שיעור חזקות

מבוא

נושא חזקות ושורשים הוא נושא שלמדנו בבית הספר בצורות שונות. בבחינה הפסיכומטרית קיימים תרגילים ספציפיים על נושא החזקות והשורשים, אך פעמים רבות אנו נדרשים להבין את חוקי החזקות והשורשים על מנת לפתור גם שאלות בנושאים רבים אחרים כגון פתרון משוואות ואי שוויונים, נוסחאות כפל מקוצר, השוואות כמותיות ועוד.

הגדרת החזקה

חזקה היא כתיבה מקוצרת של פעולה חשבונית המבטאת כפל מספר בעצמו מספר פעמים.
כתיבת החזקה מורכבת מ"בסיס" ו"מעריך".
הבסיס הוא המספר אותו אנו כופלים בעצמו והמעריך הנכתב מימין למעלה לצד המספר הוא מספר הפעמים שאנו כופלים את הבסיס בעצמו.

לדוגמא: בביטוי: 2^4, בסיס החזקה הוא 2 ומעריך החזקה הוא 4. משמעות הביטוי 2^4 היא שאנו כופלים את המספר 2 ארבע פעמים בעצמו, כלומר: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

סדר פעולות

כידוע, בחשבון יש סדר פעולות מוסכם מראש. לדוגמא, פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
פעולת החזקה קודמת לכל ארבע פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק.
סוגריים קודמים לחזקה.

לדוגמא: $10+3^2 = ?$. מכיוון שחזקה קודמת לחיבור, נפתור קודם כל את החזקה. כך נקבל: $10+3^2 = 10+3\cdot 3$. כעת מכיוון שגם כפל קודם לחיבור נקבל: $10+3\cdot 3 = 10+9 = 19$.

חזקה קודמת גם למינוס המופיע לפני מספר. כלומר, -3^2 שווה ל- $-(3\cdot 3) = (-9)$ ו<u>לא</u> שווה ל- $(-3)\cdot(-3)$. זאת מכיוון ש- -3^2 שווה בעצם ל- $-1\cdot 3^2$, וכפי שנאמר קודם חזקה קודמת לכפל, כלומר $-1\cdot 3^2 = (-1)\cdot 9 = (-9)$.
עם זאת, אם החזקה נמצאת מחוץ לסוגריים והמינוס נמצא בתוכם, הכוונה היא שאנו מעלים בחזקה מספר שלילי. לדוגמא: $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$.

לכן, אם נרצה להעלות מספר שלילי בחזקה, עלינו להכניסו לתוך סוגריים. למשל, אם נרצה להעלות את -5 בחזקת 2, נכניס אותו לסוגריים ורק אז נעלה בחזקה: $(-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = 25$.

כאמור, סוגריים <u>קודמים</u> לפתיחת החזקה. לדוגמא, אם נתון הביטוי $(3+7)^2$, נפתור קודם את מה שנמצא בתוך הסוגריים: $3+7=10$ וכעת נעלה את מה שנמצא בתוך הסוגריים בחזקת 2: $(10)^2 = 10\cdot 10 = 100$.

<u>חשוב לזכור</u>: במקרה בו מעלים בחזקה ביטוי בתוך סוגריים, הפתרון <u>אינו</u> שווה להעלאה בחזקה של כל אחד מהאיברים שבתוך הסוגריים לחוד. אם ניקח את הדוגמא הקודמת, $(3+7)^2 \neq 3^2+7^2$ (שימו לב לסימון **<u>אי</u>** השוויון).

מכיוון שחזקה קודמת לחילוק, במקרה של שבר (שהוא בעצם חילוק של המונה במכנה), אם במכנה או במונה קיימת חזקה, החזקה פועלת רק על המכנה או המונה בהתאם למקום בו היא נמצאת.

לדוגמא: $\frac{2^2}{3} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$. החזקה במקרה זה לא משפיעה על המכנה אלא רק על המונה.

לעומת זאת, אם שבר נמצא בתוך סוגריים ומחוץ לסוגריים מופיעה חזקה, החזקה משפיעה <u>גם</u> על המונה <u>וגם</u> על המכנה. לדוגמא: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{4}{9}$.

<u>תרגול סדר פעולות עם חזקות</u>

1. $2+3^2 = ?$
2. $2^2-3 = ?$
3. $2\cdot 3^2 = ?$
4. $2\cdot\frac{3^2}{2} = ?$
5. $2^2\cdot 3^2 = ?$
6. $\frac{2}{3}\cdot 3^2 = ?$
7. $2-3^2 = ?$
8. $2\cdot(-3)^2 = ?$
9. $2-(3^2) = ?$
10. $(2+3^2)^2 = ?$

שאלה לדוגמא

$$20-3^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=?$$

(1) 10
(2) 8
(3) 6
(4) 4

פתרון

נפתור בשלבים על פי סדר הפעולות הנכון. נתחיל מפתיחת החזקות. מכיוון שהשבר נמצא בתוך הסוגריים והחזקה מבחוץ, החזקה חלה הן על המכנה והן על המונה. מכאן, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1\cdot1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$. כעת נפתור את החזקה הנוספת: $3^2=3\cdot3=9$. מכאן נקבל: $20-9-4\cdot\frac{1}{4}=11-\frac{4}{4}=11-1=10$.

התשובה הנכונה היא (1).

חזקה זוגית וחזקה אי זוגית

העלאת מספר בחזקת 2 נקרא גם העלאה בריבוע. כלומר האופן בו נקרא את הביטוי 3^2 הוא 3 בריבוע.
מכיוון שמשמעות החזקה היא הכפלת המספר בעצמו, כל מספר חיובי אשר נעלה בכל חזקה, יישאר תמיד חיובי. הסיבה לכך היא שכאשר אנו מכפילים מספר חיובי במספר חיובי התוצאה תמיד תהיה חיובית ולכן גם אם נכפול אותה במספר חיובי נוסף שוב ושוב התוצאה תישאר חיובית.
לדוגמא: לא משנה כמה פעמים נכפיל את 2 בעצמו, התוצאה תמיד תהיה חיובית.
אם נכפיל את 2 בעצמו 3 פעמים נקבל: $2\cdot2\cdot2=8$, אם נכפיל את 2 בעצמו 4 פעמים נקבל: $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ וכן הלאה.

בניגוד למספר חיובי, כאשר כופלים מספר שלילי בעצמו, יכולה להתקבל תוצאה חיובית או שלילית, כתלות במספר הפעמים שאנו מכפילים את המספר בעצמו.

לדוגמא: אם נכפול את (-1) בעצמו 3 פעמים נקבל: $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=(-1)$, כלומר תוצאה שלילית.

לעומת זאת אם נכפול את (-1) בעצמו 4 פעמים נקבל: $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1$, כלומר תוצאה חיובית.

נוכל לדעת תמיד האם התוצאה תהיה חיובית או שלילית על פי הכללים הבאים:
(חזקה זוגית משמעה מעריך זוגי, וחזקה אי זוגית משמעה מעריך אי זוגי).

כלל: העלאה של מספר חיובי בחזקה זוגית או אי זוגית - תביא לתוצאה חיובית תמיד.

כלל: העלאה של מספר שלילי בחזקה זוגית - תביא לתוצאה חיובית.

כלל: העלאה של מספר שלילי בחזקה אי זוגית - תביא לתוצאה שלילית.

שאלה לדוגמא

נתונים הביטויים הבאים:

1. $30^5+(-12)^{10}$
2. $(-23)^{99}\cdot(-11)^2$

ענה מבלי לחשב: ערכו של הביטוי הראשון הוא ________, וערכו של הביטוי השני הוא ________.

