אלגברה

ערך מוחלט

ערך מוחלט

מבוא לערך מוחלט

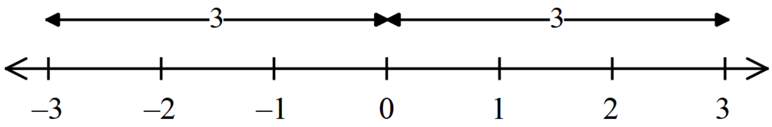
ערך מוחלט הוא הערך הכמותי של מספר מסוים מבלי להתחשב בסימן שלו - שלילי או חיובי - והוא מסומן כך: $|\ |$.

במילים אחרות, ערך מוחלט מייצג את המרחק של ערך מסוים מ-0.

<u>לדוגמה:</u>

המרחק של 3 מ-0 הוא 3. המרחק של -3 מ-0 הוא 3 גם כן.

כאמור, ערך מוחלט מייצג את המרחק של ערך מסוים מ-0, ולכן: $|-3| = |3| = 3$.



המספר שלו המרחק הנמוך ביותר מ-0 הוא 0 עצמו.

לפיכך, ניתן לקבוע כי הערך הנמוך ביותר של ביטוי אשר נמצא בערך מוחלט הוא 0.

זכרו! לא ניתן להסיק אם הביטוי אשר נמצא בתוך הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי, אלא כי הביטוי כולו אינו שלילי.

<u>לדוגמה:</u>

$|x|$

x עצמו עשוי להיות כל ערך שהוא (כולל ערכים שליליים), ולכן לא ניתן להסיק דבר לגביו.

עם זאת, ניתן לקבוע כי $|x|$ - יהיה גודלו של x אשר יהיה - לעולם אינו שלילי.

<u>ערכו של הביטוי אשר נמצא בתוך הערך המוחלט:</u>

כאשר הביטוי אשר נמצא בתוך הערך המוחלט **חיובי** ($0 < x$), ניתן לקבוע: $|x| = x$.

<u>לדוגמה:</u>

כאשר $x = 5$, הערך המוחלט שלו שווה לאותו ערך: $|5| = 5$.

לעומת זאת, כאשר הביטוי אשר נמצא בתוך הערך המוחלט **שלילי** ($x < 0$), ניתן לקבוע: $|x| = -x$.

<u>לדוגמה:</u>

כאשר $x = -5$, הערך המוחלט שלו שווה למספר הנגדי שלו: $|-5| = -(-5) = 5$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

עבור איזה x ערכו של הביטוי $|x|$ יהיה הקטן ביותר?

כאמור, ביטוי בערך מוחלט לעולם אינו שלילי, כלומר הערך הקטן ביותר של ביטוי בערך מוחלט הוא 0.

לפיכך, עבור $x = 0$ הביטוי $|x|$ יהיה הקטן ביותר: $|x| = |0| = 0$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

עבור איזה x ערכו של הביטוי $|x-5|$ יהיה הקטן ביותר?

הערך הקטן ביותר של הביטוי $|x-5|$ הוא 0, וערך זה יתקבל כאשר $x = 5$:

$|x-5| = |5-5| = |0| = 0$.

לסיכום, ערך מוחלט של ביטוי לעולם אינו שלילי, אולם אין להסיק מכך לגבי ערכו של הביטוי אשר נמצא בתוך הערך המוחלט.

שאלה לדוגמה - מבוא לערך מוחלט

$2-\frac{||-2|-8|}{-3}=?$

(1) 0

(2) 2

(3) -2

(4) 4

פתרון

$|-2|=2$ ולכן: $2-\frac{|2-8|}{-3}=2-\frac{||-2|-8|}{-3}$. נחשב את ערכו של הביטוי במונה: $2-\frac{|-6|}{-3}=2-\frac{|2-8|}{-3}$.

$|-6|=6$ ולכן: $2-\frac{6}{-3}=2-\frac{|-6|}{-3}$. כעת, נחשב את ערכו של השבר ונבצע את החיסור: $2-\frac{6}{-3}=2-(-2)=2+2=4$.

התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - מבוא לערך מוחלט

נתון: $0<a$

$a\cdot(-a)\cdot(2\cdot|-3|\cdot|-a|\cdot a)=?$

(1) $6a^3$

(2) $3a^4$

(3) $-6a^4$

(4) $-6a^3$

פתרון

דרך א' - פתרון אלגברי:

נפשט את הביטוי תוך שאנו מתחשבים בערכם של האיברים אשר נמצאים בערך מוחלט.

$|-3|=3$; כמו כן, משום ש-a חיובי $|-a|=a$. לפיכך: $a\cdot(-a)\cdot(2\cdot|-3|\cdot|-a|\cdot a)=a\cdot(-a)\cdot(2\cdot 3\cdot a\cdot a)$.

נבצע את הכפל בין האיברים: $a\cdot(-a)\cdot(2\cdot 3\cdot a\cdot a)=-6a^4$.

דרך ב' - הצבת מספרים:

התשובות מכילות את הנעלם בשאלה, a, ועל כן ניתן להציב מספר נוח במקומו.

נציב $a=2$ בביטוי: $a\cdot(-a)\cdot(2\cdot|-3|\cdot|-a|\cdot a)=2\cdot(-2)\cdot(2\cdot|-3|\cdot|-2|\cdot 2)=2\cdot(-2)\cdot(2\cdot 3\cdot 2\cdot 2)=-4\cdot 24=-96$.

כעת, נציב $a=2$ בתשובות, ונפסול את אלו שערכן אינו (-96):

תשובה (1): $6a^3=6\cdot 2^3=6\cdot 8=48$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $3a^4=3\cdot 2^4=3\cdot 16=48$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $-6a^4=-6\cdot 2^4=-6\cdot 16=-96$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $-6a^3=-6\cdot 2^3=-6\cdot 8=-48$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - מבוא לערך מוחלט

נתון: $-5 \le a \le 5$

$y = 10 - |a-1|$

ערכו המקסימלי של y הוא -

(1) 10

(2) 7

(3) 8

(4) 9

<u>**פתרון**</u>

כדי שערכו של y יהיה מקסימלי, כלומר גדול ככל האפשר, אנו צריכים לחסר מ-10 ערך קטן ככל האפשר.
בשאלה הזו, אנו מחסרים מ-10 ביטוי בערך מוחלט. כפי שצוין בשיעור, ביטוי בערך מוחלט לעולם אינו שלילי, כלומר ערכו הקטן ביותר האפשרי הוא 0. כדי שהביטוי $|a-1|$ יהיה שווה ל-0, על a להיות 1 ($|a-1| = |1-1| = |0| = 0$).

לפי הנתון ($-5 \le a \le 5$), a יכול להיות 1. אם כן, ערכו המקסימלי של y הוא 10, וזאת כאשר $a = 1$:

$y = 10 - |a-1| \Rightarrow y = 10 - |1-1| \Rightarrow y = 10 - |0| \Rightarrow y = 10$.

לאור האמור לעיל, כאשר שאלה כוללת ביטוי בערך מוחלט, אין זה בהכרח אומר שעלינו לבדוק את הערכים הקיצוניים ביותר.
התשובה הנכונה היא (1).

<u>הערה:</u> לו היינו מתבקשים למצוא את ערכו המינימלי של y, הפתרון היה נראה כך:
כדי שערכו של y יהיה מינימלי, כלומר קטן ככל האפשר, אנו צריכים לחסר מ-10 ערך גדול ככל האפשר.
כדי שהביטוי $|a-1|$ יהיה גדול ככל האפשר, על a להיות -5 ($|a-1| = |-5-1| = |-6| = 6$).

אם כן, ערכו המינימלי של y הוא 4, וזאת כאשר $a = -5$:

$y = 10 - |a-1| \Rightarrow y = 10 - |-5-1| \Rightarrow y = 10 - |-6| \Rightarrow y = 10 - 6 \Rightarrow y = 4$.

ערך מוחלט במשוואות

בבחינה הפסיכומטרית ערך מוחלט עשוי להופיע, כפי שראינו על קצה המזלג בחלק הקודם של השיעור, גם במשוואות.

<u>לדוגמה:</u>

$|x+3|=7$

כמה ערכים שונים של x מקיימים את המשוואה?

