים זה לזה ($n \le m$), ולכן עלינו להשתמש בתנאי הראשון ולהחיל את הפעולה המתאימה לו:

$\$(m,n)=m-n \Rightarrow \$(1,1)=1-1=0$.

התשובה הנכונה היא (4).

פעולות מומצאות מילוליות

בחלק הקודם של השיעור עסקנו בפעולות מומצאות אשר באו לידי ביטוי בצורה מתמטית.
בבחינה עשויות להופיע פעולות מומצאות אשר בהן הפעולה שנצטרך להחיל תוגדר באופן מילולי.

<u>לדוגמה:</u>
$\$(x)=$ מספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא x, וספרת האחדות שלהם קטנה מ-x.

$\$(5)=?$

ישנם 10 מספרים דו-ספרתיים שספרתם העשרות שלהם היא 5: 50-59.
מתוכם, 5 בלבד עונים על התנאי השני (ספרת האחדות שלהם קטנה מ-x, כלומר קטנה מ-5): 50-54.
לפיכך: $\$(5)=5$.

אגב, בשאלה הספציפית הזו, הפעולה שהוגדרה היא למעשה השאלה הבאה:
"מה מספר הספרות הקטנות מהספרה אשר מופיעה בסוגריים"?
ולכן, התשובה תמיד תהיה הערך שמופיע בסוגריים (מספר הספרות הקטנות מספרה מסוימת שווה לספרה עצמה):
$\$(1)=1$, $\$(2)=2$, $\$(3)=3$, $\$(4)=4$ וכך הלאה.

שאלה לדוגמה - פעולות מומצאות מילוליות

לכל זוג מספרים x ו-y הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x,y)=z$, כאשר z היא השארית המתקבלת מחלוקת x ב-y.

$\$(\$(40,17),4)=?$

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

<u>פתרון</u>
הביטוי שאת ערכו נתבקשנו למצוא מורכב למדי, ולכן עלינו לעבוד באופן מסודר.
נתחיל מהסוגריים הפנימיים: $\$(40,17)$.

לפי ההגדרה בשאלה, עלינו לחלק את 40 (x) ב-17 (y) ולמצוא את השארית המתקבלת (z): $\frac{40}{17}=2\frac{6}{17}$.

אם כן, שארית החלוקה של 40 ב-17 היא 6. לפיכך: $\$(\$(40,17),4)=\$(6,4)$.

כעת, נחזור על התהליך עם 6 ועם 4 ונקבל: $\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}$.

לפיכך: $\$(6,4)=2$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - פעולות מומצאות מילוליות

לכל זוג מספרים x ו-y ($x \neq y$) הוגדרו הפעולות $ ו-# כך:

$\$(x,y) =$ המספר הגדול מבין שני המספרים x ו-y.

$\#(x,y) =$ תוצאת החלוקה של המספר הגדול במספר הקטן מבין שני המספרים x ו-y.

$\#\left(\#(12,4),\$(9,8)\right) = ?$

(1) 1

(2) 6

(3) 3

(4) 9

<u>פתרון</u>

משום שבשאלה ישנו ריבוי פעולות, עלינו להקפיד על עבודה מסודרת.

נתחיל מהסוגריים הפנימיים: $\#(12,4)$.

לפי ההגדרה בשאלה, עלינו לחלק את המספר הגדול מבין השניים (12) במספר הקטן מבין השניים (4): $\frac{12}{4} = 3$.

לפיכך: $\#(12,4) = 3$.

כעת, נפשט את החלק השני בסוגריים הפנימיים: $\$(9,8)$.

לפי ההגדרה בשאלה, עלינו לבחור במספר הגדול מבין השניים (9). לפיכך: $\$(9,8) = 9$.

אם כן: $\#\left(\#(12,4),\$(9,8)\right) = \#(3,9)$.

כאמור, לפי הגדרת השאלה, עלינו לחלק את המספר הגדול מבין השניים (9) במספר הקטן מבין השניים (3): $\frac{9}{3} = 3$.