(1) חיובי; שלילי
(2) שלילי; חיובי
(3) חיובי; חיובי
(4) שלילי; שלילי

פתרון

הביטוי הראשון מורכב מסכום של שני איברים. האיבר הראשון 30^5 הוא מספר חיובי המועלה בחזקה ולכן בהכרח התוצאה חיובית. האיבר השני $(-12)^{10}$ הוא מספר שלילי המועלה בחזקה זוגית ולפי הכללים לעיל גם במקרה זה התוצאה חיובית. בין שני האיברים מתבצע חיבור, ומכיוון שחיבור שני איברים חיוביים יביא בהכרח לתוצאה חיובית, ערך הביטוי הראשון הינו חיובי.

נוכל כבר עכשיו לפסול את תשובות מספר 2 ו- 4 כיוון שהן סותרות מסקנה זו.

כעת נבדוק את הביטוי השני. הוא מורכב מכפל בין שני איברים. האיבר הראשון $(-23)^{99}$ הוא מספר שלילי המועלה בחזקה אי זוגית ועל כן, על פי הכללים לעיל, התוצאה הינה שלילית. האיבר השני $(-11)^2$ הוא איבר שלילי המועלה בחזקה זוגית ועל כן ערכו חיובי. כעת

אנו יודעים שהביטוי השני מורכב מכפל בין איבר שלילי ואיבר חיובי. כפל של איבר שלילי באיבר חיובי מביא לתוצאה שלילית, ולכן ערכו של הביטוי השני שלילי.

התשובה הנכונה היא (1).

חזקות שכדאי לזכור בעל פה

חזקות של המספר 2:

$2^2=4$	$2^5=32$	$2^8=256$
$2^3=8$	$2^6=64$	$2^9=512$
$2^4=16$	$2^7=128$	$2^{10}=1024$

חזקות של המספר 3:

$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$

חזקות של המספר 4:

$4^2=16$	$4^4=256$
$4^3=64$	$4^5=1024$

חזקות של המספר 5:

$5^2=25$	$5^3=125$	$5^4=625$

חזקות של המספר 6:

$6^2=36$	$6^3=216$

חזקות ריבועיות שכדאי לזכור:

$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$20^2 = 400$
$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$25^2 = 625$
$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$30^2 = 900$
$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	
$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	

חזקות מיוחדות

כלל: כל בסיס בחזקת 1 שווה בערכו לערך הבסיס: $x^1 = x$.

כלל: כל בסיס בחזקת 0 שווה ל- 1: $x^0 = 1$.

לדוגמא: $2^0 = 7^0 = 32^0 = 1$.

כלל: בסיס 0 בחזקת כל מעריך שווה ל- 0: $0^x = 0$. יוצא דופן הוא בסיס 0 בחזקת מעריך 0 (ראה הערה בהמשך).

לדוגמא: $0^4 = 0^8 = 0^{21} = 0$.

הערה: 0^0 הוא ביטוי לא מוגדר ולכן גם לא יופיע במבחן הפסיכומטרי.

כלל: בסיס 1 בחזקת כל מעריך יהיה שווה ל- 1: $1^x = 1$.

לדוגמא: $1^4 = 1^8 = 1^{21} = 1$.

תרגול חזקות מיוחדות

1. $1^{100} = ?$
2. $1^1 = ?$
3. $1^0 = ?$
4. $1^7 = ?$
5. $0^1 = ?$
6. $0^7 = ?$
7. $923^0 = ?$
8. $\frac{0^4}{4^0} = ?$

חוקי חזקות

כפל בסיסים זהים

כאשר כופלים שני איברים בעלי חזקה אשר בסיסם זהה, התוצאה שווה לבסיס בחזקת סכום המעריכים של שני הבסיסים, כלומר: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

לדוגמא: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

דוגמא נוספת: $100^{99} \cdot 100^{(-98)} = 100^{99+(-98)} = 100^1 = 100$

נוכל לזכור חוק זה בקלות אם נבין את משמעותו. אם ניקח את התרגיל בדוגמא, המשמעות של 2 בחזקת 3 היא שאנו כופלים שלוש פעמים את 2 בעצמו. המשמעות של 2 בחזקת 4 היא שאנו כופלים ארבע פעמים את 2 בעצמו. בסך הכל אנחנו כופלים את 2 שבע פעמים בעצמו ולכן התוצאה היא 2 בחזקת 7:

$$2^3 \cdot 2^4 = (2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2) = 2^7$$

חלוקת בסיסים זהים

כאשר מחלקים שני איברים בעלי חזקה אשר בסיסם זהה, התוצאה שווה לבסיס בחזקת הפרש המעריכים של שני הבסיסים (מעריך המונה פחות מעריך המכנה), כלומר: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

לדוגמא: $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1$

דוגמא נוספת: $\frac{100^{99}}{100^{97}} = 100^{99-97} = 100^2$

נוכל לזכור חוק זה בקלות אם נבין את משמעותו. אם ניקח את התרגיל בדוגמא, המשמעות של 2 בחזקת 4 היא שאנו כופלים ארבע פעמים את 2 בעצמו. המשמעות של 2 בחזקת 3 היא שאנו כופלים שלוש פעמים את 2 בעצמו. נוכל לכתוב את הביטוי ולצמצמו כך: $\frac{2^4}{2^3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} = 2 = 2^1$.

כלומר, הכלל מדבר על חיסור המעריך של המכנה מהמעריך של המונה אך בפועל מדובר בצמצום שברים פשוט.

כפל בסיסים שונים בעלי מעריכים זהים

מכפלת שני בסיסים שונים בעלי מעריכים זהים שווה לתוצאת כפל הבסיסים בחזקת המעריך הזהה,

כלומר: $b^a \cdot c^a = (b \cdot c)^a$.

לדוגמא: $3^4 \cdot 8^4 = (3 \cdot 8)^4 = 24^4$

דוגמא נוספת: $\frac{2}{5}^3 \cdot \frac{8}{5}^3 = \frac{(2 \cdot 8)^3}{5 \cdot 5} = \frac{(16)^3}{25}$

חלוקת בסיסים שונים בעלי מעריכים זהים

מנה של שני בסיסים שונים בעלי מעריכים זהים, שווה למנת הבסיסים בחזקת המעריך הזהה,

כלומר, $\frac{b^a}{c^a} = \left(\frac{b}{c}\right)^a$.

לדוגמא: $\frac{3^4}{8^4} = \left(\frac{3}{8}\right)^4$

דוגמא נוספת: $\frac{2^{3x}}{7^{3x}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{3x}$

הערה: יש לשים לב לכך שאין חוק הנוגע לחיבור או חיסור של בסיסים זהים או של בסיסים שונים בעלי מעריכים זהים. כלומר, הביטוי $3^2 + 3^7$ אינו ניתן לפישוט על ידי חוקי חזקות ואין הוא שווה ל- 3^{2+7}.

כמו כן, הביטוי $3^2 + 6^2$ אינו שווה ל- $(3+6)^2$.