כאמור, ערך מוחלט מייצג את המרחק של ביטוי מסוים מ-0.
המשוואה המופיעה לעיל במילים היא: ערך מוחלט של $x+3$ שווה ל-7.
במילים אחרות, המרחק של $x+3$ מ-0 הוא 7.
לפיכך, הביטוי $x+3$ יכול להיות שווה הן ל-7 והן ל-(7-) (זאת משום שהערך המוחלט של 7- הוא 7).

לאור האמור לעיל, כאשר נתון לנו ביטוי בערך מוחלט אשר שווה לערך מסוים, עלינו לבדוק 2 מקרים:

1. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **חיובי**: $x+3=7$. נעביר את 3 אגף: $x=4$.
2. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **שלילי**: $x+3=-7$. נעביר את 3 אגף: $x=-10$.

לאור האמור לעיל, ישנם 2 ערכים שונים של x אשר מקיימים את המשוואה הנתונה.

<u>דוגמה נוספת - נעלם בתוך ערך מוחלט ומחוצה לו:</u>

$|6x+3|=7x+10$

כמה ערכים שונים של x מקיימים את המשוואה?

כאמור, עלינו לבדוק את שני המקרים:

1. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **חיובי**: $6x+3=7x+10$. נעביר אגפים: $x=-7$.
2. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **שלילי**: $6x+3=-(7x+10)$. לאחר פישוט: $6x+3=-7x-10$. נעביר אגפים: $13x=-13$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-13 ונקבל: $x=-1$.

שימו לב! כאשר נעלם מסוים מופיע הן בערך מוחלט והן ללא ערך מוחלט, אנו מוכרחים להציב את ערך הנעלם שמצאנו במשוואה המקורית ולבדוק אם הוא אכן מקיים אותה:

כאשר $x=-7$:

$|6x+3|=7x+10 \Rightarrow |6\cdot(-7)+3|=7\cdot(-7)+10 \Rightarrow |-42+3|=-49+10 \Rightarrow |-39|=-39 \Rightarrow 39\neq-39$.

ערך זה **אינו מקיים** את המשוואה.

כאשר $x=-1$:

$|6x+3|=7x+10 \Rightarrow |6\cdot(-1)+3|=7\cdot(-1)+10 \Rightarrow |-6+3|=-7+10 \Rightarrow |-3|=3$.

ערך זה **מקיים** את המשוואה.

לאור האמור לעיל, ישנו ערך אחד בלבד אשר מקיים את המשוואה הזו והוא: $x=-1$.

דוגמה נוספת - ערך מוחלט בשני אגפי המשוואה:

$$|x+3|=|2x+6|$$

כמה ערכים שונים של x מקיימים את המשוואה?

העובדה שבשני אגפי המשוואה ביטויים בערך מוחלט אינה משפיעה על דרך הפתרון שלמדנו.
גם במקרה הזה ישנם 2 מקרים:

1. לשני האגפים מקדם חיובי: $x+3=2x+6$. נעביר אגפים: $x=-3$.

2. אגף אחד עם מקדם חיובי, ואילו האגף השני עם מקדם שלילי: $x+3=-(2x+6)$. נפתח את הסוגריים באגף הימני: $x+3=-2x-6$. נעביר אגפים: $3x=-9$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x=-3$.

ב-2 המקרים התקבל $x=-3$.

לאור האמור לעיל, ישנו ערך אחד בלבד אשר מקיים את המשוואה הזו והוא $x=-3$.

שאלה לדוגמה - ערך מוחלט במשוואות

נתון: $|3x+3|=3$

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות x?

(1) $\frac{1}{3}$ (2) -2 (3) -3 (4) 10

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - בדיקת תשובות:</u>

נשאלנו "מה יכול להיות" ערכו של x, ולכן ניתן לבדוק תשובות:
נציב כל אחת מהתשובות במשוואה, ונבדוק איזו מהן מקיימת אותה:

תשובה (1): $|3x+3|=3 \Rightarrow \left|3\cdot\frac{1}{3}+3\right|=3 \Rightarrow |1+3|=3 \Rightarrow |4|\neq 3$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $|3x+3|=3 \Rightarrow |3\cdot -2+3|=3 \Rightarrow |-6+3|=3 \Rightarrow |-3|=3$. זו התשובה הנכונה.