לאור האמור לעיל: $\#\left(\#(12,4),\$(9,8)\right) = \#(3,9) = 3$.

התשובה הנכונה היא (3).

פעולות מומצאות בנעלמים

עד כה עסקנו בדוגמאות בהן הפעולות המומצאות חלו על מספרים.
בחלק הזה של השיעור נעסוק בדוגמאות אשר בהן הפעולות יחולו על נעלמים.

<u>לדוגמה:</u>
לכל שני מספרים שלמים וחיוביים הוגדרה הפעולה $\$(a,b)$ כך: $\$(a,b)=a^b$.

$$\sqrt[y]{\$\left(x,y^2\right)}=?$$

הפעולה הנ"ל מגדירה לנו שעלינו להרכיב חזקה שבסיסה הוא האיבר השמאלי (a) ומעריכה הוא האיבר הימני (b).
אי לכך: $\sqrt[y]{\$\left(x,y^2\right)}=\sqrt[y]{(x)^{y^2}}$.

לפי החוק $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=a^{\frac{n}{m}}$, ניתן להציג את הביטוי כך: $\sqrt[y]{(x)^{y^2}}=(x)^{\frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}}=x^y$.

לאור האמור לעיל: $\sqrt[y]{\$\left(x,y^2\right)}=x^y$.

שימו לב! בפעולה הזו, למעשה, נתבקשנו להרכיב **ביטוי** אשר מכיל את הנעלמים x ו-y.
כזכור משיעור ביטויים, ברוב הביטויים אשר מכילים נעלמים ניתן להציב מספרים, והעובדה שהשאלה היא מסוג פעולות מומצאות אינה משנה.
אם כן, ניתן להציב מספרים נוחים במקום x ובמקום y ולפשט את הביטוי עבור הצבה זו.
נציב $x=3$ ו- $y=2$ בביטוי המבוקש: $\sqrt[y]{\$\left(x,y^2\right)}\Rightarrow\sqrt[2]{\$\left(3,(2)^2\right)}$.

לפי הגדרת הפעולה, נרכיב חזקה שבסיסה הוא האיבר השמאלי (3), ואילו מעריכה הוא האיבר הימני (2^2):
$\sqrt[2]{\$\left(3,(2)^2\right)}=\sqrt[2]{(3)^{2^2}}=\sqrt[2]{3^4}$.

לפי חוק החזקות שהוזכר לעיל: $\sqrt[2]{3^4}=3^{\frac{4}{2}}=3^2=9$.

זכרו! בהצבת מספרים בביטויים, אנו מוכרחים להציב את אותם ערכים ב**כל ארבע התשובות** ולסמן את התשובה הנכונה לאחר שפסלנו 3 תשובות בלבד.

שאלה לדוגמה - פעולות מומצאות בנעלמים

עבור כל x שלם וגדול מ-1 הוגדרו הפעולות הבאות:

$\$(x)=x^2$

$\#(x)=x!$

$\#(x)\cdot\$(x)=?$

(1) $x!$ (2) $x^2\cdot(x-1)!$ (3) $x^3\cdot(x-1)!$ (4) $x^3\cdot x!$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

לפי ההגדרות בשאלה הזו: $\#(x)\cdot\$(x)=x!\cdot x^2$. כעת, נבדוק איזו מבין התשובות שווה בערכה לביטוי שמצאנו:

תשובה (1): מכפלה זו כוללת את האיבר $x!$ בלבד. התשובה נפסלת.

תשובה (2): אומנם מכפלה זו כוללת את האיבר x^2, אך האיבר השני בה הוא $(x-1)!$ ולא $x!$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): משום שהתשובה הזו לא כוללת אף אחד מן האיברים בביטוי המקורי, נבדוק אותה בסוף.

תשובה (4): אומנם מכפלה זו כוללת את האיבר $x!$, אך האיבר השני בה הוא x^3 ולא x^2. התשובה נפסלת.