תרגול חוקי חזקות א'

1. $2 \cdot 2^2 = ?$
2. $\frac{2}{2^2} = ?$
3. $3^2 \cdot 3^5 = ?$
4. $3^{-2} \cdot 3^5 = ?$
5. $3^2 + 3^5 = ?$
6. $2^3 + 3^3 = ?$
7. $\frac{3^2}{2^3} = ?$
8. $\frac{2^3}{2^{(-1)}} = ?$
9. $\frac{2^3 \cdot 2^{(-2)}}{2^{(-1)}} = ?$
10. $\frac{1{,}000^2}{500^2} \cdot 2^{-2}$

<u>שאלה לדוגמא</u>

$$\frac{45^2 \cdot 45^8}{45^3} \cdot 2^7 = ?$$

(1) $45^{\frac{10}{3}} \cdot 2^7$

(2) $3{,}492$

(3) 90^7

(4) $45^{\frac{16}{3}} \cdot 2^7$

<u>פתרון</u>

ראשית נפשט את המונה של השבר, על פי חוק כפל בסיסים זהים: $45^2 \cdot 45^8 = 45^{2+8} = 45^{10}$. קיבלנו את השבר $\frac{45^{10}}{45^3}$. על פי חוק חלוקת בסיסים זהים ומעריכים שונים נקבל: $\frac{45^{10}}{45^3} = 45^{10-3} = 45^7$. מכאן הביטוי שווה ל- $\frac{45^2 \cdot 45^8}{45^3} \cdot 2^7 = 45^7 \cdot 2^7$. את הביטוי הזה נוכל לפשט על פי חוק כפל בסיסים שונים ומעריכים זהים: $45^7 \cdot 2^7 = (45 \cdot 2)^7 = 90^7$

התשובה הנכונה היא (3).

<u>חוקי חזקות הפוכים</u>

עבור כל כלל שהזכרנו כעת, ניתן לבנות את הכלל ההפוך.

כל מעריך נוכל להציג כסכום של שני מספרים בהתאם לתרגיל אותו אנחנו פותרים. כלומר:

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

לדוגמא: $2^7 = 2^{3+4} = 2^3 \cdot 2^4$.

מדוע יש צורך בפירוק של המעריך לסכום של שתי חזקות? בחלק מן המקרים נוכל בדרך זו לצמצם שבר או להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים. ניקח לדוגמא את התרגיל הבא:

$\frac{2^7}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^{3+4}}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$. ראינו שפירוק המעריך לסכום של שתי חזקות עזר לנו לצמצם את הביטוי ולפשט את התוצאה.

חוקים "הפוכים" נוספים הם $(b \cdot c)^a = b^a \cdot c^a$ וגם $\left(\frac{b}{c}\right)^a = \frac{b^a}{c^a}$.

תרגול חוקי חזקות ב'

פשט ככל הניתן את התרגילים הבאים:

1. $\frac{2^{3+x}}{2^3} = ?$
2. $\frac{4^{a+b} \cdot 4^a}{4^b} = ?$
3. $\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^x}{2^x} = ?$
4. $\left(\frac{3}{2}\right)^a \cdot \frac{1}{3^a} = ?$
5. $\left(\frac{8^{x+y}}{8^x}\right)^3 = ?$
6. $\frac{(7 \cdot 8)^2}{2^3} = ?$

חזקה של חזקה

במקרה בו נתונה חזקה מחוץ לסוגריים וחזקה בתוך הסוגריים, כמו לדוגמא במקרה הבא: $\left(a^b\right)^c$, נוכל לפתוח את הסוגריים על ידי כפל של שתי החזקות אחת בשניה כך: $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$.

לדוגמא: $\left(2^5\right)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$.

דוגמא נוספת: $\left(\frac{2}{5}\right)^{21} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3 \cdot 7} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^7 = \left(\frac{2^3}{5^3}\right)^7$.

על מנת להבין לעומק את הכלל הזה, נוכל לפרק את הדוגמא הקודמת בכתיבה ללא חזקות וכך נקבל: $\left(2^5\right)^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{15}$. מכיוון שקיבלנו ביטוי שבין כל האיברים שלו יש כפל בלבד נוכל לכתוב אותו בצורה מקוצרת על ידי חזקה.

תרגול חזקה של חזקה

1. $\left(x^3\right)^3 = ?$
2. $\left(2^7\right)^1 = ?$
3. $\left(2^4 \cdot 2^2\right)^3 = ?$
4. $\left(\frac{2^7}{8^7}\right)^5 = ?$
5. $\left(a^{76}\right)^0 = ?$
6. $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^2 = ?$

המרת בסיסים

לעיתים, על מנת שנוכל לצמצם שברים או להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים נצטרך לכתוב את החזקה עם בסיס שונה. הדבר מותר כמובן כל עוד הביטוי שומר על ערכו.

לדוגמא: $27^3=(27)^3=(3^3)^3=3^{3\cdot3}=3^9$. הדבר מותר מכיוון ש $27=3^3$. לכן, מותר לנו להכניס את 27 לסוגריים, ולהפוך אותו ל- 3^3. כעת, על פי חוקי חזקות נוכל לפתוח חזקה של חזקה ולקבל $27^3=3^9$.

הדבר יהיה שימושי לדוגמא בתרגיל הבא: $\frac{27^3}{3^8}=\frac{3^9}{3^8}=3^{9-8}=3^1=3$. בתרגיל זה ללא העברת 27 לחזקה עם בסיס 3, לא היינו יכולים לפשט את הביטוי בזמן סביר המוקצב לנו בבחינה הפסיכומטרית. על ידי העברת 27 לבסיס 3 נוכל לצמצם את השבר ולמצוא את ערך השבר בקלות.

דוגמא נוספת: $\frac{16^5\cdot16^3}{2^4\cdot4^3}=?$. בתרגיל זה נוכל לפרק את 16 פעם לחזקה שבסיסה 2 ומעריכה 4 ופעם לחזקה שבסיסה 4 ומעריכה 2. בדרך זו נוכל לצמצם את השבר ולמצוא בקלות את ערכו של הביטוי.

$$\frac{16^5\cdot16^3}{2^4\cdot4^3}=\frac{(2^4)^5\cdot(4^2)^3}{2^4\cdot4^3}=\frac{2^{4\cdot5}\cdot4^{2\cdot3}}{2^4\cdot4^3}=\frac{2^{20}\cdot4^6}{2^4\cdot4^3}=\frac{2^{20}}{2^4}\cdot\frac{4^6}{4^3}=2^{20-4}\cdot4^{6-3}=2^{16}\cdot4^3.$$

נשים לב שגם את הביטוי שקיבלנו נוכל לכתוב בצורה פשוטה יותר על ידי העברת 4 לחזקה עם בסיס 2.

כך נקבל: $2^{16}\cdot4^3=2^{16}\cdot(2^2)^3=2^{16}\cdot2^{2\cdot3}=2^{16}\cdot2^6=2^{16+6}=2^{22}$.

כך, על ידי מעבר לחזקה עם בסיס שונה, נוכל לפשט את הביטוי: $\frac{16^5\cdot16^3}{2^4\cdot4^3}=2^{22}$.

בחלק מן המקרים נצטרך לפרק מספר למכפלה של שני מספרים ולאחר מכן להעביר אחד מהם לחזקה עם בסיס שונה. כמו למשל בדוגמא הבאה: $3^6=\frac{2^6\cdot3^6}{2^6}=\frac{2^{2\cdot3}\cdot3^{2\cdot3}}{2^6}=\frac{(2^2)^3\cdot(3^2)^3}{2^6}=\frac{4^3\cdot9^3}{2^6}=\frac{36^3}{2^6}$.

כלומר, על ידי פירוק 36 למכפלה של 9 ו- 4 נוכל להפוך את 36 לביטוי המבוטא על ידי שתי חזקות ובצורה כזאת לצמצם שברים או להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים במידת הצורך.