בבדיקת תשובות אין צורך לבדוק את כל התשובות לאחר מציאת התשובה הנכונה.
למרות זאת, אם הזמן מאפשר לנו, ניתן לבדוק את כולן כדי לוודא שלא נעשתה טעות חישוב.

<u>דרך ב' - פתרון אלגברי:</u>

ערכו המוחלט של הביטוי $3x+3$ שווה ל-3. לפיכך, ערכו עשוי להיות הן 3 והן 3-. נבדוק את שני המקרים:

1. $3x+3=3$. נעביר את 3 אגף: $3x=0$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x=0$.
0 אינו מופיע בתשובות, ולכן הוא אינו יכול להיות התשובה הנכונה.

2. $3x+3=-3$. נעביר את 3 אגף: $3x=-6$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל: $x=-2$.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - ערך מוחלט במשוואות

נתון: $|x-y|=|x+y|$

$x\cdot y=?$

(1) 1

(2) 2

(3) 0

(4) 4

<u>פתרון</u>

כפי שלמדנו בשיעור, כאשר ערך מוחלט מופיע בשני אגפי המשוואה עלינו לבדוק 2 מקרים:

1. לשני האגפים מקדם חיובי: $x-y=x+y$.

נעביר אגפים: $2y=0$. נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $y=0$.

2. אגף אחד עם מקדם חיובי, ואילו האגף השני עם מקדם שלילי: $x-y=-(x+y)$.

נפתח את הסוגריים באגף הימני: $x-y=-x-y$. נעביר אגפים: $2x=0$.

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל: $x=0$.

לאור האמור לעיל, x או y שווים ל-0. אם כן, מכפלתם שווה ל-0 אף היא.

לטובת שלמות ההסבר, נציב 0 במקום כל אחד מהנעלמים, ונבדוק שהמשוואה אכן מתקיימת:

כאשר $y=0$:

$|x-y|=|x+y|\Rightarrow|x-0|=|x+0|\Rightarrow|x|=|x|$. משוואה זו מתקיימת עבור כל ערך של x.

כאשר $x=0$:

$|0-y|=|0+y|\Rightarrow|-y|=|y|$. משוואה זו מתקיימת עבור כל ערך של y.

התשובה הנכונה היא (3).

ערך מוחלט באי-שוויונות

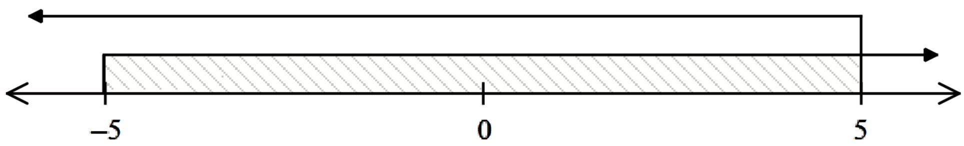
ערך מוחלט עשוי להופיע גם בשאלות בנושא אי-שוויונות, ובחלק הזה של השיעור נעסוק בהן.

<u>לדוגמה - ביטוי מערך מוחלט אשר **קטן** מערך מסוים:</u>

$|x| < 5$

מאי-השוויון הנ"ל ניתן להסיק כי המרחק של x מ-0 קטן מ-5.
עלינו לזכור שהמרחק מ-0 יכול להיות גם שלילי.
לפיכך, על x להיות קטן מ-5 **וגם** גדול מ-(5-).
על גבי ציר מספרים האמור לעיל נראה כך:

$-5 < x$ **וגם** $x < 5$



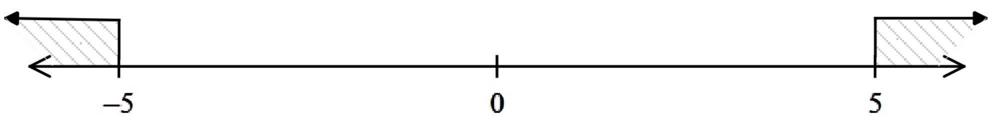
✓ **כלל:** כאשר נתון $|x| < a$, ניתן לקבוע כי $x < a$ **וגם** $-a < x$, ולפיכך: $-a < x < a$.