בשלב הזה פסלנו 3 תשובות, ולכן ניתן לסמן את תשובה (3). לטובת שלמות ההסבר, נוכיח את נכונותה:

את x^3 ניתן להציג כך: $x^2\cdot x$. לפיכך, את הביטוי בתשובה (3) ניתן להציג כך: $x^3\cdot(x-1)!=x^2\cdot x\cdot(x-1)!$.

שימו לב כי המכפלה $x\cdot(x-1)!$ שווה בערכה ל-$x!$. אי לכך: $x^3\cdot(x-1)!=x^2\cdot x\cdot(x-1)!=x^2\cdot x!$.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>

לפי הנתון, אנו צריכים לבחור מספר שלם אשר גדול מ-1.

משום שהמעריכים בתשובות אינם גדולים, הצבה נוחה ובטוחה תהיה $x=3$.

נציב בביטוי המבוקש $x=3$ ונקבל: $\#(x)\cdot\$(x)\Rightarrow\#(3)\cdot\$(3)=3!\cdot 3^2=3\cdot2\cdot1\cdot9=54$.

כעת, נציב $x=3$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו 54:

תשובה (1): $x!=3!=3\cdot2\cdot1=6$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $x^2\cdot(x-1)!=3^2\cdot(3-1)!=9\cdot2!=9\cdot2\cdot1=18$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x^3\cdot(x-1)!=3^3\cdot(3-1)!=27\cdot2!=27\cdot2\cdot1=54$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $x^3\cdot x!=3^3\cdot3!=27\cdot3\cdot2\cdot1=162$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - פעולות מומצאות בנעלמים

לכל מספר x הוגדרה הפעולה הבאה $\$(x)$ כך שמתקיים: $\$(x)+14=8x-\$(x)$.

$\$(4)=?$

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

<u>פתרון</u>

שימו לב כי ניתן להתייחס לביטוי $\$(x)$ כאל נעלם ולהעביר אותו אגף כך: $\$(x)+14+\$(x)=8x$.

כעת, נעביר את 14 אגף: $\$(x)+\$(x)=8x-14$. משום שהביטוי $\$(x)$ מופיע פעמיים, ניתן להציג את המשוואה כך:

$2\cdot\$(x)=8x-14$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $\$(x)=\frac{8x-14}{2}=4x-7$. אם כן: $\$(x)=4x-7$.

כל שנותר לנו לעשות זה להחיל את הפעולה על 4: $\$(x)=4x-7\Rightarrow\$(4)=4\cdot4-7=16-7=9$.

התשובה הנכונה היא (1).

מציאת טענה נכונה

בתת-הנושא הבא נעסוק בשאלות אשר בהן נצטרך למצוא טענה נכונה.

<u>לדוגמה:</u>

לכל x שלם הוגדרה הפעולה $\$(x)$ כך: $\$(x)=\left|x^3\right|-x^2$.

אנו עשויים להישאל לגבי הדוגמה הזו מספר שאלות, וביניהן:

1. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

2. איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה בהכרח?

3. איזו מהטענות הבאות תיתכן?

התשובות יכולות להיות, לדוגמה:

1. $\$(x)<0$.

2. $0<\$(x)$.

כעת, נבחן את השאלה:

עבור כל x שלם וחיובי פרט ל-1 הביטוי $\left|x^3\right|$ גדול מהביטוי x^2.

אם, למשל, $x=2$:

$\$(x)=\left|x^3\right|-x^2 \Rightarrow \$(2)=\left|2^3\right|-2^2=8-4=4$.

גם עבור כל x שלם ושלילי פרט ל-(1-) הביטוי $\left|x^3\right|$ גדול מהביטוי x^2.

אם, למשל, $x=-2$:

$\$(x)=\left|x^3\right|-x^2 \Rightarrow \$(-2)=\left|-2^3\right|-(-2)^2=\left|-8\right|-4=8-4=4$.

אם כן, עבור כל x שאינו 1, (1-) או 0 תוצאתה של הפעולה $\$(x)$ היא מספר שלם וחיובי.