תרגול המרת בסיסים

1. הפכו את 9 לביטוי עם בסיס 3.
2. הפכו את 4^4 לביטוי עם בסיס 2.
3. הפכו את 8^3 לביטוי עם בסיס 2.
4. הפכו את 100^3 לביטוי עם בסיס 10.
5. הפכו את 100 לביטוי המבוטא על ידי כפל בין שתי חזקות.
6. הפכו את 400 לביטוי המבוטא על ידי שתי חזקות.
7. פשטו ככל האפשר את הביטוי $\left(\frac{400^3}{10^2}\right)$.
8. פשטו ככל האפשר את הביטוי $\left(9^4+27^3\right)$.
9. צמצמו את הביטוי $\frac{3^6}{24^6}$ ככל הניתן.
10. $\frac{64^{10}}{4^{12}2^2}=?$

חזקה עם מעריך שלילי

כאשר המעריך של חזקה הוא ערך שלילי, לדוגמא: 2^{-3}, נוכל לפשט את הביטוי כך שיהיה לנו קל יותר לחשב את ערכו על פי הכללים שלמדנו עד כה.

כלל החזקה עם מעריך שלילי הוא שערך הביטוי יהיה שווה לאחד חלקי הבסיס באותה חזקה, כאשר המעריך משנה את הסימן והופך משלילי לחיובי.

ככלל: $a^{(-b)}=\frac{1}{a^b}$.

לדוגמא: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$. בדרך זו נוכל לדעת שערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$.

הכלל עובד כמובן גם לכיוון השני ולכן נוכל לומר ש- $a^{(-b)}=\frac{1}{a^b}$. לדוגמא: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$.

נשים לב שבסיס של חזקה שמעריכה שלילי לא יכול להיות 0. זאת מכיוון שבמקרה כזה 0 יעבור למכנה של השבר ולכן הביטוי לא יהיה מוגדר.

תרגול חזקה עם מעריך שלילי

1. $3^{-4} = ?$
2. $(-2)^{-2} = ?$
3. $(-3)^{-1} = ?$
4. $\frac{3^{-2}}{2} = ?$
5. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = ?$
6. $1^{-\frac{4}{5}} = ?$

סיכום נוסחאות וחוקי חזקות

חזקות מיוחדות:	בסיסים שונים:
$x^1 = x$	$b^a \cdot c^a = (b \cdot c)^a$
$x^0 = 1$	$(b \cdot c)^a = b^a \cdot c^a$
$0^x = 0$	$\frac{b^a}{c^a} = \left(\frac{b}{c}\right)^a$
$1^x = 1$	$\left(\frac{b}{c}\right)^a = \frac{b^a}{c^a}$
בסיסים זהים:	**חזקה של חזקה**
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$	**חזקה עם מעריך שלילי**
$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	$a^{(-b)} = \frac{1}{a^b}$
$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$	

לסיכום

נושא החזקות מופיע בהרבה סוגי שאלות במבחן ויש לדעת אותו היטב. מומלץ לשנן את טבלת החזקות אותן כדאי לזכור בעל פה, הדבר יחסוך זמן יקר של חישובים בבחינה.

יש להקדיש תשומת לב מיוחדת לכללים ולנוסחאות החזקות ולא לבצע פעולות אסורות (כמו חיבור חזקות של שני איברים שביניהם יש חיבור או חיסור), הדבר מהווה מקור לטעויות רבות של תלמידים בנושא זה.

<u>פתרון סדר פעולות עם חזקות</u>

1. מכיוון שחזקה קודמת לחיבור, נפתור אותה קודם ונקבל: $2+3^2=2+3\cdot3=2+9=11$.
2. מכיוון שחזקה קודמת לחיסור, נפתור אותה קודם ונקבל: $2^2-3=2\cdot2-3=4-3=1$.
3. מכיוון שחזקה קודמת לכפל , נפתור אותה קודם ונקבל: $2\cdot3^2=2\cdot3\cdot3=18$.
4. מכיוון שחזקה קודמת לחילוק נוכל לפתור אותה קודם, אך נוכל גם לצמצם את השבר בצורה כזאת: $2\cdot\frac{3^2}{2}=3^2=3\cdot3=9$.
5. מכיוון שחזקה קודמת לכפל נפתור קודם את שתי החזקות ונקבל: $2^2\cdot3^2=2\cdot2\cdot3\cdot3=36$.
6. מכיוון שחזקה קודמת לחילוק נפתור קודם את החזקה ונקבל: $\frac{2}{3}\cdot3^2=\frac{2}{3}\cdot3\cdot3$. כעת נוכל לצמצם את השבר ונקבל: $\frac{2}{3}\cdot3\cdot3=2\cdot3=6$.
7. מכיוון שחזקה קודמת למינוס נפתור קודם את החזקה ונקבל: $2-3^2=2-(3\cdot3)=2-9=(-7)$.
8. נשים לב שבשאלה הזו המינוס נמצא בתוך הסוגריים אבל החזקה נמצאת מחוץ לסוגריים. לכן, נפתור את החזקה על ידי הכפלה של כל מה שבתוך הסוגריים כפול עצמו ולאחר מכן נכפול פי 2. כך נקבל: $2\cdot(-3)^2=2\cdot(-3)\cdot(-3)=2\cdot(9)=18$.
9. בשאלה זו החזקה נמצאת בתוך הסוגריים והמינוס נמצא מחוץ לסוגריים. לכן נפתור קודם את החזקה. כך נקבל: $2-(3^2)=2-(3\cdot3)=2-9=(-7)$.
10. מכיוון שסוגריים קודמים לחזקה, נפתור קודם את הביטוי בתוך הסוגריים ולאחר מכן את החזקה שמחוץ לסוגריים. כך נקבל: $(2+3^2)^2=(2+3\cdot3)^2=(2+9)^2=11^2=121$.

<u>פתרונות חזקות מיוחדות</u>

1. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 1 בחזקת כל מעריך שווה ל- 1. לכן, $1^{100}=1$.
2. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 1 בחזקת כל מעריך שווה ל- 1. לכן, $1^{1}=1$.
3. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 1 בחזקת כל מעריך שווה ל- 1. לכן, $1^{0}=1$.
4. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 1 בחזקת כל מעריך שווה ל- 1. לכן, $1^{7}=1$.
5. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 0 בחזקת כל מעריך שווה ל- 0. לכן, $0^{1}=0$.
6. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 0 בחזקת כל מעריך שווה ל- 0. לכן, $0^{7}=0$.
7. על פי חוקי החזקות המיוחדות, כל בסיס בחזקת 0 שווה ל- 1. לכן, $923^{0}=1$.
8. על פי חוקי החזקות המיוחדות, בסיס 0 בחזקת כל מעריך שווה ל- 0. לכן, $0^{4}=0$.

