בעיות כמותיות

בעיות צירופים

בעיות צירופים

צירופים מתוך סלי בחירה שונים

בבעיות צירופים נידרש למצוא כמה אפשרויות שונות מתקיימות עבור בחירה או מספר בחירות מסוימות, כאשר אותן בחירות יהיו מתוך מה שנכנה "סל בחירה".

לדוגמה:
בכיתה א'1 ישנם 30 תלמידים. אנו רוצים לבחור מתוך הכיתה תלמיד אחד שיזכה בפרס.

מספר האפשרויות השונות עבור בחירת התלמיד שיזכה בפרס הוא 30, שכן ישנם 30 תלמידים בכיתה.
האמור לעיל הוא דוגמה לבחירה מתוך סל בחירה ***יחיד***, כאשר סל הבחירה הוא הכיתה.

דוגמה נוספת:
בכיתה א'1 ישנם 30 תלמידים.
בכיתה א'2 ישנם 10 תלמידים.
בכיתה א'3 ישנם 20 תלמידים.
אנו רוצים לבחור מתוך 3 הכיתות תלמיד אחד שיזכה בפרס.

מספר האפשרויות השונות עבור בחירת התלמיד שיזכה בפרס הוא: $30+10+20=60$.
שכן, ב-3 הכיתות ישנם 60 תלמידים וכל אחד מהם יכול להיות הזוכה.

מהדוגמה הזו אנו למדים שכאשר מתקיים מקרה של "**או**" בין סלי הבחירה השונים - בחירת התלמיד הייתה **או** מכיתה א'1 **או** מכיתה א'2 **או** מכיתה א'3 - עלינו **לחבר** את מספר האפשרויות בהם.

דוגמה נוספת:
בכיתה א'1 ישנם 30 תלמידים.
בכיתה א'2 ישנם 10 תלמידים.
בכיתה א'3 ישנם 20 תלמידים.
אנו רוצים לבחור תלמיד אחד מתוך כל כיתה שיזכה בפרס.

למעשה, אנו צריכים לבחור שלישיית תלמידים - תלמיד מכיתה א'1 **וגם** תלמיד מכיתה א'2 **וגם** תלמיד מכיתה א'3.
בדוגמה הזו, כל אחד מ-30 התלמידים מכיתה א'1 יכול לזכות בפרס עם כל אחד מ-10 התלמידים מכיתה א'2, וכן עם כל אחד מ-20 התלמידים מכיתה א'3.
לפיכך, עלינו לבצע **כפל** בין מספר האפשרויות בכל סל בחירה: $30\cdot10\cdot20=6{,}000$.
כלומר, ישנן 6,000 אפשרויות שונות לבחירת שלישיית התלמידים הזו.

מהדוגמה הזו אנו למדים שכאשר מתקיים מקרה של "**וגם**" בין סלי הבחירה השונים - בחירת התלמיד הייתה מכיתה א'1 **וגם** מכיתה א'2 **וגם** מכיתה א'3 - עלינו לבצע **כפל** בין מספר האפשרויות בהם.

✓ **כלל:** כאשר מתקיים בין סלי הבחירה קשר של "**או**",
עלינו **לחבר** את מספר האפשרויות בכל אחד מהסלים.

✓ **כלל:** כאשר מתקיים בין סלי הבחירה קשר של "**וגם**",
עלינו **לכפול** בין מספר האפשרויות בכל אחד מהסלים.

שאלה לדוגמה - צירופים מתוך סלי בחירה שונים

יובל רוצה לאכול ארוחה בת 3 מנות במסעדה (מנה ראשונה, מנה עיקרית ומנה אחרונה).
התפריט מכיל 5 מנות ראשונות, 4 מנות עיקריות ו-3 מנות אחרונות.

כמה ארוחות שונות זו מזו יכול יובל לאכול במסעדה?

(1) 10

(2) 20

(3) 30

(4) 60

<u>פתרון</u>

ישנם 3 סלי בחירה - מנה ראשונה (5 אפשרויות), מנה עיקרית (4 אפשרויות) ומנה אחרונה (3 אפשרויות).
יובל רוצה מנה מכל סל בחירה, כלומר מנה ראשונה **וגם** מנה עיקרית **וגם** מנה אחרונה, ולכן עלינו **לכפול** בין מספר האפשרויות בכל סל בחירה: $5\cdot4\cdot3=60$. כלומר, יובל יכול לאכול 60 ארוחות שונות זו מזו.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - צירופים מתוך סלי בחירה שונים

לגדי 3 חולצות, 2 גופיות, 4 זוגות נעליים ו-5 זוגות סנדלים.
תלבושת היא צירוף של חולצה עם זוג נעליים **או** צירוף של גופייה עם זוג סנדלים.

כמה תלבושות שונות זו מזו, לפחות בפריט אחד, יכול גדי ללבוש?