נמצא אפוא את ערכו של הביטוי כאשר $x=1$, כאשר $x=-1$ וכאשר $x=0$.

כאשר $x=1$:

$\$(x)=\left|x^3\right|-x^2 \Rightarrow \$(1)=\left|1^3\right|-1^2=1-1=0$.

כאשר $x=-1$:

$\$(x)=\left|x^3\right|-x^2 \Rightarrow \$(-1)=\left|-1^3\right|-(-1)^2=\left|-1\right|-1=1-1=0$.

כאשר $x=0$:

$\$(x)=\left|x^3\right|-x^2 \Rightarrow \$(0)=\left|0^3\right|-(0)^2=\left|0\right|-0=0$.

לאור כל האמור לעיל, ניתן לקבוע כי עבור כל x שלם: $0\le\$(x)$.

הטענה הזו ($0\le\$(x)$) יכולה להיות תשובה נכונה לשאלה: "איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?"

<u>הערה:</u>

בשאלות מסוימות יהיה נוח יותר להבין תחילה את אשר מתחייב לגבי פעולה מסוימת בטרם המעבר על התשובות, ואילו בשאלות אחרות יהיה נוח יותר להיעזר בתשובות. הפעילו שיקול דעת.

שאלה לדוגמה - מציאת טענה נכונה

לכל מספר שלם וחיובי x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x)=\frac{2x}{2}+1$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $\$(x)$ הוא מספר זוגי

(2) $\$(x)$ הוא מספר אי-זוגי

(3) $\$(x)+\$(x)$ הוא מספר אי-זוגי

(4) $\$(x)+\$(x)$ הוא מספר זוגי

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - הצבת מספרים:</u>

נתון לנו כי הפעולה תקפה עבור כל מספר שלם וחיובי. אולם, לא נתון לנו אם הנעלם זוגי או אי-זוגי. לפיכך, נבצע 2 הצבות:

1. מספר אי-זוגי ($x=1$):

$\$(x)=\frac{2x}{2}+1\Rightarrow\$(1)=\frac{2\cdot1}{2}+1=\frac{2}{2}+1=1+1=2$.

2. מספר זוגי: ($x=2$):

$\$(x)=\frac{2x}{2}+1\Rightarrow\$(2)=\frac{2\cdot2}{2}+1=\frac{4}{2}+1=2+1=3$.

בשלב הזה ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(2), שכן הוכחנו ש-x יכול להיות הן זוגי והן אי-זוגי.

כעת, נשתמש באחת ההצבות שבחרנו לטובת פסילת אחת מהתשובות (3) או (4). לשם הנוחות, נבחר בהצבה הראשונה:

$\$(x)+\$(x)=\$(1)+\$(1)=2+2=4$. לפיכך, הסכום $\$(x)+\$(x)$ אינו בהכרח אי-זוגי. ניתן לפסול את תשובה (3).

הצלחנו להראות כי 3 תשובות אינן נכונות בהכרח, ולכן הנותרת היא הנכונה.

<u>דרך ב' - פתרון אלגברי:</u>

ראשית, ניתן לצמצם את 2 באיבר השמאלי כך: $\$(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}+1\Rightarrow\$(x)=x+1$.

כעת, נבחן את תוצאת הפעולה $\$(x)=x+1$.

אנו יודעים כי x הוא מספר שלם וחיובי, אך איננו יודעים אם הוא זוגי או אי-זוגי.

אם הוא זוגי, הוספה של 1 תהפוך אותו אי-זוגי (למשל: $2+1=3$).

אם הוא אי-זוגי, הוספה של 1 תהפוך אותו זוגי (למשל: $3+1=4$).

לפיכך, ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(2).

כעת, נבחן את סכומן של הפעולות, כפי שמופיע בתשובות (3) ו-(4): $\$(x)+\$(x)=x+1+x+1=2x+2$.

מכפלה של כל מספר שלם ב-2 היא זוגית בהכרח. לפיכך, $2x$ זוגי. חיבור של 2 מספרים זוגיים מניב תוצאה זוגית בהכרח.