כמו כן, על פי חוקי החזקות המיוחדות, כל בסיס בחזקת 0 שווה ל- 1. לכן, $4^{0}=1$. מכאן,

$$\frac{0^4}{4^0}=\frac{0}{1}=0.$$

<u>פתרונות חוקי חזקות א'</u>

1. זהו תרגיל כפל בין בסיסים זהים, לכן על פי חוקי החזקות עלינו לסכום את מעריכי הבסיסים. נשים לב שאת המספר 2 עלינו לכתוב בצורה $2=2^1$. כך נוכל לראות בקלות מהו מעריך החזקה ונקבל:
$$2\cdot 2^2=2^1\cdot 2^2=2^{1+2}=2^3.$$
2. זהו תרגיל חילוק עם בסיסים זהים, לכן על פי חוקי החזקות עלינו לחסר את מעריכי הבסיסים. נשים לב שאת המספר 2 עלינו לכתוב בצורה $2=2^1$. כך נוכל לראות בקלות מהו מעריך החזקה ונקבל:
$$\frac{2}{2^2}=\frac{2^1}{2^2}=2^{1-2}=2^{(-1)}.$$
3. זהו תרגיל כפל בין בסיסים זהים, לכן על פי חוקי החזקות עלינו לסכום את מעריכי הבסיסים. כך נקבל: $3^2\cdot 3^5=3^{2+5}=3^7$.
4. זהו תרגיל כפל בין בסיסים זהים, לכן על פי חוקי החזקות עלינו לסכום את מעריכי הבסיסים עם התייחסות לסימני המעריכים. כך נקבל: $3^{-2}\cdot 3^5=3^{-2+5}=3^3$.
5. זהו סכום של שני בסיסים זהים עם מעריכים שונים ולכן אין פעולה שנוכל לבצע על הביטוי על פי חוקי חזקות. דרך הפתרון היא לפתור כל חזקה לחוד ולסכום את התוצאות ($3^2+3^5=9+243=252$).
6. זהו סכום של שני בסיסים שונים עם מעריכים זהים, ולכן אין פעולה שנוכל לבצע על הביטוי על פי חוקי חזקות. דרך הפתרון היא לפתור כל חזקה לחוד ולסכום את התוצאות ($2^3+3^3=8+27=35$).

7. זהו תרגיל חלוקה של בסיסים שונים ומעריכים שונים ולכן אין פעולה שנוכל לבצע על הביטוי על פי חוקי חזקות. דרך הפתרון היא לפתור כל חזקה לחוד ולחלק את התוצאות ($\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$).

8. זהו תרגיל חלוקה של בסיסים זהים ומעריכים שונים. על פי חוקי חזקות, נחסר את המעריכים של שני הבסיסים הזהים עם תשומת לב לחיסור הגודל השלילי שהופך לחיובי ונקבל:
$\frac{2^3}{2^{(-1)}}=2^{3-(-1)}=2^{3+1}=2^4$.

9. במונה יש כפל בסיסים זהים עם מעריכים שונים. על פי חוקי החזקות עלינו לסכום את מעריכי החזקות וכך נקבל: $\frac{2^3\cdot 2^{(-2)}}{2^{(-1)}}=\frac{2^{3+(-2)}}{2^{(-1)}}=\frac{2^1}{2^{(-1)}}$. כעת יש לנו שבר אשר בסיסי המכנה והמונה שלו זהים ומעריכי החזקות שונים. על פי חוקי החזקות נחסר את מעריכי החזקות (עם תשומת לב לסימנים ולחיסור מספר שלילי שהופך לחיובי) ונקבל: $\frac{2^1}{2^{(-1)}}=2^{1-(-1)}=2^{1+1}=2^2$.

10. זוהי חלוקה של בסיסים שונים עם חזקות זהות. על פי חוקי חזקות נוכל להוציא את החזקה מחוץ לסוגריים ולאחר מכן נוכל לצמצם את השבר שנמצא בתוך הסוגריים:
$\frac{1,000^2}{500^2}\cdot 2^{-2}=\left(\frac{1,000}{500}\right)^2\cdot 2^{-2}=2^2\cdot 2^{-2}$. קיבלנו תרגיל כפל של שני בסיסים זהים בעלי מעריכים שונים. על פי חוקי החזקות – נסכום את מעריכי החזקות ונקבל: $2^{2+(-2)}=2^{2-2}=2^0=1$ (על פי חוקי החזקות, כל מספר בחזקת 0 שווה ל- 1, ולכן תוצאת הביטוי היא 1).

<u>פתרונות חוקי חזקות ב'</u>

1. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את המונה על פי חוקי חזקות "הפוכים" ולאחר מכן נוכל לצמצם כך: $\frac{2^{3+x}}{2^3}=\frac{2^3\cdot 2^x}{2^3}=2^x$.

2. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את המונה על פי חוקי חזקות "הפוכים" כך: $\frac{4^{a+b}\cdot 4^a}{4^b}=\frac{4^a\cdot 4^b\cdot 4^a}{4^b}$. כעת נוכל לצמצם את הביטוי ולאחר מכן על פי חוקי חזקות לפשט אותו כך: $\frac{4^a\cdot 4^b\cdot 4^a}{4^b}=4^a\cdot 4^a=4^{a+a}=4^{2a}$.

3. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את המונה על פי חוקי חזקות "הפוכים" ולאחר מכן נוכל לצמצם כך: $\frac{(1\cdot 2\cdot 3)^x}{2^x}=\frac{1^x\cdot 2^x\cdot 3^x}{2^x}=1^x\cdot 3^x=(1\cdot 3)^x=3^x$.

4. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את השבר על פי חוקי חזקות "הפוכים" כך: $\frac{3^a}{2^a}\cdot\frac{1}{3^a}=\left(\frac{3}{2}\right)^a\cdot\frac{1}{3^a}$. כעת נוכל לצמצם את הביטוי ולאחר מכן על פי חוקי חזקות לפשט אותו כך: $\frac{3^a}{2^a}\cdot\frac{1}{3^a}=\frac{1}{2^a}$.

5. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את השבר על פי חוקי חזקות "הפוכים" ונוכל לצמצם כך: $\left(\frac{8^{x+y}}{8^x}\right)^3=\left(\frac{8^x\cdot 8^y}{8^x}\right)^3=\left(8^y\right)^3=$.

6. כפי שהביטוי מוצג כעת לא ניתן לצמצם אותו. לכן, נפרק את השבר על פי חוקי חזקות "הפוכים" ולאחר מכן נפתח את 2^3 ל- 8 ונוכל לפשט את הביטוי כך:
$\frac{(7\cdot 8)^2}{2^3}=\frac{7^2\cdot 8^2}{2^3}=\frac{7^2\cdot 8^2}{8^1}=7^2\cdot 8^{2-1}=7^2\cdot 8^1$.

<u>**פתרונות חזקה של חזקה**</u>

1. על פי חוק חזקה של חזקה, נכפול את המעריך של החזקה בתוך הסוגריים במעריך של החזקה מחוץ לסוגריים ונקבל: $\left(x^3\right)^3=x^{3\cdot 3}=x^9$.
2. על פי חוק חזקה של חזקה, נכפול את המעריך של החזקה בתוך הסוגריים במעריך של החזקה מחוץ לסוגריים ונקבל: $\left(2^7\right)^1=2^{7\cdot 1}=2^7$.
3. לפני שנטפל בחזקה של חזקה, יש בתוך הסוגריים כפל של בסיסים זהים שנוכל לכתוב בצורה מקוצרת, מה שיקל עלינו את הפתרון: $\left(2^4\cdot 2^2\right)^3=\left(2^{4+2}\right)^3=\left(2^6\right)^3$. כעת קיבלנו תרגיל פשוט עם חזקה של חזקה שנוכל לפתור בקלות על ידי הכפלה של מעריך החזקה בתוך הסוגריים במעריך החזקה שמחוץ לסוגריים: $\left(2^6\right)^3=2^{6\cdot 3}=2^{18}$.
4. לפני שנטפל בחזקה של חזקה, יש בתוך הסוגריים חלוקה של בסיסים שונים עם מעריכים זהים שנוכל להוציא מחוץ לסוגריים, מה שיקל עלינו את הפתרון: $\left(\left(\frac{2}{8}\right)^7\right)^5=\left(\frac{2^7}{8^7}\right)^5$. קיבלנו תרגיל פשוט עם חזקה של חזקה שנוכל לפתור בקלות על ידי הכפלה של מעריך החזקה בתוך הסוגריים במעריך החזקה שמחוץ לסוגריים: $\left(\left(\frac{2}{8}\right)^7\right)^5=\left(\frac{2}{8}\right)^{7\cdot 5}=\left(\frac{2}{8}\right)^{35}=\left(\frac{1}{4}\right)^{35}$.

