אלגברה

אי-שוויונות

אי-שוויונות

מבוא לאי-שוויונות

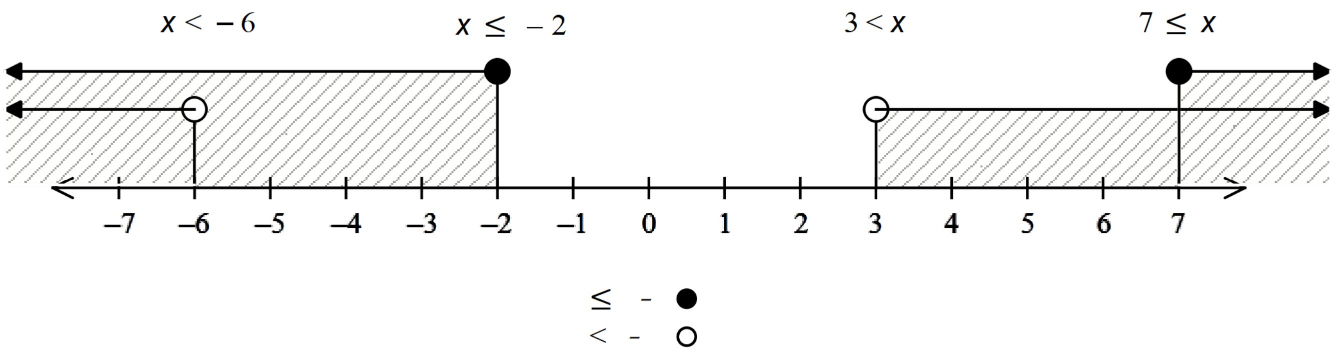
אי-שוויון זהה למשוואה בכך שהוא מורכב, לרוב, משני אגפים, אך שונה ממנה בכך שהאגפים בו אינם בהכרח שווים זה לזה.
הסימן ה"רגיל" של אי-השוויון הוא ($<$), ופירושו שהביטוי אשר נמצא מימין לסימן **גדול** מהביטוי אשר נמצא משמאל לסימן.
סימן נוסף אשר עשוי להימצא בין האגפים הוא ($\le$), ופירושו שהביטוי אשר נמצא מימין לסימן **גדול** מהביטוי אשר נמצא משמאלו או **שווה** לו.

__הערה:__
בבחינה, סימן אי-השוויון יופיע כאשר החלק הפתוח פונה לימין ($<$), אולם בחלק מהמקומות בשיעור הוא יופיע הפוך ($>$) במטרה להקל על ההסברים.

__לדוגמה:__
$5 < x$
פירוש אי-השוויון אשר מופיע לעיל הוא שהנעלם x **גדול** מ-5. כלומר, כל ערך של x אשר **גדול** מ-5 (5.1, 6, 7, 200...) מקיים את אי-השוויון. אילו היה נתון ש-x הוא מספר שלם, אזי המספר הקטן ביותר אשר היה מקיים את אי-השוויון הוא 6.
כמובן שכל מספר שלם אשר גדול מ-6 היה מקיים את אי-השוויון גם כן.

__דוגמה נוספת:__
$x < 5$
פירוש אי-השוויון אשר מופיע לעיל הוא שהנעלם x **קטן** מ-5. כלומר, כל ערך של x אשר **קטן** מ-5 (4.99, 3, 7-, 100-...) מקיים את אי-השוויון. אילו היה נתון ש-x הוא מספר שלם, אזי המספר הגדול ביותר אשר היה מקיים את אי-השוויון הוא 4.
כמו כן כל מספר אשר קטן מ-4 היה מקיים את אי-השוויון גם כן.

__**אי-שוויונות על ציר המספרים:**__
נציג מספר אי-שוויונות, אשר יעזרו להמחיש את העיקרון, על גבי ציר מספרים.
$7 \le x$: x יכול להיות כל מספר אשר **גדול** מ-7 או **שווה** לו.
$3 < x$: x יכול להיות כל מספר אשר **גדול** מ-3.
$x \le -2$: x יכול להיות כל מספר אשר **קטן** מ-(2-) או **שווה** לו.
$x < -6$: x יכול להיות כל מספר אשר **קטן** מ-(6-).



<u>ביצוע פעולות חשבון בסיסות על אי-שוויונות:</u>

בדומה למשוואות מטרת העל שלנו, לרוב, היא לבודד את הנעלם, ושאיפתנו היא לעשות כן באגף שבו המקדם שלו יהיה חיובי.

פעולות חשבוניות שניתן לעשות מ**בלי להפוך את כיוון הסימן**:

1. ניתן **להוסיף** ערכים לאי-שוויון **ולחסר** ערכים ממנו.

<u>לדוגמה:</u>

$$x-3<0$$

נוסיף 3 לשני אגפי אי-השוויון ונקבל: $x<3$.

2. ניתן **לחלק** או **לכפול** את שני אגפיו של אי-שוויון בערך **חיובי**.

<u>לדוגמה:</u>

$$\frac{x}{4}<1$$

נכפול את שני אגפי אי-השוויון ב-4 ונקבל: $x<4$.

3. בדומה למשוואות, ניתן **לחבר** בין אגפים של אי-שוויונות שונים, אולם בשונה ממשוואות, **אסור לחסר** ביניהם.
חשוב להדגיש כי כשאנו מחברים אי-שוויונות שונים עלינו לשים לב כי סימן אי-השוויון נמצא באותו הכיוון.

<u>לדוגמה:</u>

$$+\begin{cases}3<x\\ \underline{4<y}\end{cases}$$
$$7<x+y$$

ישנן פעולות חשבוניות שניתן לעשות, אך לאחר ביצוען יש **להפוך את כיוון הסימן**:

כאשר אנו **מחלקים** או **כופלים** אי-שוויון בערך **שלילי**, עלינו **להפוך** את כיוון הסימן.

<u>לדוגמה:</u>

$$-2x<1$$

נחלק את אי-השוויון ב-(2-) תוך שאנו זוכרים להפוך את כיוון הסימן: $x>\frac{1}{-2}\Rightarrow x>-\frac{1}{2}$.