(1) 20

(2) 22

(3) 26

(4) 120

<u>פתרון</u>

נמצא את מספר האפשרויות עבור כל סוג של תלבושת ונחבר ביניהם, שכן מתקיים ביניהם קשר של "**או**".
מספר האפשרויות עבור חולצה (3 אפשרויות) וזוג נעליים (4 אפשרויות) הוא: $3\cdot4=12$.
מספר האפשרויות עבור גופייה (2 אפשרויות) וזוג סנדלים (5 אפשרויות) הוא: $2\cdot5=10$.
כאמור, נחבר בין מספר האפשרויות עבור כל תלבושת ונקבל: $12+10=22$.

התשובה הנכונה היא (2).

צירופים אסורים – מגבלת צירופים

בשאלות מסוימות עשויים לדרוש מאיתנו לחשב את מספר האפשרויות עבור מקרה מסוים, אולם לתת לנו כנתון מספר צירופים אסורים, כלומר מספר אפשרויות שמהן נצטרך להתעלם.

לדוגמה:
בכיתה א'1 ישנם 10 תלמידים ובכיתה א'2 ישנם 8 תלמידים.
אנו מעוניינים לבחור זוג נציגים, אחד מכל כיתה.
כלומר, אנו מעוניינים לבחור נציג מכיתה א'1 **וגם** נציג מכיתה א'2.

לפיכך, מספר האפשרויות עבור בחירה זו הוא: $10\cdot 8=80$.

אולם, נתון שדני, תלמיד מכיתה א'1, לא מוכן להיות עם 2 תלמידים מכיתה א'2- אורי ושי.
בנוסף, נתון שתום, תלמיד מכיתה א'2, לא מוכן להיות עם 3 תלמידים מכיתה א'1 – שמעון, רון וליאור.

לפיכך, עלינו לחסר ממספר האפשרויות שמצאנו קודם לכן (80) את הצירופים האסורים.
דני לא מוכן להיות עם 2 תלמידים מכיתה א'2, ועל כן יש לחסר 2 אפשרויות.
נוסף על כך, תום לא מוכן להיות עם 3 תלמידים מכיתה א'1, ועל כן יש לחסר 3 אפשרויות נוספות.
אם כן, מספר האפשרויות עבור בחירת זוג תלמידים מכיתה א'1 וכיתה א'2 הוא:
$80-2-3=75$.

שאלה לדוגמה – צירופים אסורים

לליאור יש 6 זוגות מכנסיים בצבעים שונים ו-4 חולצות בצבעים שונים.
את המכנסיים השחורים ניתן ללבוש רק עם החולצה האדומה, ואת המכנסיים האפורים ניתן ללבוש רק עם החולצה הירוקה.

כמה צירופי לבוש שונים יכול ליאור ללבוש?

(1) 24

(2) 16

(3) 18

(4) 10

פתרון

דרך א' – צירופים אסורים:
לולא היו מגבלות, מספר צירופי הלבוש השונים היה: $6\cdot 4=24$.
עם זאת, את המכנסיים השחורים ניתן ללבוש **רק** עם החולצה האדומה, כלומר ישנן 3 חולצות נוספות **שלא** ניתן ללבוש עם המכנסיים השחורים, ועל כן יש לחסר 3 אפשרויות.
את המכנסיים האפורים ניתן ללבוש **רק** עם החולצה הירוקה, כלומר ישנן 3 חולצות נוספות **שלא** ניתן ללבוש עם המכנסיים האפורים, ועל כן יש לחסר 3 אפשרויות נוספות.
לפיכך, מספר צירופי הלבוש האפשריים הוא: $24-3-3=18$.

דרך ב' – סלי בחירה שונים:
ישנם 4 זוגות מכנסיים שניתן ללבוש עם כל 4 החולצות. לפיכך, מספר צירופי הלבוש הוא: $4\cdot 4=16$.
כמו כן, ניתן ללבוש את המכנסיים השחורים עם החולצה האדומה, ולכן ישנו צירוף נוסף.
בנוסף, ניתן ללבוש את המכנסיים האפורים עם החולצה הירוקה, ועל כן ישנו צירוף נוסף.
משום כך, מספר צירופי הלבוש הוא: $16+1+1=18$.
התשובה הנכונה היא (3).

סל בחירה יחיד

עד כה, ראינו שאלות שבהן היו מספר סלי בחירה שונים זה מזה.
בשיעור הזה, נעסוק בשאלות בהן ישנו סל בחירה **יחיד**.
שאלות אלו מתחלקות ל-2 סוגים:

1. **עם החזרה** - כאשר נעשות כמה בחירות, וכל אחת מהן **לא משפיעה** על מספר האפשרויות בבחירות שאחריה.

2. **בלי החזרה** - כאשר נעשות כמה בחירות, וכל אחת מהן **משפיעה** על מספר האפשרויות בבחירות שאחריה.