5. על פי חוק חזקה של חזקה, נכפול את המעריך של החזקה בתוך הסוגריים במעריך של החזקה מחוץ לסוגריים ונקבל: $\left(a^{76}\right)^0 = a^{76\cdot 0} = a^0 = 1$ (נשים לב שלאחר פישוט קיבלנו ביטוי שבסיסו a ומעריכו 0.
על פי כלל החזקה המיוחדת, כל בסיס שמעריכו הוא 0 שווה ל- 1).
6. על פי חוק חזקה של חזקה, נכפול את המעריך של החזקה בתוך הסוגריים במעריך של החזקה מחוץ לסוגריים ונקבל: $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{3}\cdot 2} = 4^{\frac{4}{3}}$.

<u>תרגול המרת בסיסים</u>

1. נוכל להפוך את 9 לביטוי עם בסיס 3 כך: $9 = 3^2$.
2. נוכל להפוך את 4^4 לביטוי עם בסיס 2 כך: $4^4 = \left(2^2\right)^4 = 2^{2\cdot 4} = 2^8$.
3. נוכל להפוך את 8^3 לביטוי עם בסיס 2 כך: $8^3 = \left(2^3\right)^3 = 2^{3\cdot 3} = 2^9$.
4. נוכל להפוך את 100^3 לביטוי עם בסיס 10 כך: $\left(10^2\right)^3 = 10^{2\cdot 3} = 10^6$.
5. נוכל להפוך את 100 לביטוי המבוטא על ידי שתי חזקות כך: $100 = 4\cdot 25 = 2^2\cdot 5^2$.
6. נוכל להפוך את 400 לביטוי המבוטא על ידי שתי חזקות כך: $400 = 4\cdot(4\cdot 25) = 16\cdot 25 = 2^4\cdot 5^2$.
7. נוכל לפשט את הביטוי $\frac{400^3}{10^2}$ בהסתמך על השאלה הקודמת כך: $400 = 2^4\cdot 5^2$ ולכן
$$\frac{400^3}{10^2} = \frac{\left(2^4\cdot 5^2\right)^3}{10^2} = \frac{2^{4\cdot 3}\cdot 5^{2\cdot 3}}{(2\cdot 5)^2} = \frac{2^{12}\cdot 5^6}{2^2\cdot 5^2} = 2^{12-2}\cdot 5^{6-2} = 2^{10}\cdot 5^4.$$
8. בשאלה זו נוכל להפוך את 27 לחזקה עם בסיס 3 ואת 9 לחזקה עם בסיס 3 וכך נוכל להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים: $\left(9^4 + 27^3\right) = \left(3^2\right)^4 + \left(3^3\right)^3 = 3^{2\cdot 4} + 3^{3\cdot 3} = 3^8 + 3^9$. מכאן נוכל לפרק את 3^9 לשתי חזקות כך: $3^8 + 3^9 = 3^8 + 3^{8+1} = 3^8 + 3^8\cdot 3^1$ ומכאן $3^8 + 3^8\cdot 3^1 = 3^8\left(1+3^1\right) = 3^8\cdot 4$
9. נוכל לפרק את 24 למכפלה של 3 ו- 8 ולאחר מכן לפתוח את הביטוי על פי חוקי חזקות ולצמצם כך:
$$\frac{3^6}{24^6} = \frac{3^6}{(3\cdot 8)^6} = \frac{3^6}{3^6\cdot 8^6} = \frac{1}{8^6}.$$
10. נוכל להפוך את 64 לחזקה עם בסיס 4 ונקבל:
$$\frac{64^{10}}{4^{12}\cdot 2^2} = \frac{\left(2^6\right)^{10}}{\left(2^2\right)^{12}\cdot 2^2} = \frac{2^{6\cdot 10}}{2^{2\cdot 12}\cdot 2^2} = \frac{2^{60}}{2^{24}\cdot 2^2} = \frac{2^{60}}{2^{24+2}} = \frac{2^{60}}{2^{26}} = 2^{60-26} = 2^{34}.$$

תרגול חזקה עם מעריך שלילי

1. לפי חוק חזקה עם מעריך שלילי, נהפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם אותו מעריך רק חיובי, כלומר: $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$.

2. לפי חוק חזקה עם מעריך שלילי, נהפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם מעריך חיובי. כלומר: $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

3. לפי חוק חזקה עם מעריך שלילי, נהפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם מעריך חיובי. כלומר: $(-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = \left(-\frac{1}{3}\right)$.

4. בתרגיל זה חשוב לשים לב שמעריך החזקה לא נמצא מחוץ לסוגריים ולכן החזקה חלה אך ורק על מונה השבר. כעת, נוכל לפתור לפי חוק חזקה עם מעריך שלילי, נהפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם מעריך חיובי ונקבל: $\frac{3^{-2}}{2} = \frac{\frac{1}{3^2}}{2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3^2 \cdot 2} = \frac{1}{9 \cdot 2} = \frac{1}{18}$.

5. בתרגיל זה חשוב לשים לב שמעריך החזקה נמצא מחוץ לסוגריים ולכן החזקה חלה גם על המונה וגם על המכנה. בכדי לפשט את הפתרון, נכניס את החזקה לתוך הסוגריים תוך שאנחנו זוכרים להחילה גם על המונה וגם על המכנה כך: $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{2^{-2}}$.

כעת נפתור בשלבים. נוכל לפתור לפי חוק חזקה עם מעריך שלילי, להפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם מעריך חיובי ונקבל: $\frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^2}{1} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$. באופן כללי, ניתן לזכור פשוט ששבר בחזקה שלילית שווה להופכי של השבר באותו מעריך, רק חיובי: $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

6. לפי חוקי החזקות המיוחדות אם בסיס החזקה הוא 1 לא משנה מה ערכו של מעריך החזקה ואם הוא חיובי או שלילי, בכל מקרה התוצאה תהיה 1. מכאן, ערכו של הביטוי הוא: $1^{-\frac{4}{5}} = 1$. אם נרצה להבין מדוע, נוכל לפתור לפי חוקי הפתרון של חזקה עם מעריך שלילי, נהפוך את הביטוי ל- 1 חלקי הבסיס של החזקה עם מעריך חיובי, כלומר: $1^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{1^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{1} = 1$.

שיעור שורשים

מבוא

נושא השורשים הוא נושא קרוב לנושא החזקות ואת שניהם למדנו בבית הספר בצורות שונות. בבחינה הפסיכומטרית קיימים תרגילים ספציפיים על נושא השורשים, אך פעמים רבות אנו נדרשים להבין את חוקי החזקות והשורשים על מנת לפתור גם שאלות בנושאים רבים אחרים. לפני שקוראים את שיעור שורשים מומלץ ביותר לקרוא את שיעור חזקות ולשנן בעל-פה את טבלת החזקות המומלצת ללימוד בעל פה.

הגדרת השורש

שורש הוא הפעולה ההפוכה לפעולת החזקה. כלומר, הוא עונה על השאלה: "איזה מספר כפול עצמו שווה למספר שמתחת לשורש".

לדוגמא: $\sqrt{9}$ (במילים - שורש של 9) משמעותו: הכפלה של איזה מספר בעצמו תביא לתוצאה 9.

התשובה היא 3, מכיוון ש- $3 \cdot 3 = 9$.

לא לכל מספר יש שורש שהוא מספר שלם. לדוגמא: $\sqrt{3} = 1.73$ בקירוב.