שימו לב! ניתן היה להעביר אגפים ($-1<2x$) ולאחר מכן לחלק ב-2 (ערך חיובי) מבלי להפוך את כיוון הסימן: $\frac{-1}{2}<x\Rightarrow -\frac{1}{2}<x$.

כפי שניתן להבחין, התוצאה המתקבלת בשני המקרים זהה: $-\frac{1}{2}<x$.

כמו כן ייתכנו שאלות שבהן לא נדע את ערך הנעלם, אך יהיה נתון אם הוא חיובי או שלילי.
אם נתון שהנעלם **חיובי**, ניתן **לחלק** או **לכפול** את אגפי אי-השוויון בו מ**בלי להפוך את כיוון הסימן**.
אם נתון שהנעלם **שלילי**, ניתן **לחלק** או **לכפול** את אגפי אי-השוויון בו, אך לאחר שנעשה כן עלינו **להפוך את כיוון הסימן**.

<u>ערכו של נעלם אינו ידוע:</u>

כאשר נתון לנו אי-שוויון עם נעלם אשר ערכו אינו ידוע לנו אך שונה מ-0, אנו ממליצים להימנע מלכפול או לחלק בו.
זאת, משום שכאשר אנו מחלקים או כופלים בנעלם בעל ערך חיובי, אין צורך להפוך את כיוון הסימן.
לעומת זאת, כאשר אנו מחלקים או כופלים בנעלם בעל ערך שלילי, יש להפוך את כיוון הסימן.
כלומר, יש לשים לב כי עשויים להתקבל 2 פתרונות **שונים** (ראו שאלה לדוגמה בהמשך).

<u>עיקרון ה"מעבר":</u>

כאשר נתון לנו כי ערך א' גדול מערך ב' וכן שערך ב' גדול מערך ג', ניתן להסיק כי ערך א' גדול מערך ג':

<u>לדוגמה:</u>

אם $b<a$ ו- $c<b$, אזי ניתן להסיק כי $c<a$. ניתן להציג זאת כך: $c<b<a$.

שאלה לדוגמה - מבוא לאי-שוויונות

נתון: $\frac{6-a}{a}<2$, $0<a$

מה התחום המדויק שבו a יכול להימצא?

(1) $6<a$

(2) $0<a<2$

(3) $2<a$

(4) $0<a<1$

<u>פתרון</u>

נתון כי a חיובי ולכן ניתן לכפול את שני אגפי אי-השוויון ב-a מבלי להפוך את הסימן: $6-a<2a$.

כדי לבודד את a נעביר אותו אגף: $6<3a$. נחלק את שני אגפי אי-השוויון ב-3 ונקבל: $2<a$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - מבוא לאי-שוויונות

נתון: $-a<\frac{b}{c}$, $a,b,c\neq 0$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $-ac<b$

(2) $1<-\frac{b}{ac}$

(3) $0<a+\frac{b}{c}$

(4) $-\frac{a}{b}<\frac{1}{c}$

<u>פתרון</u>

שימו לב כי לא נתון לנו דבר לגבי ערכם של כל אחד מנעלמים, פרט לכך שאינם שווים 0. לכן איננו יכולים לכפול או לחלק בהם את שני אגפי אי-השוויון. זאת, כיוון שלאחר כפל או חילוק בהם לא נדע אם יש להפוך את הסימן או לאו.

לפיכך, נעביר את $(-a)$ אגף: $0<a+\frac{b}{c}$. מצאנו את התשובה הנכונה, אך לשם שלמות ההסבר נבדוק מה נַעֲשָׂה בכל אחת מהתשובות, ונראה מדוע לא ניתן היה לעשות כן:

תשובה (1): בתשובה זו, כפלו את שני אגפי אי-השוויון ב-c, דבר אשר ניתן היה לעשות רק אם היה נתון שערכו חיובי. הרי אם ערכו היה שלילי, היה עלינו להפוך את הסימן. לפיכך, תשובה זו אפשרית, אך אינה נכונה בהכרח.

הסבר זהה תקף לתשובות (2) ו-(4):

תשובה (2): בתשובה זו, חילקו את שני אגפי אי-השוויון ב-$(-a)$. ערכו של a אינו ידוע לנו, וכתוצאה מכך גם ערכו של $(-a)$.

לפיכך, תשובה זו אפשרית, אך אינה נכונה בהכרח.

תשובה (4): בתשובה זו, חילקו את שני אגפי אי-השוויון ב-b, נעלם שערכו אינו ידוע לנו.

לפיכך, תשובה זו אפשרית, אך אינה נכונה בהכרח.

התשובה הנכונה היא (3).

חפיפת תחומי הגדרה

הנושא הבא בו נעסוק הוא חפיפה בין תחומים באי-שוויונות.
כשעוסקים בחפיפה בין תחומים, לרוב נוטים להתייחס ל-2 מונחים:

.1 "**וגם**" - כאשר בין טענות מתקיים "וגם", עליהן להתקיים יחדיו כדי לקיים אי-שוויון מסוים.

.2 "**או**" - כאשר בין טענות מתקיים "או", כל אחת מהן בנפרד מקיימת אי-שוויון מסוים.

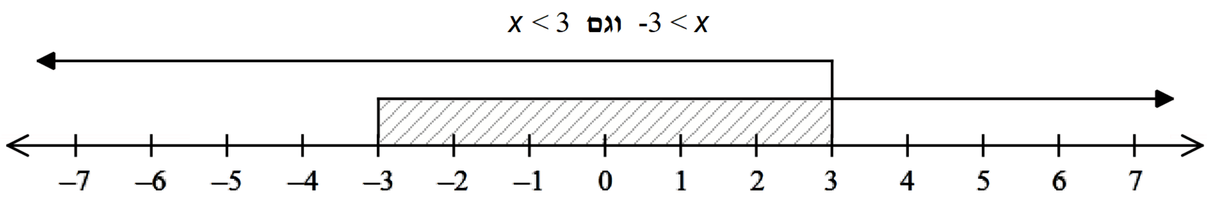
<u>לדוגמה - חפיפה בין תחומים ("וגם"):</u>

נתון: $x<3$ **וגם** $-3<x$.

הנתון במילים: הנעלם x קטן מ-3 **וגם** גדול מ-(-3).