<u>לדוגמה - סל בחירה יחיד עם החזרה:</u>
בהגרלה מסוימת מוגרלים בזה אחר זה הפריטים הבאים: עיפרון, מחק ומחדד.
בהגרלה משתתפים 4 תלמידים, ונתון שתלמיד יכול לזכות בכל אחת מההגרלות.

לזכייה בעיפרון ישנן 4 אפשרויות שונות, שכן ישנם 4 תלמידים שיכולים לזכות בו, וכך גם לגבי זכייה במחק ובמחדד.
לפיכך, מספר האפשרויות השונות עבור הזכייה ב-3 הפריטים הוא: $4\cdot4\cdot4=64$.

<u>לדוגמה - סל בחירה יחיד בלי החזרה:</u>
בהגרלה מסוימת מוגרלים בזה אחר זה הפריטים הבאים: עיפרון, מחק ומחדד.
בהגרלה משתתפים 4 תלמידים, ונתון שתלמיד **לא** יכול לזכות ביותר מהגרלה אחת.

לזכייה בעיפרון ישנן 4 אפשרויות שונות, שכן ישנם 4 תלמידים שיכולים לזכות בו.
לזכייה במחק ישנן 3 אפשרויות שונות, שכן התלמיד שזכה בעיפרון כבר לא משתתף בהגרלה הזו.
לזכייה במחדד ישנן 2 אפשרויות שונות, שכן התלמידים שזכו בעיפרון ובמחק כבר לא משתתפים בהגרלה הזו.
לפיכך, מספר האפשרויות השונות עבור הזכייה ב-3 הפריטים הוא: $4\cdot3\cdot2=24$.

ניתן לראות שההבדל בין שתי הדוגמאות הוא ההחזרה של ה"פריט".
בדוגמה הראשונה, התבצעה **החזרה** של ה"פריט" (ילד שזכה בהגרלה, יכול היה לעשות זאת שנית),
ועל כן מספר האפשרויות בכל בחירה היה **זהה**.

לעומת זאת, בדוגמה השנייה, **לא התבצעה החזרה** של ה"פריט" (ילד שזכה בהגרלה, לא יכול היה לזכות שנית), ועל כן מספר האפשרויות בכל בחירה **קָטֵן**.

✓ **כלל:** כאשר מתבצעות מספר בחירות מתוך סל בחירה **יחיד** - עלינו לבדוק האם מתבצעת החזרה או לא.
אם **כן**, לזכור שמספר האפשרויות בכל בחירה **זהה**. אם **לא**, לזכור שמספר האפשרויות בכל בחירה **קָטֵן**.

שאלה לדוגמה - סל בחירה יחיד

הומצאה שפה חדשה ובה 12 אותיות. בשפה זו, מילה מורכבת מ-2 אותיות.

כמה מילים שונות לכל היותר יכולות להיות בשפה הזו?

(1) 144

(2) 2^{12}

(3) 132

(4) 2^{11}

פתרון

עבור בחירת האות הראשונה ישנן 12 אפשרויות, שכן ישנן 12 אותיות.
שימו לב כי לא נאמר שעל האותיות להיות שונות זו מזו, כלומר מתבצעת "**החזרה**".
לפיכך, מספר האפשרויות לבחירת האות השנייה הוא 12 גם כן.
אם כן, מספר המילים המרבי (לכל היותר) שניתן ליצור בשפה הזו הוא: $12 \cdot 12 = 144$.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - סל בחירה יחיד

קוד הכספת של אייל מורכב מרצף של 4 ספרות. הספרות יכולות להיות בין 1 ל-5.
כל ספרה בקוד חייבת להיות גדולה מהספרה הבאה אחריה.

כמה אפשרויות שונות קיימות להרכבת קוד הכספת של אייל?

(1) 5

(2) 2

(3) 3

(4) 4

פתרון

שימו לב שישנן בעיות צירופים בהן הערכים בתשובות קטנים, וניתן לפרוט את המקרים השונים,
כלומר לעשות בדיקה "ידנית" שלהם.
בשאלה הזו, ניתן לסדר את המספרים מהגדול לקטן, כלומר מ-5 עד 1 ובכל פעם למחוק מספר אחד, כך שנקיים את הנתון בשאלה - כל ספרה בקוד חייבת להיות גדולה מזו שאחריה: 1 2 3 4 5.

אפשרות 1: $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cancel{5}$.

אפשרות 2: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \cancel{4} \quad 5$.

אפשרות 3: $1 \quad 2 \quad \cancel{3} \quad 4 \quad 5$.

אפשרות 4: $1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad 4 \quad 5$.

אפשרות 5: $\cancel{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$.

ניתן אפוא לראות, שישנן 5 אפשרויות שונות להרכבת קוד הכספת של אייל.
התשובה הנכונה היא (1).

שימוש בעצרת בבעיות צירופים

בשיעור הזה, נרחיב את שלמדנו בשיעור הקודם, ונסביר את הפעולה החשבונית "עצרת" המסומנת על ידי סימן קריאה (!).