<u>לדוגמה - ביטוי מערך מוחלט אשר **גדול** מערך מסוים:</u>

$5 < |x|$

מאי-השוויון הנ"ל ניתן להסיק כי המרחק של x מ-0 גדול מ-5.
עלינו לזכור שהמרחק מ-0 יכול להיות גם שלילי.
לפיכך, x צריך להיות גדול מ-5 **או** קטן מ-(5-).
על גבי ציר מספרים האמור לעיל נראה כך:

$x < -5$ **או** $5 < x$



✓ **כלל:** כאשר נתון $a < |x|$, ניתן לקבוע כי: $a < x$ **או** $x < -a$.

שאלה לדוגמה - ערך מוחלט באי-שוויונות

נתון: $|x+2|<17$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $-19<x<15$

(2) $-17<x<17$

(3) $x<-19$ או $15<x$

(4) $-15<x<19$

פתרון

כפי שלמדנו בשיעור, כאשר נתון לנו ביטוי בערך מוחלט אשר קטן מערך מסוים, ישנם 2 פישוטים:

.1 $x+2<17$. נחסר 2 משני אגפי אי-השוויון: $x<15$.

.2 $-17<x+2$. נחסר 2 משני אגפי אי-השוויון: $-19<x$.

לאור האמור לעיל, $x<15$ **וגם** $-19<x$, ולפיכך: $-19<x<15$.

התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת - ערך מוחלט באי-שוויונות

נתון: $||1-6|-2|-|a|<0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $a<3$ (2) $3<a$ (3) $9<a^2$ (4) $1<a$

פתרון

תחילה, נפשט את הערכים המספריים באי-השוויון הנתון: $||1-6|-2|-|a|<0 \Rightarrow ||-5|-2|-|a|<0 \Rightarrow |5-2|-|a|<0$.

נמשיך בפישוט אי-השוויון: $|5-2|-|a|<0 \Rightarrow |3|-|a|<0$. נעביר את $-|a|$ אגף: $|3|<|a| \Rightarrow 3<|a|$.

כפי שלמדנו בשיעור, כאשר נתון לנו ביטוי בערך מוחלט אשר גדול מערך מסוים, ישנם 2 פישוטים:

.1 $3<a$.

.2 $a<-3$.

לאור האמור לעיל: $3<a$ **או** $a<-3$. נעבור לבדיקת התשובות:

תשובה (1): תשובה זו אינה כוללת את שני התחומים, ולכן היא אינה נכונה בהכרח. התשובה נפסלת.

תשובה (2): תשובה זו כוללת את אחד מהתחומים שמצאנו, אך לא את התחום השני, ולכן אינה נכונה בהכרח. התשובה נפסלת.

תשובה (3): כזכור משיעור אי-שוויונות, כאשר ערך בחזקה ריבועית גדול מערך אחר ($9<a^2$), ישנם 2 פישוטים:

.1 $3<a$.

.2 $a<-3$.

מכאן ש- $3<a$ **או** $a<-3$. שני הפישוטים הללו מתאימים. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): תשובה זו אינה כוללת את שני התחומים, ולכן היא אינה נכונה בהכרח. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

הגדרות נפוצות בערך מוחלט

בחלק הזה של השיעור נעסוק במקרים נפוצים בערך מוחלט, ובנתונים שניתן להסיק מהמקרים הללו:

.1 $|x| = x$

כזכור מהמבוא, ביטוי בערך מוחלט לעולם אינו שלילי. לפיכך, האגף השמאלי אינו שלילי.
משום שהאגף הימני שווה לאגף השמאלי, ניתן להסיק את אותה הסקה לגביו.
אם כן, כאשר נתון לנו ביטוי בערך מוחלט אשר שווה לאותו ביטוי ללא ערך מוחלט, ניתן להסיק כי הביטוי גדול מ-0 או שווה לו, כלומר חיובי או שווה ל-0: $0 \le x$.

.2 $|x| \neq x$

ניתן להתייחס למקרה הזה כמקרה ההפוך של הקודם, והוא מתקיים עבור x שלילי בלבד: $x < 0$.

.3 $|a+b| = |b+a|$

המקרה הזה מתקיים עבור כל ערך של a ושל b, שכן בשני האגפים המקדם שלהם חיובי.
כלומר, בשני האגפים הביטוי בתוך הערך המוחלט זהה.