אגב, ניתן לאחד את אי-השוויון אשר מופיע לעיל ולכתוב אותו כך: $-3<x<3$.

כך נראה הנתון על גבי ציר מספרים:

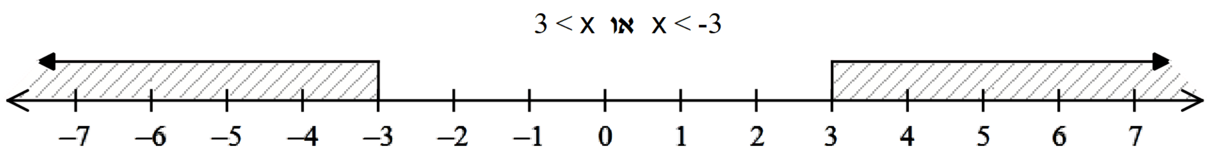


<u>לדוגמה - העדר חפיפה בין תחומים ("או"):</u>

נתון: $x>3$ **או** $x<-3$.

הנתון במילים: הנעלם x יכול להיות גדול מ-3 **או** קטן מ-(-3).

כך נראה הנתון על גבי ציר מספרים:



<u>**חפיפה או העדר חפיפה באי-שוויונות ממעלה זוגית:**</u>

כאשר אנו מוציאים שורש מאי-שוויון אשר כולל חזקה **זוגית**, עלינו לזכור כי הוצאת השורש תניב 2 תחומים:

.1 ערך **חיובי**.

.2 ערך **שלילי**. זאת, משום שכאשר אנו מעלים מספר שלילי בחזקה זוגית, אנו מקבלים תוצאה חיובית.

<u>לדוגמה - נעלם בחזקה זוגית אשר **גדול** מערך מסוים:</u>

נתון: $16<x^2$

$x=5$ יכול לקיים את אי-השוויון, שכן: $16<5^2 \Rightarrow 16<25$.

כמו כן $x=-5$ יכול לקיים את אי-השוויון, שכן: $16<(-5)^2 \Rightarrow 16<25$.

לאור האמור לעיל, כאשר נתון לנו נעלם בחזקה זוגית אשר גדול מערך מסוים ($16<x^2$), עלינו לזכור כי ישנם 2 פישוטים:

.1 ערך **חיובי** - נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך החיובי בלבד **ולא נשנה** את כיוון הסימן: $\sqrt{16}<\sqrt{x^2} \Rightarrow 4<x$.

.2 ערך **שלילי** - נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך השלילי בלבד **ונשנה** את כיוון הסימן: $\sqrt{16}<\sqrt{x^2} \Rightarrow -4>x$.

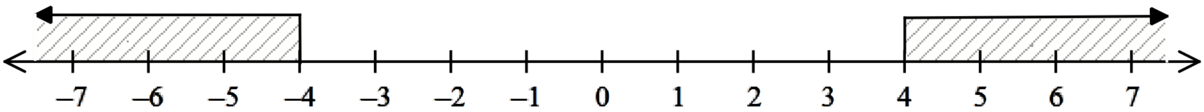
על גבי ציר המספרים, הנתון ייראה כך:

$$16 < x^2$$

$x < -4$ $4 < x$

כלומר:

$4 < x$ **או** $x < -4$



<u>לדוגמה - נעלם בחזקה זוגית אשר **קטן** מערך מסוים:</u>

נתון: $x^2 < 16$

$x = 3$ יכול לקיים את אי-השוויון, שכן: $3^2 < 16 \Rightarrow 9 < 16$.

כמו כן $x = -3$ יכול לקיים את אי-השוויון, שכן: $(-3)^2 < 16 \Rightarrow 9 < 16$.

לאור האמור לעיל, כאשר נתון לנו נעלם בחזקה זוגית אשר קטן מערך מסוים ($x^2 < 16$), עלינו לזכור כי ישנם 2 פישוטים:

1. ערך שעשוי להיות **חיובי** - נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך החיובי בלבד **ולא נשנה** את כיוון הסימן: $x < 4$.

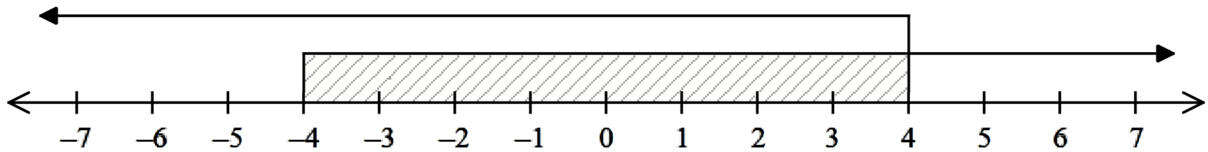
2. ערך שעשוי להיות **שלילי** - נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך השלילי בלבד **ונשנה** את כיוון הסימן: $x > -4$.
שימו לב כי את התחומים אשר מופיעים לעיל ניתן לאחד ולהציג כך: $-4 < x < 4$.
על גבי ציר המספרים, התחום ייראה כך:

$$x^2 < 16$$

$-4 < x$ $x < 4$

כלומר:

$-4 < x$ **וגם** $x < 4$



שימו לב כי העקרונות אשר מופיעים לעיל עשויים להופיע הן כשאלה בפני עצמה, הן כתשובה נכונה והן כמסיח.
כמו כן אין הכרח לצייר את ציר המספרים בכל פעם שניתקל בעקרונות הללו, אך אם הדבר עשוי להקל על הפתרון, אין מניעה לעשות כן.

שאלה לדוגמה - חפיפת תחומי הגדרה

נתון: $x^2 < 4$

איזה מן המספרים הבאים x **אינו יכול** להיות?

(1) $-\frac{9}{4}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{4}{3}$

(4) $-\frac{4}{5}$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

נזכיר כי בתבנית הזו - נעלם בחזקה זוגית אשר קטן מערך מסוים - ישנם 2 פישוטים:

1. נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך ה**חיובי** בלבד **ולא נשנה** את כיוון הסימן: $x < 2$.

2. נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך ה**שלילי** בלבד **ונשנה** את כיוון הסימן: $x > -2$.