לדוגמה:

נבצע מספר בחירות מתוך סל בחירה **יחיד** כאשר מספר האפשרויות הוא n.

כאשר **תתבצע החזרה** בכל בחירה, מספר האפשרויות השונות שנקבל עבור כל הבחירות הוא מכפלה של n בעצמו:

$n \cdot n \cdot n \cdot n ...$.

מספר הפעמים שנכפול את n בעצמו תלוי במספר הבחירות שנבצע.

דוגמה נוספת:

נבצע מספר בחירות מתוך סל בחירה **יחיד** כאשר מספר האפשרויות הוא n.

כאשר **לא תתבצע החזרה** בכל בחירה, מספר האפשרויות השונות שנקבל עבור כל הבחירות הוא מכפלה של מספר האפשרויות כאשר בכל בחירה יורדת אפשרות אחת:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) ...$.

נכפול את מספר האפשרויות זה בזה כתלות במספר הבחירות שנבצע, תוך שאנו זוכרים לחסר 1 ממספר האפשרויות בכל בחירה.

אם הכפל היה מתבצע עד שמספר האפשרויות היה 1, היה זה למעשה שימוש בפעולת ה**עצרת**.

עצרת היא פעולה חשבונית שמשמעותה כפל של כלל המספרים השלמים, מהערך שצמוד לסימן העצרת (!) ועד 1. כלומר:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 1$$

את הערכים הבאים אנו ממליצים לזכור בעל-פה:

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

דוגמה נוספת:

בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר 4 ילדים בשורה?

עבור המקום השמאלי ביותר ישנן 4 אפשרויות שונות, עבור המקום הבא אחריו 3 אפשרויות, עבור המקום הבא אחריו 2 אפשרויות ולמקום האחרון נשאר תלמיד 1, כלומר אפשרות אחת.

לפיכך, מספר האפשרויות השונות לסידור 4 ילדים בשורה הוא:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

אילו היינו נשאלים בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר 10 ילדים בשורה, התשובה הייתה:

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 1$.

אמנם אין צורך לדעת את ערכו של הביטוי !10, אולם עלינו לדעת שפירושו מכפלת כל המספרים השלמים מ-10 ועד 1.

✓ **כלל:** מספר האפשרויות ה**שונות** לסידור n פרטים **בשורה** הוא !n - מכפלת כל הגורמים השלמים מ-n ועד 1.

שאלה לדוגמה - שימוש בעצרת

לירון קנתה דיסק חדש שבו 13 שירים.
לירון אוהבת לשמוע את השירים בסדר אקראי.

כמה אפשרויות שונות יש לשמוע את כל השירים בדיסק מבלי לחזור על אף שיר פעמיים?

(1) $13!$

(2) 13

(3) 13^{13}

(4) אינסוף

<u>**פתרון**</u>

לירון לא מעוניינת לחזור על אף שיר פעמיים, כלומר **לא מתבצעת** "**החזרה**", ועל כן מספר האפשרויות בסל הבחירה **מצטמצם** בכל בחירה.
לבחירת השיר הראשון ישנן 13 אפשרויות, לבחירת השיר השני 12 אפשרויות, לבחירת השיר השלישי 11 אפשרויות וכך הלאה עד 1.
לפיכך, ניתן להסיק שמספר האפשרויות השונות שקיימות עבור לירון לשמוע את השירים הוא: $13!$
($13!=13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9...\cdot1$).
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - שימוש בעצרת

במשפחה 5 נפשות: אמא, אבא ו-3 ילדים.
המשפחה מעוניינת להסתדר בשורה לצילום משפחתי.

כמה אפשרויות שונות קיימות עבור המשפחה להסתדר לצילום המשפחתי?

(1) 5

(2) 12

(3) 24

(4) 120

<u>**פתרון**</u>

נסדר את בני המשפחה, ונבדוק כמה אפשרויות ישנן עבור כל מקום.
לשם כך, נתחיל מהמקום השמאלי ביותר (כמובן שניתן היה לסדרם מימין ולקבל תוצאה זהה).
עבור המקום השמאלי ביותר ישנן 5 אפשרויות, עבור המקום הבא אחריו ישנן 4 אפשרויות וכך הלאה עד 1.
לכן, מספר האפשרויות השונות לסידור המשפחה הוא: $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.
התשובה הנכונה היא (4).