.4 $|a-b| = |b-a|$

המקרה הזה אף הוא מתקיים עבור כל ערך של a ושל b, משום שהן a והן b שונים מבחינת המקדם שלהם בשני האגפים:
באגף השמאלי ל-a מקדם חיובי ול-b מקדם שלילי, ואילו באגף הימני ל-a מקדם שלילי ול-b מקדם חיובי.
<u>לדוגמה:</u>
נציב במשוואה $a = 10$ ו- $b = -5$ ונקבל:
$|a-b| = |b-a| \Rightarrow |10-(-5)| = |-5-10| \Rightarrow |10+5| = |-15| \Rightarrow |15| = |-15|$.

.5 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

שני האגפים הם מכפלה של a ב-b. כמו כן, שני האגפים אינם שליליים בוודאות (האגף השמאלי נמצא כולו בערך מוחלט והאגף הימני מורכב ממכפלה של שני ערכים בערך מוחלט).
לפיכך, משוואה זו מתקיימת תמיד, כלומר עבור כל ערך של a ושל b.

.6 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

שני האגפים הם מנה של a ושל b. כמו כן, שני האגפים אינם שליליים בוודאות (האגף השמאלי נמצא כולו בערך מוחלט והאגף הימני מורכב מחלוקה של שני ערכים בערך מוחלט).
לפיכך, משוואה זו מתקיימת תמיד, כלומר עבור כל ערך של a ושל b (פרט ל- $b = 0$).

.7 $|x| = |y|$, $0 < y$

למקרה הזה ישנן 2 אפשרויות:

.1 x חיובי אף הוא ולכן: $x = y$.

.2 x שלילי (למשל, $x = -5$ ו- $y = 5$) ולכן: $y = -x$ וכן $x < y$.

8. $|a+b|=|a|+|b|$

המקרה המופיע לעיל נכון בהכרח עבור כל a ו-b חיוביים, והוא נכון בהכרח גם עבור כל a ו-b שליליים.
כך גם אם אחד מהם שווה 0 והשני לא (חיובי או שלילי).
המקרה היחיד בו המשוואה המופיעה לעיל אינה נכונה בהכרח הוא כאשר הנעלמים שוני סימן (אחד מהם חיובי והשני שלילי).

בלא מעט שאלות בנושא ערך מוחלט באי-שוויונות בבחינה אנו נדרשים להסיק מסקנות לגבי ערכם של הנעלמים (חיובי או שלילי). לפיכך, הבנתם של המקרים המופיעים לעיל וזכירתם בעל-פה יסייעו לנו רבות בבחינה.

שאלה לדוגמה - מקרים נפוצים

נתון: $1<|b|$

$a\cdot b<|a|<b$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) a חיובי ו-b שלילי

(2) a חיובי ו-b חיובי

(3) a שלילי ו-b שלילי

(4) a שלילי ו-b חיובי

פתרון

מאי-השוויון הראשון (ביטוי בערך מוחלט אשר גדול מערך מסוים) ניתן להסיק: $1<b$ או $b<-1$.
באי-השוויון השני נתון כי b גדול מביטוי אחר אשר נמצא בערך מוחלט.
כזכור, ביטוי בערך מוחלט לעולם אינו שלילי, כלומר ביטוי בערך מוחלט הוא, לכל הפחות, 0.
לפיכך, ניתן לקבוע כי $0<b$ (b אינו יכול להיות 0, שכן אז התנאי הראשון לא היה מתקיים).
אם כן, בשלב הזה (מצירוף שני אי-השוויונות $0<b$ ו- $1<b$) ניתן להסיק כי $1<b$, ולכן ניתן לפסול את התשובות (1) ו-(3).
כעת, נבחן את תשובה (2):
כאמור, b גדול מ-1.
לו a היה מספר חיובי - בין אם שבר ובין אם מספר אשר גדול מ-1 - המכפלה $a\cdot b$ הייתה גדולה מ-a (כפל של כל מספר חיובי במספר אשר גדול ב-1 מגדיל אותו).
לאור האמור לעיל, a לא יכול להיות חיובי, ולכן ניתן לפסול את תשובה (2).
התשובה הנכונה היא (4).