שימו לב כי את התחומים אשר מופיעים לעיל ניתן לאחד ולהציג כך: $-2 < x < 2$.

הערך היחיד אשר לא נמצא בתחום הוא זה בתשובה (1).

<u>דרך ב' - בדיקת תשובות:</u>

נעלה כל אחת מהתשובות בריבוע, ונבדוק איזו תשובה לא מקיימת את הנתון:

תשובה (1): $\left(-\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} > 4$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 4$. התשובה נפסלת.

תשובה (3): $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9} < 4$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} < 4$. התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (1).

אי-שוויון כפול

הנושא הבא בו נעסוק הוא אי-שוויון "כפול" - אי-שוויון שבו נמצאים שני סימנים (>) ואשר מקיים שני תחומים במקביל.

<u>לדוגמה:</u>
$5 < x - 9 < 8$
אי-השוויון במילים - הביטוי $(x-9)$ קטן מ-8 **וגם** גדול מ-5.
כאשר אנו נתקלים באי-שוויון כפול יש לפשט אותו כך:

1. $x - 9 < 8$. נוסיף 9 לשני אגפי אי-השוויון: $x < 17$.

2. $5 < x - 9$. נוסיף 9 לשני אגפי אי-השוויון: $14 < x$.

אם כן, x קטן מ-17 **וגם** וגדול מ-14. כלומר: $14 < x < 17$.

אם, לדוגמה, היה נתון ש-x מספר שלם, ניתן היה להסיק כי ישנם 2 ערכים בלבד אשר מקיימים את אי-השוויון: 15 ו-16.

<u>דוגמה נוספת:</u>
$2 < x + 4 < 7$
אי-השוויון במילים - הביטוי $(x+4)$ קטן מ-7 **וגם** גדול מ-2.
לאור האמור לעיל, יש לפשט את אי-השוויון כך:

1. $x + 4 < 7$. נחסר 4 משני אגפי אי-השוויון: $x < 3$.

2. $2 < x + 4$. נחסר 4 משני אגפי אי-השוויון: $-2 < x$.

אם כן, x קטן מ-3 **וגם** וגדול מ-(-2). כלומר: $-2 < x < 3$.

אם, לדוגמה, היה נתון ש-x מספר שלם, ניתן היה להסיק כי ישנם 4 ערכים בלבד אשר מקיימים את אי-השוויון: 1-, 0, 1 ו-2.

שאלה נוספת - אי-שוויון כפול

נתון: $x-y<x+y<-x+y$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $x<0$ ו- $y<0$

(2) $0<x$ ו- $0<y$

(3) $x<0$ ו- $0<y$

(4) $0<x$ ו- $y<0$

<u>פתרון</u>

נפשט את אי-השוויון הנתון לפי הכללים שלמדנו בשיעור:

1. $x+y<-x+y$. נעביר את x ו-y לאגפים שונים: $2x<0$. נחלק את שני אגפי אי-השוויון ב-2 ונקבל: $x<0$.

2. $x-y<x+y$. נעביר את x ו-y לאגפים שונים: $0<2y$. נחלק את שני אגפי אי-השוויון ב-2 ונקבל: $0<y$.

אם כן, לאחר פישוט אי-השוויון קיבלנו ש- $x<0$ ו- $0<y$.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - אי-שוויון כפול

נתון: $0<x$

$$\frac{1}{2}<\frac{x}{x+2}<\frac{3}{4}$$

איזה מן אי-השוויונות הבאים מתקיים **בהכרח**?

(1) $0<x<2$

(2) $2<x<6$

(3) $0<x<4$

(4) $6<x<12$

<u>פתרון</u>

נפשט את אי-השוויון הנתון לפי הכללים שלמדנו בשיעור:

1. $\frac{x}{x+2}<\frac{3}{4}$. נבצע כפל בהצלבה (שני המכנים חיוביים, ועל כן ניתן לעשות זאת מבלי להפוך את הסימן): $4x<3(x+2)$.
נבצע את הכפל באגף הימני: $4x<3x+6$. נעביר את 3x אגף: $x<6$.

2. $\frac{1}{2}<\frac{x}{x+2}$. נבצע כפל בהצלבה (שני המכנים חיוביים, ועל כן ניתן לעשות זאת מבלי להפוך את הסימן): $x+2<2x$.
נעביר את x אגף: $2<x$.

אם כן, לאחר פישוט אי-השוויון קיבלנו ש- $x<6$ וגם $2<x$. כלומר: $2<x<6$.

התשובה הנכונה היא (2).

סוגי טענות וניסוחים

בבחינה בכלל ובאי-שוויונות בפרט עשויים להופיע מספר ניסוחים שונים לשאלה, ובחלק הזה של השיעור נתמקד בהם:

1. נכון/ה בהכרח - טענה אשר נכונה **תמיד**.
   לדוגמה:
   נתון: $4 < x < 6$.
   x מספר שלם.
   בצירוף שני הנתונים הללו ניתן לקבוע כי x הוא מספר שלם, גדול מ-4 וקטן מ-6.
   לפיכך, ניתן לקבוע כי $x = 5$ **בהכרח**.

2. אינו/ה נכון/ה בהכרח - טענה אשר לא נכונה תמיד. היא אומנם אפשרית, אך לא נכונה תמיד.
   לדוגמה:
   נתון: $3 < x < 6$.
   x מספר שלם.
   בצירוף שני הנתונים הללו ניתן לקבוע כי x הוא מספר שלם, גדול מ-3 וקטן מ-6.
   לפיכך, ניתן לקבוע כי $x = 4$ או $x = 5$.
   אם כן, אם אחת מהתשובות הייתה $x = 4$ היא לא הייתה נכונה בהכרח, משום ש-x יכול להיות 4, אך הוא יכול להיות גם 5.
   כמובן שהאמור לעיל תקף גם הפוך - אם אחת מהתשובות הייתה $x = 5$ היא לא הייתה נכונה בהכרח, משום ש-x יכול להיות 5, אך הוא יכול להיות גם 4.