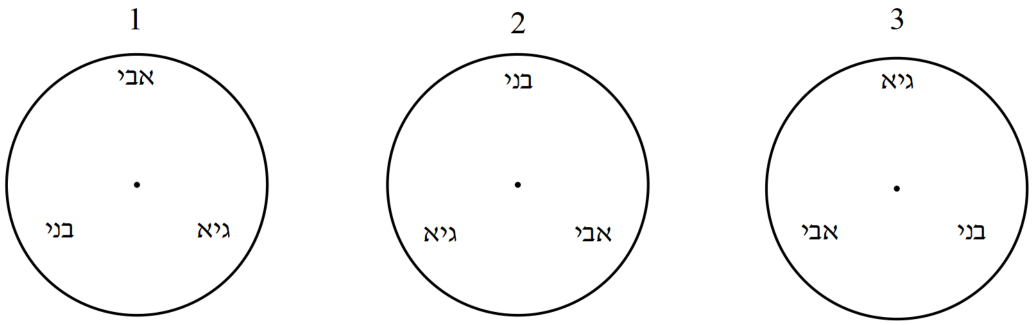
סידור במעגל

בשיעור הקודם דיברנו על סידור פרטים **בשורה**, והראינו שעבור סידור n פרטים בשורה,
מספר האפשרויות השונות הוא !n, כלומר מכפלת כל המספרים השלמים מ-n ועד 1.
בשיעור הזה נעסוק בסידור אנשים **במעגל** ונראה מה ההבדל ביניהם.

<u>לדוגמה:</u>
עבור סידור 3 תלמידים **בשורה** ישנן !3 אפשרויות שונות, שכן עבור המקום השמאלי ביותר ישנן 3 אפשרויות, עבור המקום הבא אחריו 2 אפשרויות ובמיקום האחרון אפשרות אחת בלבד.
אם כן, $3!=3\cdot2\cdot1=6$.

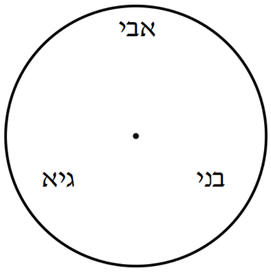
לעומת זאת, עבור סידור 3 תלמידים **במעגל** ישנן פחות אפשרויות.
הסיבה לכך שישנן אפשרויות מעטות יותר לסידור במעגל היא, שבניגוד ל**שורה**, בה יש **חשיבות** לכל אחד מהמקומות, ב**מעגל אין חשיבות** למקום הראשון בו אנו ממקמים.

במעגל 1 (נניח שפניהם של שלושת התלמידים הם כלפי מרכז המעגל), בני נמצא מימינו של אבי וגיא נמצא משמאלו. כך גם לגבי מעגלים 2 ו-3, בני נמצא מימינו של אבי וגיא נמצא משמאלו.
כלומר, אף על פי שבכל אחד מהמעגלים התלמידים נמצאים במקומות שונים, 3 האפשרויות המוצגות להלן **זהות** זו לזו.



כאמור, בניגוד לשורה, כאשר אנו מסדרים פרטים במעגל - **אין חשיבות למקום הראשון** בו אנו ממקמים את התלמידים.
ומכיוון שאין חשיבות למקום הראשון בו אנו ממקמים את התלמידים, מספר האפשרויות עבור הבחירה הראשונה הוא 1.
עם זאת, לאחר מיקום התלמיד הראשון, למיקום כל אחד מהתלמידים הבאים יש חשיבות, שכן יש הבדל אם גיא יישב מימינו של אבי או משמאלו.
אם כן, מספר האפשרויות עבור המקום הראשון הוא 1, מספר האפשרויות עבור המקום השני הוא 2, שכן נותרו 2 תלמידים ומספר האפשרויות עבור המקום השלישי הוא 1.
כלומר, מספר האפשרויות עבור סידור 3 תלמידים במעגל הוא: $1\cdot2\cdot1=2!=2$.

אפשרות אחת היא כל אחד משלושת המעגלים המוצגים לעיל, ואפשרות נוספת היא החלפת שני אנשים - לא משנה אילו - במיקומם. לצורך הדוגמה, נחליף בין המיקומים של בני וגיא:



בדוגמה הזו, גיא נמצא מימינו של אבי ואילו בני נמצא משמאלו, ועל כן מדובר באפשרות **שונה**.

✓ **כלל:** מספר האפשרויות ה**שונות** לסידור n פרטים **במעגל** הוא $(n-1)!$ - מכפלת כל הגורמים השלמים מ- $(n-1)$ ועד 1.

שאלה לדוגמה - סידור במעגל

קבוצה של 4 חברים מסתדרת במעגל כדי לרקוד "הורה".

כמה אפשרויות שונות קיימות עבורם להסתדר במעגל?

(1) 6

(2) 2

(3) 24

(4) 4

<u>פתרון</u>

כפי שהזכרנו בשיעור, מספר האפשרויות לסידור n פרטים במעגל הוא: $(n-1)!$.

אם כן, מספר האפשרויות לסידור 4 חברים במעגל הוא: $(4-1)!=3!=3\cdot2\cdot1=6$.

נזכיר שהסיבה לכך היא ש**אין חשיבות למקום הראשון**.

לפיכך, מספר האפשרויות עבור המקום הראשון הוא 1, מספר האפשרויות עבור המקום השני הוא 3, מספר האפשרויות עבור המקום השלישי הוא 2 ומספר האפשרויות עבור המקום האחרון הוא 1.