אם כן, $2x+2$ (תוצאת הפעולה $\$(x)+\$(x)$) הוא ביטוי זוגי בהכרח.

<u>הערה:</u>

שימו לב כי ערכה של תשובה (4) הוא: $\$(x)+\$(x)=2\cdot\$(x)$.

לפיכך, בשלב שהבנו שעבור כל x הפעולה $\$(x)$ מניבה תוצאה שלמה, ניתן היה לקבוע כי $\$(x)+\$(x)$ זוגי בהכרח, שכן כפל של מספר זוגי (2) בכל מספר שלם שהוא מניב תוצאה זוגית.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת – מציאת טענה נכונה

לכל a שלם השונה מ-0 הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(a)=\frac{a^3}{|a|}$.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $\$(a)<1$

(2) $\$(a^2)=a^4$

(3) $\$(a^3)<a^3$

(4) $\$(a)=a^2$

<u>פתרון</u>

נתון כי a שלם ושונה מ-0, אך לא נתון אם הוא חיובי או שלילי. לפיכך, נבחן כל אחד מהמקרים:

כאשר a **חיובי**, אנו יכולים להתעלם מהערך המוחלט במכנה ולהציג את הפעולה כך: $\$(a)=\frac{a^3}{|a|}=\frac{a^3}{a}=a^2$.

כלומר, עבור כל a חיובי התוצאה של הפעולה הנתונה חיובית.

כאשר a **שלילי**, אנו יכולים להציג את המכנה כך: $|a|=-a$. לפיכך: $\$(a)=\frac{a^3}{|a|}=\frac{a^3}{-a}=-a^2$.

כלומר, עבור כל a שלילי התוצאה של הפעולה הנתונה שלילית.

נעבור לבחינת התשובות כשבידינו ההבנה המופיעה לעיל:

תשובה (1): עבור כל a שלם וגדול מ-1, תוצאת הפעולה תהיה גדולה מ-1 (ערך שגדול מ-1 אשר מועלה בריבוע בהכרח גדול מ-1).

התשובה נפסלת.

תשובה (2): לאור העובדה ש- a^2 חיובי בהכרח ניתן להחיל עליו את הפעולה: $\$(a)=a^2$.

נחיל על a^2 את הפעולה: $\$(a^2)=(a^2)^2=a^{2\cdot 2}=a^4$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3): כאשר a שלם וחיובי מתקיים: $\$(a)=a^2$. נחיל על a^3 את הפעולה: $\$(a^3)=(a^3)^2=a^{3\cdot 2}=a^6$.

עבור כל a שלם וחיובי הטענה בתשובה הזו אינה נכונה ($\$(a^3)<a^3 \Rightarrow a^6<a^3$). התשובה נפסלת.

תשובה (4): כאמור, כאשר a שלילי מתקיים: $\$(a)=-a^2$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (2).

מציאת פעולה מומצאת

הנושא הבא בו נעסוק הוא נושא נדיר יותר בבחינה, אך בהחלט אפשרי שיופיע.
עד כה עסקנו בדוגמאות בהן הפעולה עצמה הייתה נתונה לנו, כלומר ידענו מה עלינו לעשות מבחינה מתמטית.
בשאלות מהסוג הזה אנו נידרש למצוא פעולה מתמטית מסוימת אשר מתאימה להיות הפעולה בשאלה.

<u>לדוגמה:</u>
לכל x ולכל y מתקיים: $x+y\$2=2\$x+y$.

מה יכולה להיות הפעולה $?