3. בהכרח אינו/ה נכון/ה - טענה לא נכונה אשר לא מקיימת את הנתונים.
   לדוגמה:
   נתון: $3 < x < 6$.
   x מספר שלם.
   בצירוף שני הנתונים הללו ניתן לקבוע כי x הוא מספר שלם, גדול מ-3 וקטן מ-6.
   לפיכך, ניתן לקבוע כי $x = 4$ או $x = 5$.
   אם כן, $x = 7$ היא תשובה אשר בהכרח אינה נכונה, שכן היא אינה מקיימת את סט הנתונים (מספר שלם, גדול מ-3 וקטן מ-6).

שאלה לדוגמה - סוגי טענות וניסוחים

נתון: $x \cdot y < 8$
$2 < x$

מה נובע **בהכרח** בנוגע לערכו של y?

(1) $0 < y < 4$

(2) $-2 < y < 2$

(3) $y < 4$

(4) $y < 2$

פתרון

לפי הנתון השני, x גדול מ-2.
אילו x היה בדיוק 2, אזי כדי לקיים את אי-השוויון הנתון y צריך היה להיות קטן מ-4.
היות ש-x גדול מ-2, y **בהכרח** קטן מ-4.
ניתן להציב מספרים כדי להראות שהתשובות (2) ו-(4) אינן נכונות בהכרח.
נציב $x = 2.5$ ו-$y = 3$.
לפי הצבה זו: $x \cdot y < 8 \Rightarrow 2.5 \cdot 3 < 8 \Rightarrow 7.5 < 8$.
הצבה זו מקיימת את שני הנתונים ובעקבותיה ניתן להסיק כי התשובות (2) ו-(4) לא נכונות **תמיד**.
כעת, נעמוד על ההבדלים בין תשובה (1) לבין תשובה (3).
לפי הנתון השני, x חיובי בהכרח. עוד נתון כי המכפלה $x \cdot y$ קטנה מ-8.
לפיכך, y יכול להיות כל ערך שלילי ואף שווה ל-0 והנתון הראשון יתקיים.
כלומר, הדבר היחיד שנובע בהכרח לגבי ערכו של y הוא: $y < 4$. לפיכך, ניתן לפסול את תשובה (1).

התשובה הנכונה היא (3).

ציר המספרים, בנק הצבות

בחלק הזה של השיעור נעסוק בהתנהגות של מספרים מתחומים שונים (מספרים חיוביים גדולים מ-1, שברים חיוביים, שברים שליליים ומספרים שליליים קטנים מ-(1-)) על גבי ציר המספרים, כאשר אנו מוציאים להם שורש או מעלים אותם בחזקה.

<u>מספרים "מיוחדים" - 1, 0 ו-(1-):</u>

1 בחזקת כל מספר שווה ל-1 ($1^1 = 1^{17} = 1^{23} = 1$), וכך גם לגבי שורש - שורש מכל סדר שהוא של 1 שווה ל-1 ($\sqrt{1} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[5]{1} = 1$).

0 בחזקת כל מספר (פרט ל-0 משום ש- 0^0 הוא ביטוי שאינו מוגדר) שווה ל-0 ($0^1 = 0^{17} = 0^{23} = 0$), וכך לגבי שורש - שורש מכל סדר שהוא של 0 שווה ל-0 ($\sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = \sqrt[5]{0} = 0$).

(1-) בחזקת **זוגית** שווה ל-1 ($\left(-1\right)^2 = \left(-1\right)^6 = \left(-1\right)^{16} = 1$), ואילו (1-) בחזקת **אי-זוגית** שווה ל-(1-) ($\left(-1\right)^1 = \left(-1\right)^3 = -1$).

בבחינה, אם נתבקש להוציא שורש ל-(1-), יהיה זה שורש אי זוגי בלבד והתשובה תהיה (1-) ($\sqrt[3]{-1} = \sqrt[5]{-1} = -1$).

<u>מספרים חיוביים גדולים מ-1:</u>

מספרים חיוביים אשר גדולים מ-1 איתם נוח לעבוד הם: 2, 4 ו-8.

כאשר נרצה להיזכר כיצד מספרים מהתחום הזה מתנהגים כאשר מוציאים להם שורש או מעלים אותם בחזקה, נוכל להשתמש בהם.

✓ **כלל:** העלאת מספר חיובי אשר גדול מ-1 בחזקה חיובית מגדילה את ערכו.

<u>לדוגמה:</u>

$2^2 = 4$

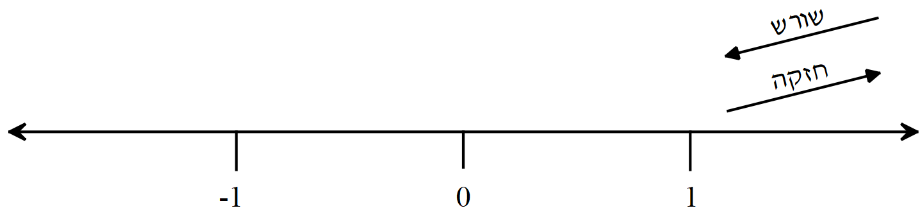
✓ **כלל:** הוצאת שורש למספר חיובי אשר גדול מ-1 מקטינה את ערכו.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{8} = 2$.

חשוב לציין כי התנהגותם של מספרים שאינם שלמים מאותו התחום זהה, כלומר התנהגותם של 2 ו-1.3 **זהה** הן בהוצאת שורש והן בהעלאה בחזקה.

על גבי ציר מספרים ניתן להציג את האמור לעיל כך:



<u>שברים חיוביים אשר קטנים מ-1 וגדולים מ-0:</u>

שברים חיוביים איתם נוח לעבוד הם: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{8}$. כאשר נרצה להיזכר כיצד ערכים מהתחום הזה מתנהגים כאשר מוציאים להם שורש או מעלים אותם בחזקה, נוכל להשתמש בהם.

✓ **כלל:** העלאת שבר חיובי בחזקה חיובית מקטינה את ערכו, שכן פעולה זו מקרבת אותו ל-0.