התשובה הנכונה היא (1).

צמצום כפילויות

עד כה, ראינו דוגמאות לבחירה מתוך מספר סלי בחירה, וכן דוגמאות לבחירה מתוך סל בחירה יחיד.
כאשר הבחירה הייתה מתוך סל בחירה יחיד, נדרשנו לשים לב האם מתבצעת החזרה או לאו.

בשיעור הקרוב, נדבר על דוגמאות בהן הבחירה מתבצעת מתוך סל בחירה **יחיד**, **לא** מתבצעת **החזרה** ו**אין חשיבות לסדר הבחירה**.

לדוגמה - מצב בו **יש** חשיבות לסדר הבחירה:
בהגרלה מסוימת מוגרלים בזה אחר זה 2 פריטים: עיפרון ומחק.
בהגרלה משתתפים 4 תלמידים, ונתון שתלמיד **לא** יכול לזכות ביותר מהגרלה אחת.

לזכייה בעיפרון ישנן 4 אפשרויות שונות, שכן ישנם 4 תלמידים שיכולים לזכות בו.
לזכייה במחק ישנן 3 אפשרויות שונות, שכן התלמיד שזכה בעיפרון כבר לא משתתף בהגרלה הזו.
לפיכך, מספר האפשרויות השונות עבור הזכייה ב-2 הפריטים הוא: $4\cdot 3=12$.

היות שהפרסים המוגרלים **שונים** זה מזה, **יש** חשיבות לסדר הבחירה - כלומר לסדר הזכייה בפרסים.
למשל, נניח שהזוכים בפרסים הם אבי ובני - עבור מקרה זה, ישנן 2 אפשרויות **שונות**:

1. אבי זכה בהגרלה הראשונה (עיפרון) ובני זכה בהגרלה השנייה (מחק).
2. בני זכה בהגרלה הראשונה (עיפרון) ואבי זכה בהגרלה השנייה (מחק).

לדוגמה - מצב בו **אין** חשיבות לסדר הבחירה:
בהגרלה מסוימת מוגרלים בזה אחר זה 2 מחקים זהים.
בהגרלה משתתפים 4 תלמידים, ונתון שתלמיד **לא** יכול לזכות ביותר מהגרלה אחת.

לזכייה במחק הראשון ישנן 4 אפשרויות שונות, שכן ישנם 4 תלמידים שיכולים לזכות בו.
לזכייה במחק השני ישנן 3 אפשרויות שונות, שכן התלמיד שזכה בעיפרון כבר לא משתתף בהגרלה הזו.
לפיכך, מספר האפשרויות השונות עבור הזכייה ב-2 המחקים הוא: $4\cdot 3=12$.

אולם, הפרסים המוגרלים **זהים** זה לזה, ועל כן **אין** חשיבות לסדר הבחירה - כלומר לסדר הזכייה בפרסים.
אם למשל, הזוכים בפרסים הם פעם נוספת אבי ובני - ישנה אפשרות אחת בלבד, שכן אין זה משנה מה יהיה סדר הזכייה. כך או כך, שניהם יזכו במחק זהה.

אם כן, מספר האפשרויות השונות **אינו** 12.
בכדי למצוא את מספר האפשרויות, עלינו לחלק את מספר האפשרויות שמצאנו (12) **בעצרת של מספר הבחירות**, כלומר לחלק את 12 ב-!2, שכן היו 2 בחירות:

$$\frac{12}{2!}=\frac{12}{2\cdot 1}=6.$$

<u>דוגמה נוספת:</u>

מתוך כיתה של 10 תלמידים אנו מעוניינים לבחור 3 תלמידים לוועדת קישוט.

סל הבחירה בדוגמה הזו הוא **יחיד** ו**לא** מתבצעת **החזרה**.
אם כן, עבור הבחירה הראשונה ישנן 10 אפשרויות, עבור הבחירה השנייה ישנן 9 אפשרויות ועבור הבחירה השלישית ישנן 8 אפשרויות, ולכן סך כל האפשרויות הוא: $10 \cdot 9 \cdot 8$.

שימו לב שעלינו לשאול את עצמנו כעת האם יש חשיבות לסדר הבחירה - כלומר האם יש הבדל בין (אבי, בני, גדי) ל-(בני, גדי, אבי).

מדובר בנציגים לוועדת קישוט, ועל כן **אין** חשיבות לסדר הבחירה.
לפיכך, עלינו לחלק את מספר האפשרויות ב**עצרת מספר הבחירות**, כלומר ב-!3:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4}}{{}^{1}\cancel{3} \cdot {}^{1}\cancel{2} \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

כלומר, מספר האפשרויות השונות עבור בחירת 3 תלמידים לוועדת קישוט הוא 120.