(1) חיבור

(2) חיסור

(3) כפל

(4) חילוק

נבחן כל אחת מהתשובות, ונבדוק אם היא מתאימה להיות הפעולה בשאלה:
תשובה (1): לפי תשובה זו: $x+y\$2=2\$x+y \Rightarrow x+y+2=2+x+y$.
שני אגפי המשוואה זהים זה לזה, ולכן המשוואה הזו מתקיימת **תמיד**, כלומר עבור כל x וכל y, כפי שנתון בשאלה.
מצאנו את התשובה הנכונה, ולכן אין צורך לבדוק את יתר התשובות, אולם נעשה כן לטובת שלמות ההסבר.
תשובה (2): $x+y\$2=2\$x+y \Rightarrow x+y-2=2-x+y$.
במשוואה הזו הן 2 והן x שונים מבחינת המקדם שלהם, ולכן המשוואה הזו אפשרית, אך בוודאי אינה נכונה עבור כל x וכל y.
התשובה נפסלת.
תשובה (3): $x+y\$2=2\$x+y \Rightarrow x+y\cdot 2=2\cdot x+y$.
גם בדוגמה הזו, המקדמים של x ושל y שונים. לפיכך, המשוואה הזו אפשרית, אך אינה נכונה עבור כל x וכל y. התשובה נפסלת.
תשובה (4): $x+y\$2=2\$x+y \Rightarrow x+\frac{y}{2}=\frac{2}{x}+y$.
ההסברים הנ"ל תקפים גם לפעולה הזו - המשוואה הזו אפשרית, אך לא נכונה עבור כל x וכל y. התשובה נפסלת.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה לדוגמה - מציאת פעולה מומצאת

הפעולה $ מוגדרת עבור כל שני מספרים a ו-b.

נתון: $\$(3,4)=25$

מה **אינה** יכולה להיות הפעולה $?

(1) $\$(a,b)=a^2+b^2$

(2) $\$(a,b)=a^3-\sqrt{b}$

(3) $\$(a,b)=1+2ab$

(4) $\$(a,b)=3\sqrt{a}+4b$

<u>פתרון</u>

נשאלנו מה **אינה** יכולה להיות הפעולה $, ולכן ניתן יהיה לפסול תשובות שבהן פעולה ש**כן** יכולה להתאים.
נעבור לבדיקת התשובות תוך שאנו עושים שימוש בנתון $\$(3,4)=25$:

תשובה (1): $\$(a,b)=a^2+b^2 \Rightarrow \$(3,4)=3^2+4^2=9+16=25$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\$(a,b)=a^3-\sqrt{b} \Rightarrow \$(3,4)=3^3-\sqrt{4}=27-2=25$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\$(a,b)=1+2ab \Rightarrow \$(3,4)=1+2\cdot3\cdot4=1+24=25$. התשובה נפסלת.

בשלב הזה כבר ניתן לסמן את תשובה (4), אך אם הזמן מאפשר, ניתן לבדוק אותה כדי לוודא שלא נעשתה טעות חישוב.

תשובה (4): $\$(a,b)=3\sqrt{a}+4b \Rightarrow \$(a,b)=3\sqrt{3}+4\cdot4=3\sqrt{3}+16$.

$3\sqrt{3}+16\neq25$. זו התשובה הנכונה.

התשובה הנכונה היא (4).

פעולה מומצאת "מתגלגלת"

פעולות מומצאות מהסוג הזה הן, בדומה לתת-הנושא הקודם, נדירות למדי.
בשאלות מהסוג הזה הפעולה לא בהכרח תסתיים לאחר ביצוע אחד שלה, כלומר ייתכן כי מעצם ההגדרה בשאלה יהיה עלינו להחיל פעולה מסוימת בצורה חוזרת ונשנית עד שנגיע לתוצאה מסוימת.

עבור כל x שונה מ-1 הוגדרה הפעולה $ כך:

אם x שלם, אז $\$(x)=\$\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

אם x שבר, אז $\$(x)=x-\frac{1}{2}$.

$\$(7)=?$

שימו לב כי ההמשכיות של הפעולה הזו באה לידי ביטוי בתנאי הראשון.
נתון כי אם x שלם, עלינו להוסיף לו 1, לחלק את התוצאה ב-2 ולבדוק לאיזה תנאי התוצאה מתאימה.
כך יש לעשות עד שנקבל x שהוא שבר, וכאשר זה יקרה יהיה עלינו להחיל את הפעולה לפי התנאי השני.
לאחר שנעשה כן, למעשה סיימנו את השאלה, שכן לפי התנאי השני יש להחיל את הפעולה פעם אחת בלבד.