<u>לדוגמה:</u>

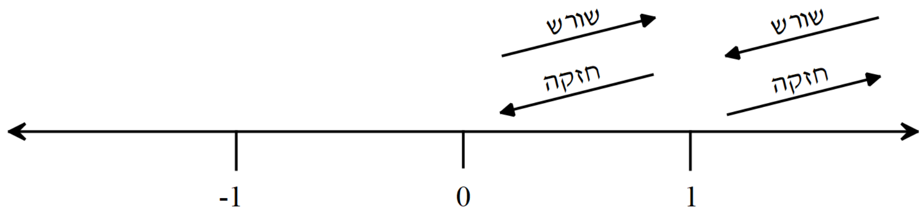
$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

✓ **כלל:** הוצאת שורש לשבר חיובי מגדילה את ערכו, שכן פעולה זו מרחיקה אותו מ-0.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$.

על גבי ציר מספרים ניתן להציג את האמור לעיל כך:



<u>מספרים שליליים אשר קטנים מ-(-1):</u>

מספרים שליליים אשר קטנים מ-(-1) איתם נוח לעבוד הם: (-2), (-4) ו-(-8). כאשר נרצה להיזכר כיצד ערכים מהתחום הזה מתנהגים כאשר מוציאים להם שורש או מעלים אותם בחזקה, נוכל להשתמש בהם.

✓ **כלל:** כאשר אנו מעלים מספר שלילי אשר קטן מ-(-1) בחזקה זוגית, ערכו גדול שכן הוא הופך חיובי.

<u>לדוגמה:</u>

$(-2)^2=4$.

✓ **כלל:** כאשר אנו מעלים מספר שלילי אשר קטן מ-(-1) בחזקה אי זוגית, ערכו קטן שכן פעולה זו מרחיקה אותו מ-0.

<u>לדוגמה:</u>

$(-2)^3=-8$, $(-4)^3=-64$

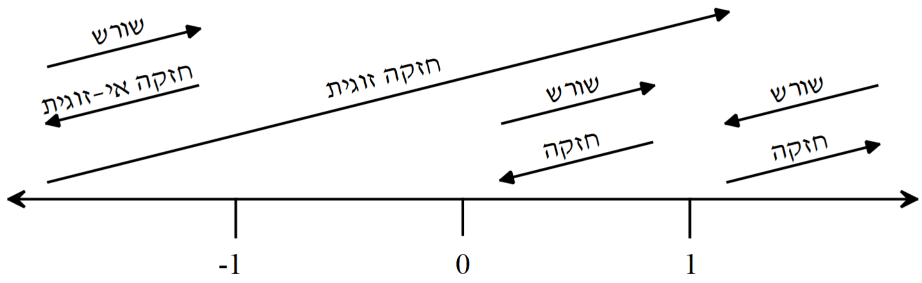
בבחינה, אם נתבקש להוציא שורש למספר שלילי, יהיה זה שורש מסדר אי-זוגי.

✓ **כלל:** הוצאת שורש מסדר אי-זוגי ממספר שלילי אשר קטן מ-(1-) מגדילה אותו, שכן פעולה זו מקרבת אותו ל-0.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt[3]{-8}=-2$.

על גבי ציר מספרים ניתן להציג את האמור לעיל כך:



<u>שברים שליליים אשר קטנים מ-0 וגדולים מ-(1-):</u>

שברים שליליים איתם נוח לעבוד הם: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ ו- $-\frac{1}{8}$. כאשר נרצה להיזכר כיצד ערכים מהתחום הזה מתנהגים כאשר מוציאים להם שורש או מעלים אותם בחזקה, נוכל להשתמש בהם.

✓ **כלל:** העלאת שבר שלילי בחזקה חיובית וזוגית מגדילה אותו, שכן פעולה זו הופכת אותו חיובי.

<u>לדוגמה:</u>

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

✓ **כלל:** העלאת שבר שלילי בחזקה חיובית ואי-זוגית מגדילה אותו אף היא, שכן פעולה זו מקרבת אותו ל-0.

<u>לדוגמה:</u>

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

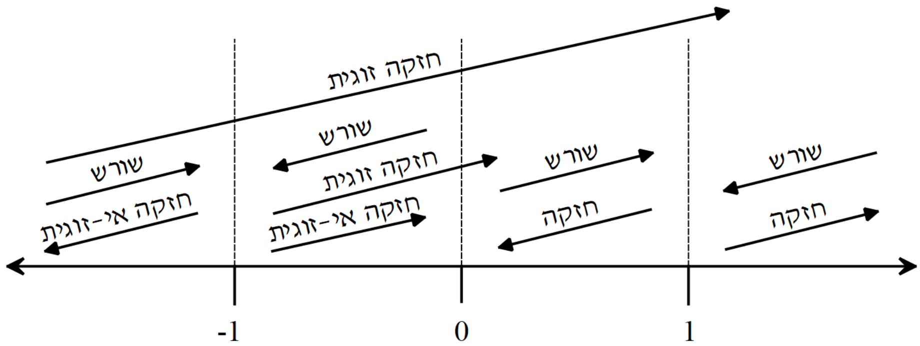
בבחינה, אם נתבקש להוציא שורש לשבר שלילי, יהיה זה שורש מסדר אי זוגי.

✓ **כלל:** הוצאת שורש מסדר אי-זוגי לשבר שלילי מקטינה אותו, שכן פעולה זו מרחיקה אותו מ-0.

<u>לדוגמה:</u>

$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

ניתן לסכם את התנהגותם של המספרים מכל התחומים כך:



שאלה לדוגמה – ציר מספרים

נתון: $0 < x \cdot y < 1$, $x < -1$

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $y < -1$

(2) $-1 < y < 0$

(3) $0 < y < 1$

(4) $1 < y$

__פתרון__

__דרך א' – הבנה אלגברית:__

לפי הנתון השני, x שלילי. כמו כן לפי הנתון הראשון, מכפלתם של x ו-y היא שבר חיובי.

לפיכך, ניתן לקבוע כי ערכו של y שלילי, שכן: $(-)\cdot(-)=+$. בשלב הזה ניתן לפסול את תשובות (3) ו-(4).

תשובה (1): אילו היה y קטן מ-(-1), תוצאת המכפלה הייתה מספר אשר גדול מ-1, דבר אשר אינו מקיים את הנתון. התשובה נפסלת.

תשובה (2): הכפלת מספר קטן מ-(-1) בשבר היא הפעולה היחידה אשר עשויה להפוך אותו לשבר חיובי. זו התשובה הנכונה.