<u>שימו לב!</u>
אם בחירת התלמידים הייתה לתפקידים ספציפיים כגון: יו"ר הוועדה, סגן יו"ר הוועדה ומזכיר הוועדה, **הייתה חשיבות** לסדר הבחירה, **ולא** היינו צריכים לחלק בעצרת מספר הבחירות.
זאת, כיוון שבמקרה כזה יש הבדל בין (אבי, בני, גדי) ל-(בני, גדי, אבי), שכן בכל אחת מהאפשרויות, כל אחד מהם מחזיק בתפקיד שונה.

שאלה לדוגמה - צמצום כפילויות

בגלידריה יש 8 טעמים שונים של גלידה.
אבי רוצה גביע גלידה ובו 3 טעמים שונים זה מזה.

כמה אפשרויות שונות קיימות לבחירת הטעמים לגביע של אבי?

(1) 56
(2) 42
(3) 8
(4) 6

<u>פתרון</u>
אבי מעוניין לבחור 3 טעמים שונים זה מזה, ועל כן מספר האפשרויות בכל בחירה **קָטֵן**.
לפיכך, מספר האפשרויות בבחירה הראשונה הוא 8, שכן ישנם 8 טעמים שונים.
מספר האפשרויות בבחירה השנייה הוא 7 ומספר האפשריות בבחירה השלישית הוא 6.
כעת, עלינו לשאול את עצמנו האם יש חשיבות לסדר בחירת הטעמים.
כלומר, האם יש הבדל אם אבי יקבל תות, וניל ושוקולד או וניל, שוקולד ותות.
התשובה היא לא, כלומר **אין חשיבות לסדר בחירת** הטעמים, ולכן עלינו לחלק את מספר האפשרויות ב**עצרת של מספר הבחירות** (3):

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 56.$$

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – צמצום כפילויות

לרונן יש 5 תמונות. הוא מעוניין לבחור 4 מהן שיופיעו בתערוכה.

כמה אפשרויות שונות קיימות עבור רונן לבצע את הבחירה?

(1) 12

(2) 24

(3) 5

(4) 4

פתרון

מספר האפשרויות עבור הבחירה הראשונה הוא 5, מספר האפשרויות עבור הבחירה השנייה הוא 4 וכן הלאה.
כעת, עלינו לשאול עצמנו האם יש חשיבות לסדר הבחירה.
התשובה היא **לא**, שכן אין זה משנה מה יהיה סדר בחירת התמונות.
לפיכך, עלינו לחלק את מספר האפשרויות בעצמת מספר הבחירות (4):

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}=\frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=5.$$

שימו לב שניתן היה לפתור את השאלה גם כך:

רונן מעוניין לבחור 4 תמונות מתוך 5, במילים אחרות עליו לבחור תמונה 1 מתוך 5 התמונות ש**לא** תופיע בתערוכה.
ישנן 5 תמונות, ולכן מספר האפשרויות לבחירת התמונה ש**לא** תופיע הוא 5.
התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת – צמצום כפילויות

בכיתה 5 בנים ו-4 בנות, ומהם המורה רוצה לבחור 4 תלמידים לוועדת הקישוט: 2 בנים ו-2 בנות.

כמה אפשרויות **שונות** קיימות לבחירת הוועדה?

(1) 10

(2) 20

(3) 30

(4) 60

פתרון

נמצא את מספר האפשרויות עבור בחירת 2 הבנים, וכן את מספר האפשרויות עבור בחירת 2 הבנות ונבצע ביניהם כפל, שכן אנו מעוניינים לבחור 2 בנים **וגם** 2 בנות.
<u>בנים:</u> עבור בחירת הבן הראשון ישנן 5 אפשרויות ועבור בחירת הבן השני ישנן 4 אפשרויות.
אין חשיבות לסדר בחירת הבנים, ואי לכך יש לחלק את מספר האפשרויות בעצרת מספר הבחירות (2): $\frac{5\cdot4}{2!}=\frac{20}{2}=10$.
כלומר, ישנן 10 אפשרויות שונות לבחירת הבנים.
<u>בנות:</u> עבור בחירת הבת הראשונה ישנן 4 אפשרויות ועבור בחירת הבת השנייה ישנן 3 אפשרויות.
בדומה לבחירת הבנים, אין חשיבות לסדר בחירת הבנות, ואי לכך יש לחלק את מספר האפשרויות בעצרת מספר הבחירות (2):
$\frac{4\cdot3}{2!}=\frac{12}{2}=6$. כלומר, ישנן 6 אפשרויות שונות לבחירת הבנות.
כאמור, נכפול את מספר האפשרויות זה בזה ונקבל: $10\cdot6=60$.
התשובה הנכונה היא (4).

✓ **כלל:** כאשר אין חשיבות לסדר בחירת הפריטים בשאלה, עלינו לחלק את מספר האפשרויות בעצרת מספר הבחירות.

פעולה הדדית

סוג השאלות הזה הוא נקודתי למדי, וכן הסבירות להופעתו נמוך.
עם זאת, חשוב להכיר את העיקרון שבבסיסו על מנת שלא יהיה סיכוי שנופתע בבחינה.