שאלה נוספת - מקרים נפוצים

נתון: $-1<a<0$

$x=a^3$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $|a-x|=0$

(2) $|a|<\frac{1}{x}$

(3) $a+|x|<0$

(4) $1<\frac{|x|}{|a|}$

<u>פתרון</u>

נציב מספר נוח במקום a אשר מקיים את הנתון: $a=-\frac{1}{2}$.

אם כן: $x=a^3\Rightarrow x=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\Rightarrow x=-\frac{1}{8}$.

כעת, נציב $a=-\frac{1}{2}$ ו- $x=-\frac{1}{8}$ בתשובות, ונפסול את אלו אשר לא מתקיימות (מספיק להראות כי ישנו מקרה אחד בלבד אשר לא מקיים טענה מסיימת כדי לקבוע שהיא אינה נכונה בהכרח):

תשובה (1): $|a-x|=0\Rightarrow\left|\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right|\neq0\Rightarrow\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right|\neq0$. התשובה נפסלת.

תשובה (2): $|a|<\frac{1}{x}\Rightarrow\left|-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{-\frac{1}{8}}\Rightarrow\frac{1}{2}<-8$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $a+|x|<0\Rightarrow-\frac{1}{2}+\left|-\frac{1}{8}\right|<0\Rightarrow-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<0\Rightarrow-\frac{4}{8}+\frac{1}{8}<0\Rightarrow-\frac{3}{8}<0$.

תשובה (4): $1<\frac{|x|}{|a|}\Rightarrow1<\frac{\left|-\frac{1}{8}\right|}{\left|-\frac{1}{2}\right|}$. בביטוי שהתקבל המונה קטן מהמכנה, ולכן לא ייתכן שהביטוי כולו גדול מ-1 (למעשה, הוא קטן מ-1). התשובה נפסלת.

הצלחנו להראות ש-3 תשובות אינן נכונות בהכרח, ולכן הנותרת היא הנכונה.

לטובת שלמות ההסבר, נוכיח את נכונותה של תשובה (3):

נציב את המשוואה השנייה ($x=a^3$) בתשובה (3): $a+|x|<0\Rightarrow a+|a^3|<0$. נעביר אגפים ונקבל: $a<-|a^3|$.

כאשר מעלים שבר שלילי (a) בחזקה אי-זוגית ערכו גדל, שכן הוא מתקרב ל-0.

לפיכך, אי-השוויון $a<-|a^3|$ נכון בהכרח.

התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. מבוא לערך מוחלט:

- ערך מוחלט מייצג את המרחק של ערך מסוים מ-0, ומכיוון שמרחק לא יכול להיות שלילי, ערכו של ביטוי בערך מוחלט הוא, לכל הפחות, 0.
- כאשר ביטוי אשר נמצא בתוך ערך מוחלט **חיובי** ($0 < x$), ניתן לקבוע: $|x| = x$.
- כאשר ביטוי אשר נמצא בתוך ערך מוחלט **שלילי** ($x < 0$), ניתן לקבוע: $|x| = -x$.

2. ערך מוחלט במשוואות:

- כאשר נתון לנו ביטוי בערך מוחלט אשר שווה לערך מסוים, עלינו לבדוק 2 מקרים:
  1. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **חיובי**.
  2. הביטוי בערך המוחלט שווה לערך באגף השני עם מקדם **שלילי**.
- דרך הפתרון המופיעה לעיל אינה משתנה גם כאשר שני האגפים נמצאים בערך מוחלט.

שימו לב! כאשר נעלם מסוים מופיע הן בערך מוחלט והן ללא ערך מוחלט, אנו מוכרחים להציב את ערך הנעלם שמצאנו במשוואה המקורית ולבדוק אם הוא אכן מקיים אותה.

3. ערך מוחלט באי-שוויונות:

- כאשר נתון $|x| < a$, ניתן לקבוע כי $x < a$ **וגם** $-a < x$, ולפיכך: $-a < x < a$.
- כאשר נתון $a < |x|$, ניתן לקבוע כי: $a < x$ **או** $x < -a$.

4. הגדרות נפוצות:

אנו ממליצים להבין היטב את כל שמונה ההגדרות שהצגנו בחלק האחרון של השיעור כמו גם לזכור אותן בעל-פה.

סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!