__דרך ב' – הצבת מספרים:__

נציב מספרים נוחים אשר מקיימים את הנתונים: $x = -2$ ו-$y = -\frac{1}{4}$.

לפי הצבה זו: $0 < x \cdot y < 1 \Rightarrow 0 < -2 \cdot -\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1$.

מצאנו הצבה אשר באמצעותה ניתן לפסול את התשובות (1), (3) ו-(4), שכן לפיה התחומים בהן אינם נכונים בהכרח.

התשובה הנכונה היא (2).

שאלה נוספת - ציר מספרים

נתון: $\frac{1}{x} < x < -x$, $x \neq 0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $1 < x$

(2) $0 < x < 1$

(3) $-1 < x < 0$

(4) $x < -1$

<u>פתרון</u>

<u>דרך א' - פתרון אלגברי:</u>

נתחיל לפשט את חלקו הימני של אי-השוויון: $x < -x$. נבודד את x ונקבל: $2x < 0$. נחלק את שני אגפי אי-השוויון ב-2 ונקבל: $x < 0$. בשלב זה, ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(2). כעת, נפשט את חלקו השמאלי של אי-השוויון: $\frac{1}{x} < x$.

נכפול את שני אגפי אי-השוויון ב-x (אנו יודעים כי הוא שלילי, ועל כן יש להפוך את הסימן): $1 > x^2$.

נזכיר כי בתבנית הזו, נעלם בחזקה זוגית אשר קטן מערך מסוים, ישנם 2 פישוטים:

1. נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך ה**חיובי** בלבד ו**לא נשנה** את כיוון הסימן: $x < 1$.

2. נוציא שורש לשני האגפים, ניקח בחשבון את הערך ה**שלילי** בלבד **ונשנה** את כיוון הסימן: $x > -1$.

שימו לב כי את התחומים אשר מופיעים לעיל ניתן לאחד ולהציג כך: $-1 < x < 1$.

לאור האמור לעיל, ניתן לקבוע כי $x < 0$ **וגם** $-1 < x < 1$. לפיכך: $-1 < x < 0$.

<u>דרך ב' - הצבת מספרים:</u>

מחלקו הימני של אי-השוויון ($x < -x$) ניתן להסיק כי x הוא בהכרח שלילי. כלומר, הוא עשוי להיות מספר אשר קטן מ-(1-) או שבר שלילי. נציב $x = -2$ באי-השוויון הנתון: $\frac{1}{-2} < -2 < -(-2) \Rightarrow -\frac{1}{2} < -2 < 2$.

(2-) לא גדול מ-($-\frac{1}{2}$), ולכן אי-השוויון הנתון לא מתקיים. אם כן, יש לעשות הצבה נוספת.

נציב $x = -\frac{1}{2}$ בנתון: $\frac{1}{-\frac{1}{2}} < -\frac{1}{2} < -\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

הצבה זו מקיימת את הנתון וניתן לפסול באמצעותה את תשובות (1), (2) ו-(4).

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - ציר מספרים

נתון: $0<a,b$, $\frac{a}{b^2}<\sqrt{\frac{a}{b^2}}$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $a<b$

(2) $b<\sqrt{a}$

(3) $\sqrt{a}<b$

(4) $b<a$

<u>פתרון</u>

נתון כי a ו-b חיוביים ועל כן הביטוי $\frac{a}{b^2}$ חיובי אף הוא.

אם כן, הוא עשוי להיות שבר חיובי או מספר אשר גדול מ-1.
שימו לב כי אי-השוויון הנתון מורכב משני אגפים אשר בהם ביטוי זהה.
עם זאת, באגף הימני הביטוי נמצא תחת שורש, ואילו באגף השמאלי לא.

למדנו בשיעור כי הוצאת שורש לשבר חיובי מגדילה אותו, ועל כן ניתן לקבוע כי הביטוי $\frac{a}{b^2}$ הוא שבר חיובי.

אם כן: $0<\frac{a}{b^2}<1$.

נפשט את חלקו הימני של אי-השוויון על ידי כפל ב- b^2 (אנו יודעים כי הביטוי חיובי, ועל כן אין צורך להפוך את הסימן): $a<b^2$.
כאשר נתון לנו נעלם בחזקה זוגית אשר גדול מערך מסוים, עלינו לזכור כי ישנם 2 פישוטים (ערך חיובי וערך שלילי).
אולם, נתון לנו כי b ו-a חיוביים, ולכן נבצע את הפישוט החיובי בלבד: $\sqrt{a}<b$.
התשובה הנכונה היא (3).

שאלה נוספת - ציר מספרים

נתון: $0<\frac{a}{b}<1$, $b\neq 0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) אם $0<a<1$ אז $1<b$

(2) אם $b<1$ אז $0<a<1$

(3) אם $a<0$ אז $b<0$

(4) אם $b<-1$ אז $0<a$

<u>פתרון</u>

הביטוי $\frac{a}{b}$ גדול מ-0 וקטן מ-1, כלומר הוא שבר חיובי. אם כן, או ש-a ו-b שליליים או ששניהם חיוביים.

שימו לב כי כל אחת מהתשובות בנויה מתנאי ומתוצאה (אם... אז...).
לתנאי הזה עלינו להתייחס כאל נתון נוסף, ולבדוק אם צירוף שלו ושל נתוני השאלה מניב טענה נכונה בהכרח. נעבור לבדיקת התשובות:
תשובה (1): אם a הוא שבר חיובי, אזי b לא מוכרח להיות גדול מ-1, שכן הוא עשוי להיות **שבר** חיובי אשר גדול מ-a.

לדוגמה: $a=\frac{1}{2}$ ו- $b=\frac{2}{3}$. הצבה זו מקיימת את הנתון ($\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$), אך מראה שהתוצאה ($1<b$) אינה מתקיימת בהכרח.

התשובה נפסלת.
תשובה (2): אם b קטן מ-1 הוא עשוי להיות גם מספר שלילי. אם הוא מספר שלילי, על a להיות שלילי גם כן כדי לקיים את הנתון ($\frac{a}{b}$ שבר חיובי). לדוגמה: $a=-1$ ו- $b=-2$.