שורשים שכדאי לזכור

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{196} = 14$
		$\sqrt{225} = 15$

<u>סדר פעולות</u>

כללי סדר הפעולות שחלים על חזקות, כפי שפורטו בשיעור חזקות, חלים גם על שורשים.
שורש קודם לחיבור, חיסור, כפל וחילוק, אך לעומת זאת סוגריים קודמים לו.
לדוגמא: $\sqrt{9}+\sqrt{9}=3+3=6$. נפתור קודם את השורשים ורק לאחר מכן נסכום את שני האיברים.

דגש:

לא ניתן להוציא שורש "רגיל" למספר שלילי. כלומר, הביטוי $\sqrt{-9}$ אינו מוגדר בבחינה הפסיכומטרית ולכן לא יופיע.

פעולות מתחת לשורש:

כאשר יש פעולת **חיבור או חיסור** מתחת לשורש, <u>לא</u> ניתן להפריד את השורש לשני איברים. למשל: $\sqrt{9-5}$ <u>לא</u> שווה ל- $\sqrt{9}-\sqrt{5}$. במקרה כזה יש לפתור את הביטוי מתחת לשורש ורק לאחר מכן להוציא לו שורש. הפתרון הנכון הוא: $\sqrt{9-5}=\sqrt{4}$.

כאשר יש פעולת **כפל או חילוק** מתחת לשורש, <u>ניתן</u> להפריד בין האיברים ואין משמעות אם פותרים קודם את פעולת הכפל או החילוק ולאחר מכן את השורש או קודם את השורש ולאחר מכן את פעולת הכפל או החילוק.

לדוגמא: $\sqrt{3\cdot5}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ וגם $\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

<u>תרגול סדר פעולות בשורשים</u>

1. $\sqrt{16+9}=?$
2. $\sqrt{100}+\sqrt{4}=?$
3. $\sqrt{5\cdot5}=?$
4. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=?$
5. $\sqrt{25}-\sqrt{9}=?$
6. $\sqrt{36}+\sqrt{49}=?$
7. $\sqrt{\frac{81}{9}}=?$
8. $\sqrt{\frac{441}{441}}=?$

שורש מסדר גבוה

כאשר הסימן $\sqrt{\ }$ (שורש) מופיע כך, הוא מציין שורש מסדר שני, כלומר, הפעולה ההפוכה להעלאה בריבוע (חזקת 2). לעיתים ליד חלקו השמאלי העליון של השורש יופיע מספר, בצורה הזו: $\sqrt[x]{\ }$. סימן זה מציין שהשורש הוא מסדר בגובה המספר הרשום מצידו השמאלי של השורש, ומשמעותו היא הפעולה ההפוכה מהעלאה בחזקת אותו מספר.

לדוגמא: $\sqrt[3]{8}$ משמעותו שורש מסדר 3 של 8. כלומר, עלינו לעשות את הפעולה ההפוכה להעלאה בחזקת 3, או במילים אחרות, לענות על השאלה איזה מספר בחזקת 3 ייתן תוצאה השווה ל- 8, והתשובה היא 2 (זאת מכיוון ש- $2^3 = 8$).

שורשים מסדר גבוה שמומלץ לזכור

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[5]{32} = 2$

$\sqrt[6]{64} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$

$\sqrt[4]{81} = 3$

$\sqrt[4]{256} = 4$

$\sqrt[4]{625} = 5$

שורשים מיוחדים

כל שורש של 0 (לא משנה מאיזה סדר) יהיה שווה ל- 0. לדוגמא: $\sqrt[3]{0} = \sqrt[4]{0} = \sqrt[8]{0} = \sqrt[100]{0} = 0$

כל שורש של 1 (לא משנה מאיזה סדר) שווה ל- 1. לדוגמא: $\sqrt[3]{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[8]{1} = \sqrt[100]{1} = 1$

מעבר בין שורש לחזקה

על מנת להפוך שורש לחזקה, עלינו להפוך את הביטוי שבתוך השורש לבסיס החזקה ואת המעריך נבנה כך: נכתוב שבר שבמונה שלו יופיע מעריך החזקה של הביטוי שמתחת לשורש, ובמכנה השבר יופיע גובה השורש. באופן כללי: $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$.

דוגמא מספרית: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$.

דוגמא נוספת: $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{4^1} = 4^{\frac{1}{5}}$. נשים לב שבדוגמא זו 4 מופיע מתחת לשורש ללא חזקה, אך כפי שלמדנו בשיעור חזקות מספר המופיע ללא חזקה, שווה בערכו לאותו מספר בחזקת 1. לכן, המונה בשבר שנבנה כמעריך החזקה יהיה 1.

כלל: מספר שמופיע ללא חזקה שווה בערכו לאותו מספר בחזקת 1. לכן, במידה ומתחת לשורש מופיע מספר ללא חזקה, כאשר נהפוך את השורש לחזקה, מונה השבר שנמצא במעריך החזקה יהיה 1.

כלל: כאשר לא מצוין משמאלו של השורש מאיזה סדר הוא, השורש הוא מסדר 2, ולכן אם נרצה להפוך שורש מסוג זה לחזקה, המכנה של השבר במעריך החזקה יהיה 2.

לדוגמא: $\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}}$.

דוגמא נוספת: $\sqrt{8^1} = 8^{\frac{1}{2}}$.

תרגול מעבר משורש לחזקה

הפוך את השורשים הבאים לחזקות:

1. $\sqrt{3} = ?$
2. $\sqrt{1} = ?$
3. $\sqrt[3]{4} = ?$
4. $\sqrt{26^4} = ?$
5. $\sqrt[5]{8^3} = ?$
6. $\sqrt[7]{83^0} = ?$

כפל של שורש מסדר 2 בעצמו

מכפלה של שורש מסדר 2 של בסיס מסוים בשורש מסדר 2 של אותו בסיס שווה בערכה לבסיס השורש.

כלומר, $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$.

נוכל לראות את הסיבה לכך על ידי הפיכת השורש לחזקה ושימוש בחוקי החזקות:

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x^{1}=x$.

דוגמא מספרית: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2^{1}=2$

תרגול כפל שורש מסדר 2 בעצמו

1. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=?$
2. $\sqrt{97}\cdot\sqrt{97}=?$
3. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}=?$
4. $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=?$
5. $\sqrt{18ab}\cdot\sqrt{18ab}=?$
6. $\sqrt{27^{3}}\cdot\sqrt{27^{3}}=?$

כפל או חילוק של שורשים

כאשר נתון תרגיל כפל או חילוק של שורשים מסדר זהה, נוכל להכניסם מתחת לשורש אחד, לפתור את תרגיל הכפל או החילוק ולאחר מכן להוציא שורש לתוצאה.

באופן כללי: $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a\cdot b}$

דוגמא מספרית: $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}=?$

אנחנו לא יודעים מהו השורש הרביעי של 8 וגם לא מהו השורש הרביעי של 2, כי מדובר במספרים לא שלמים. אולם, אם נכניס את תרגיל הכפל מתחת לשורש נקבל תרגיל שאותו אנו יודעים לפתור:

$\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\cdot 2}=\sqrt[4]{16}=2$.

בדרך דומה: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

כדי לכפול או לחלק שורשים מסדר שונה, נהפוך את השורשים לחזקות על פי הכללים שהוסברו, ועל פי חוקי החזקות נכפול או נחלק את הביטויים.

לדוגמא: $\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=7^{\frac{5}{6}}$.