לאחר ההקדמה הזו, נעבור לפתירת השאלה:

7 הוא מספר שלם, ולכן עלינו להחיל עליו את הפעולה לפי התנאי הראשון: $\$(x)=\$\left(\frac{x+1}{2}\right)\Rightarrow \$(7)=\$\left(\frac{7+1}{2}\right)=\$(4)$.

4 מספר שלם אף הוא, ולכן עלינו להחיל עליו את הפעולה לפי התנאי הראשון:
$\$(x)=\$\left(\frac{x+1}{2}\right)\Rightarrow \$(4)=\$\left(\frac{4+1}{2}\right)=\$\left(\frac{5}{2}\right)=\$\left(2\frac{1}{2}\right)$.

$2\frac{1}{2}$ הוא שבר, ולכן עלינו להחיל עליו את הפעולה לפי התנאי השני: $\$(x)=x-\frac{1}{2}\Rightarrow \$\left(2\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2$.

לאור האמור לעיל: $\$(7)=2$.

שאלה לדוגמה – פעולה מומצאת "מתגלגלת"

לכל מספר שלם שאינו שלילי x הוגדרה הפעולה $ כך:

אם $x=0$ אז $\$(x)=2$.

אם $0<x$ אז $\$(x)=\$(x-1)+2$.

$\$(3)=?$

(1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 4

פתרון

3 גדול מ-0, ולכן עלינו להחיל עליו את הפעולה לפי התנאי השני: $\$(x)=\$(x-1)+2 \Rightarrow \$(3)=\$(3-1)+2=\$(2)+2$.

אם כן: $\$(3)=\$(2)+2$. משום ש-2 גדול מ-0 עלינו להחיל עליו את הפעולה גם כן לפי התנאי השני:

$\$(2)=\$(2-1)+2=\$(1)+2$. אי לכך: $\$(2)=\$(1)+2$.

לאור האמור לעיל: $\$(3)=\$(2)+2=\$(1)+2+2=\$(1)+4$.

1 גדול אף הוא מ-0 ולכן עלינו להחיל עליו את הפעולה לפי התנאי השני: $\$(1)=\$(1-1)+2=\$(0)+2$.

לפיכך: $\$(3)=\$(1)+4=\$(0)+2+4=\$(0)+6$.

לפי התנאי הראשון, אם $x=0$ אז $\$(x)=2$.

לאור כל האמור לעיל: $\$(3)=\$(0)+6=2+6=8$.

התשובה הנכונה היא (2).

לסיכום

זכרו כי הפעולות המומצאות משתנות משאלה לשאלה והן, ברוב השאלות, יסומנו ב-$.

כמו כן, הפעולות לאו דווקא יצריכו ביצוע של פעולה מתמטית, הן יכולות להיות **הגדרה מילולית** מסוימת.

ברוב הפעולות אשר חלות על נעלמים, ניתן לבצע **הצבת מספרים**.
אולם, חשוב לזכור כי כאשר אנו מציבים מספרים במקום הנעלמים, עלינו להציב את אותם מספרים בכל ארבע התשובות ולסמן את התשובה הנכונה **רק לאחר שפסלנו 3 תשובות**.

בחלק מהשאלות שבהן נצטרך למצוא טענה נכונה או טענה שאינה נכונה יהיה נוח יותר להבין תחילה את אשר מתחייב לגבי פעולה מסוימת בטרם המעבר על התשובות, ואילו בשאלות אחרות יהיה נוח יותר להיעזר בתשובות.

שימו לב כי **ישנה חשיבות לסדר האיברים**.
אם, למשל, נתונה הפעולה $\$(a,b)$ ואנו מתבקשים למצוא את ערך הביטוי $\$(3,4)$ - 3 מייצג את a ו-4 מייצג את b.

באופן כללי, המפתח להצלחה בשאלות מהסוג הזה הוא **עבודה מסודרת** ככל האפשר.

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!