הצבה זו מקיימת את הנתון ($\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$), אך מראה שהתוצאה ($0<a<1$) אינה מתקיימת בהכרח. התשובה נפסלת.

תשובה (3): כפי שעלה בתחילת הפתרון - אם a שלילי, אזי b מוכרח להיות שלילי גם כן כדי שחלוקתם תניב שבר חיובי.
זו התשובה הנכונה.
תשובה (4): אם b שלילי, אזי, כאמור, a צריך להיות שלילי גם כן. לפיכך, תשובה זו לא נכונה בהכרח. התשובה נפסלת.
התשובה הנכונה היא (3).

סיכום

1. **<u>מבוא לאי-שוויונות:</u>**

פעולות שניתן לעשות על אי-שוויונות:

- להוסיף לשני אגפי אי-השוויון כל ערך.
- לחסר משני אגפי אי-השוויון כל ערך.
- לכפול או לחלק את שני אגפי אי-השוויון בערך חיובי.
- לחבר בין אגפים של אי-שוויונות שונים.
- כאשר אנו מחלקים או כופלים את שני אגפי אי-השוויון בערך שלילי, עלינו להפוך את הסימן.
- כאשר ערכו של נעלם אינו ידוע אך נתון כי הוא שונה מ-0, עלינו לזכור כי ישנם שני מצבים:
  1. הוא חיובי ואין צורך להפוך את הסימן כאשר כופלים או מחלקים בו.
  2. הוא שלילי ויש צורך להפוך את הסימן כאשר כופלים או מחלקים בו.
- **זכרו!** אם $b<a$ ו- $c<b$, אזי ניתן להסיק כי $c<a$.

2. **<u>חפיפת תחומי הגדרה:</u>**

- ייתכנו תחומים אשר ביניהם מתקיימת חפיפה.
- ייתכנו תחומים אשר ביניהם **לא** מתקיימת חפיפה.
- כאשר נתון לנו נעלם בחזקה זוגית אשר גדול מערך מסוים ($a<x^2$), עלינו לזכור כי ישנם 2 פישוטים:
  1. $\sqrt{a}<x$.
  2. $x<-\sqrt{a}$.
- כאשר נתון לנו נעלם בחזקה זוגית אשר קטן מערך מסוים ($x^2<a$), עלינו לזכור כי ישנם 2 פישוטים:
  1. $x<\sqrt{a}$.
  2. $-\sqrt{a}<x$.

  כלומר: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$.

3. **<u>אי-שוויון כפול:</u>**

כאשר נתון לנו אי שוויון כפול, עלינו לפעול לפשט אותו.

<u>לדוגמה:</u>

את אי-השוויון הבא $4<x+3<5$ יש לפשט כך:

1. $x+3<5$. נחסר 3 משני האגפים: $x<2$.
2. $4<x+3$. נחסר 3 משני האגפים: $1<x$. כלומר: $1<x<2$.

4. **סוגי טענות וניסוחים:**

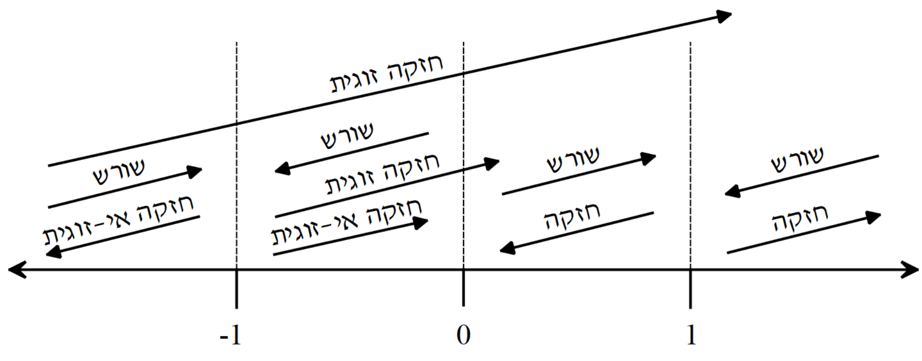
בבחינה בכלל ובאי-שוויונות בפרט עשויים להופיע מספר ניסוחים שונים אשר להם משמעויות שונות:

- נכון/ה בהכרח - טענה אשר נכונה **תמיד**.
- אינו/ה נכון/ה בהכרח - טענה אשר לא נכונה תמיד. היא אומנם אפשרית, אך לא נכונה תמיד.
- בהכרח אינו/ה נכון/ה - טענה לא נכונה אשר לא מקיימת את הנתונים.

5. **ציר המספרים, בנק הצבות:**

את כל המספרים ניתן לחלק לתחומים, ועבור כל תחום ניתן להציב מספרים אשר יעזרו לנו לזכור כיצד מספרים מהתחום הזה מתנהגים כשמעלים אותם בחזקה או מוציאים להם שורש:

- **"מספרים מיוחדים":** 1 בחזקת כל מספר שווה ל-1, וכך גם לגבי שורש - שורש מכל סדר שהוא של 1 שווה ל-1.
  0 בחזקת כל מספר (פרט ל-0 משום ש- 0^0 הוא ביטוי שאינו מוגדר) שווה ל-0.
  כך לגבי שורש - שורש מכל סדר שהוא של 0 שווה ל-0.
  (-1) בחזקת **זוגית** שווה ל-1, ואילו (-1) בחזקת **אי-זוגית** שווה ל-(-1).
  בבחינה, אם נתבקש להוציא שורש ל-(-1), יהיה זה שורש אי זוגי בלבד והתשובה תהיה (-1).
- **מספרים חיוביים אשר גדולים מ-1** איתם נוח לעבוד הם: 2, 4 ו-8.
- **שברים חיוביים** איתם נוח לעבוד הם: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{8}$.
- **מספרים שליליים אשר קטנים מ-(-1)** איתם נוח לעבוד הם: (-2), (-4) ו-(-8).
- **שברים שליליים** איתם נוח לעבוד הם: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ ו- $-\frac{1}{8}$.
  ניתן לסכם את התנהגותם של המספרים מכל התחומים כך:



סוף שיעור - בהצלחה בתרגול!