<u>לדוגמה:</u>
במסיבה מסוימת ישנם 20 חוגגים, וכל אחד מהם רוצה ללחוץ את ידו של כל אחד מהמשתתפים האחרים.
כמה לחיצות ידיים יהיו במסיבה?

למעשה, כל אחד מ-20 החוגגים ילחץ את ידו של כל אחד מ-19 החוגגים האחרים.
אם כן, מספר לחיצות הידיים הוא מכפלה של 20 ב-19.

אולם, עלינו לזכור שבמכפלה הזו יש **כפילות**.

נניח ששמותיהם של 2 מהחוגגים הם אורי ושמעון.
במכפלה של 20 ב-19, כללנו את לחיצות הידיים הבאות:

1. אורי לחץ את ידו של שמעון.
2. שמעון לחץ את ידו של אורי.

לחיצת ידיים היא **פעולה הדדית**, ולכן מתקיימת **כפילות**, כלומר 2 האפשרויות המתוארות לעיל, הן למעשה אפשרות אחת בלבד.

את הכפילות המתוארת לעיל נבטל על ידי חלוקה ב-2.

לפיכך, מספר לחיצות הידיים במסיבה הוא: $\frac{\overset{10}{\cancel{20}}\cdot 19}{\underset{1}{\cancel{2}}}=10\cdot 19=190$.

שאלה לדוגמה - פעולה הדדית

הגננת ביקשה מנמרוד לצייר 4 בתים על דף נייר.
לאחר מכן, הורתה לו למתוח קו **בצבע שונה** בין כל 2 בתים.

כמה צבעים שונים צריך נמרוד על מנת להשלים את המשימה?

(1) 16

(2) 12

(3) 6

(4) 4

<u>פתרון</u>
בכדי לחבר 4 בתים ל-3 בתים אחרים, מספר הקווים שאנו צריכים הוא: $4\cdot 3=12$.
עם זאת, עלינו לזכור שכאשר חיברנו את בית 1 לבית 2 למשל, אין צורך לחבר את בית 2 לבית 1, שכן כבר נעשה ביניהם קו.
לפיכך, ישנה **כפילות**.

על מנת לצמצם אותה, עלינו לחלק את מספר הקווים ב-2: $\frac{12}{2}=6$.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. **צירופים מתוך סלי בחירה שונים:**
   - כאשר מתקיימים בין סלי הבחירה קשר של "**או**", עלינו **לחבר** את מספר האפשרויות בכל אחד מהסלים.
   - כאשר מתקיימים בין סלי הבחירה קשר של "**וגם**", עלינו **לכפול** בין מספר האפשרויות בכל אחד מהסלים.

2. **צירופים אסורים – מגבלת צירופים:**

   כאשר בשאלה נתונות מגבלות, אנו יכולים לפעול בשתי דרכים:
   1. לחשב את כל האפשרויות ולחסר מהן את המגבלות, כלומר את הצירופים האסורים.
   2. לחשב מבעוד מועד את הצירופים המותרים על-פי נתוני השאלה.

3. **סל בחירה יחיד:**

   כאשר מתבצעות מספר בחירות מתוך סל בחירה **יחיד**, עלינו לבדוק האם מתבצעת החזרה או לא.
   אם **כן**, לזכור שמספר האפשרויות בכל בחירה **זהה**. אם **לא**, לזכור שמספר האפשרויות בכל בחירה **קָטֵן**.

4. **שימוש בעצרת בבעיות צירופים:**
   - **עצרת** היא פעולה חשבונית שמשמעותה כפל של כלל המספרים השלמים, מהערך שצמוד לסימן העצרת (!) ועד 1.
     לדוגמה: $3!=3\cdot2\cdot1=6$.
   - מספר האפשרויות ה**שונות** לסידור n פרטים **בשורה** הוא $n!$ - מכפלת כל הגורמים השלמים מ-n ועד 1.

5. **סידור במעגל:**

   מספר האפשרויות ה**שונות** לסידור n פרטים **במעגל** הוא $(n-1)!$ - מכפלת כל הגורמים השלמים מ-$(n-1)$ ועד 1.

6. **צמצום כפילויות:**

   כאשר נעשית בחירה מתוך סל בחירה **יחיד ואין חשיבות לסדר הבחירה**, עלינו **לצמצם כפילויות**.
   זאת, נעשה על ידי **חלוקת** מספר האפשרויות שחישבנו **בעצרת מספר הבחירות**.

7. **פעולה הדדית:**

   ישנן **פעולות הדדיות** מסוימות שכאשר נחשב את מספר האפשרויות שמתקיימים עבורן, תיווצר **כפילות**.
   את הכפילות הזו **נצמצם** על ידי חלוקה ב-2. דוגמאות לפעולות מן הסוג המתואר לעיל הן:
   לחיצות ידיים, משחקים בין קבוצות, התמסרות בכדור וכך הלאה.

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!