הערה : ניתן גם בכפל או בחילוק של שורשים מאותו סדר להפוך את השורשים לחזקות ולפתור כך, אך הדבר מצריך יותר זמן - וזמן הוא מצרך יקר בבחינה הפסיכומטרית.

שאלה לדוגמא

$$\sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} = ?$$

(1) $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{1}{2}$

פתרון

נוכל להפוך את השורש $\sqrt{\frac{7}{4}}$ לשבר אשר לו שורש במונה ושורש במכנה : $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$. כעת, נוכל לשים את שני השברים על אותו קו שבר ולצמצם את $\sqrt{7}$ במכנה ובמונה : $\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{1}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}}$ ולאחר צמצום : $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$. כעת נוציא שורש למונה לחוד ולמכנה לחוד ונקבל : $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

התשובה הנכונה היא (4).

שורש של שורש

כאשר נתון שורש של מספר בתוך שורש אחר, כמו לדוגמא : $\sqrt{\sqrt{16}}$, נפתור ראשית את השורש הפנימי ולאחר מכן את החיצוני : $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.
כמו כן, בדומה לחוקי החזקות, במצב בו יש שורש של שורש ניתן לכפול את גובה השורש האחד בגובה השורש השני. למשל, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{16}} = \sqrt[3\cdot5]{16} = \sqrt[15]{16}$.

הוצאת שורש ממספרים שאין להם שורש שלם

לעיתים נידרש להוציא שורש ממספר שאין לו שורש שלם. לא נוכל לחשב ללא עזרת מחשבון את ערכו המדויק של השורש, אבל במקרים מסוימים נוכל לפשט את השורש על מנת שנוכל לצמצם שבר או להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים.

את פישוט השורש נעשה על ידי פירוק מספר לגורמים שביניהם יש כפל. על פי חוקי סדר הפעולות בשורשים נוכל לפרק מכפלה מתחת לשורש לשורשים נפרדים.

לדוגמא: ל- $\sqrt{28}$ אין פתרון שהוא מספר שלם, אך אם נפרק אותו לשורש של 7 כפול 4 נקבל: $\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{7}$. במידה והביטוי היה מונה של שבר שהמכנה שלו הוא כפולה של 2, היינו יכולים לצמצם את הביטוי. לדוגמא: $\frac{\sqrt{28}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

בדרך דומה, עבור הביטוי הבא: $\frac{\sqrt{28}+8}{2}$ היינו יכולים להשתמש בפתרון שלמעלה על מנת להוציא גורם משותף 2 מהמונה ולצמצם אותו עם המכנה כך: $\frac{\sqrt{28}+8}{2}=\frac{2\sqrt{7}+2\cdot 4}{2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+4\right)}{2}=\sqrt{7}+4$.

תרגול פישוט שברים שאין להם פתרון שלם

פשט ככל הניתן את הביטויים הבאים או הוצא גורם משותף מחוץ לסוגריים במידת האפשר:

1. $\sqrt{45}=?$
2. $\frac{\sqrt{12}}{2}=?$
3. $\frac{\sqrt{54}}{6}=?$
4. $\frac{\sqrt{16}+\sqrt{32}}{2+\sqrt{8}}=?$
5. $\sqrt{72}+6=?$
6. $\frac{\sqrt{38}}{2}=?$
7. $\sqrt[3]{54}=?$
8. $\frac{\sqrt{63}-\sqrt{7}}{2}=?$

שברים של שורש במכנה

נשים לב שבחלק מן המקרים בהם יש שורש במכנה של שבר, לדוגמא : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, נהוג לעשות פעולות על השבר על מנת להעביר את השורש למונה.

הפעולות שנבצע על השבר כמובן יהיו כאלה שלא משנות את ערכו. למשל, בדוגמא הנתונה, נוכל להכפיל את השבר פי $1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. בפועל, הכפלנו את השבר פי שורש 2 וחילקנו את השבר בשורש 2. כפי שניתן לראות, כפל בגודל מסוים וחלוקה בו היא כמו כפל ב- 1 שכידוע אינה משנה את ערכו של השבר. מה השגנו בכך? נוכל לראות בדוגמא : $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

לא תמיד נצטרך לבצע פעולה זו, אך חשוב להכיר אותה מכיוון שלעיתים התשובה תופיע בצורה זו וחשוב להבין איך עוברים מהמצב הראשון למצב השני.

תרגול שברים של שורש במכנה

הפוך לשבר עם שורש במונה :

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}=?$
2. $\frac{3}{\sqrt{2}}=?$
3. $\frac{1}{\sqrt{6}}=?$
4. $\frac{7}{\sqrt{2}}=?$
5. $\frac{(3+x)}{\sqrt{y}}=?$
6. $\frac{4}{\sqrt{4+x}}=?$

<u>סיכום נוסחאות וחוקי שורשים</u>

כפל של שורשים: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a\cdot b}$ **חלוקת שורשים:** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt[x]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}$	**מעבר בין שורש לחזקה:** $\sqrt[c]{a^{b}}=a^{\frac{b}{c}}$ **כפל של שורש מסדר 2 בעצמו:** $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$

<u>לסיכום</u>

שורשים הוא נושא שמופיע בשאלות רבות במבחן הפסיכומטרי, ביניהן שאלות אלגבריות וגם שאלות בגיאומטריה. מכיוון שנושא השורשים נסמך על נושא החזקות – כדאי ללמוד היטב את נושא החזקות לפני שניגשים לנושא השורשים. חשוב לדעת את חוקי סדר פעולות עם שורשים ואת חוקי הפעולות על שורשים על מנת להימנע מטעויות חישוב.

פתרון סדר פעולות בשורשים

1. בשאלה נתון תרגיל שבו שורש שמתחתיו תרגול חיבור. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, נפתור קודם את תרגיל החיבור ולאחר מכן נוציא שורש לתוצאה: $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.
2. בשאלה נתון תרגיל המורכב מסכום של שני שורשים. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, נפתור כל שורש בנפרד ולאחר מכן נסכום את שתי התוצאות שקיבלנו: $\sqrt{100}+\sqrt{4}=10+2=12$.
3. בשאלה נתון תרגיל שבו שורש שמתחתיו תרגיל כפל. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, לא משנה אם נפתור קודם את תרגיל הכפל שמתחת לשורש ולאחר מכן נוציא שורש או להיפך. נוכל לראות שבדרך הראשונה נקבל: $\sqrt{5\cdot5}=\sqrt{25}=5$.
4. בשאלה נתון תרגיל המורכב מכפל בין שני שורשים. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, לא משנה אם נפתור קודם כל שורש בנפרד ולאחר מכן נכפול את התוצאות אחת בשניה, או שנכניס תחת שורש אחד את שני האיברים שביניהם יש כפל, נחשב את המכפלה ולאחר מכן נוציא שורש. נוכל לראות שבדרך הראשונה: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=2\cdot2=4$ ובדרך השניה: $\sqrt{4\cdot4}=\sqrt{16}=4$.
5. בשאלה נתון תרגיל המורכב מחיסור של שני שברים. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, נפתור כל אחד מהשורשים בנפרד ולאחר מכן נבצע את פעולת החיסור על התוצאות שקיבלנו: $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$.
6. בשאלה נתון תרגיל המורכב מחיבור של שני שברים. על פי כללי סדר פעולות בשורשים נפתור כל אחד מהשורשים בנפרד ולאחר מכן נבצע את פעולת החיבור על התוצאות שקיבלנו: $\sqrt{36}+\sqrt{49}=6+7=13$.
7. בשאלה נתון תרגיל חילוק המוצג כשבר בתוך שורש. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, לא משנה אם נפתור קודם את תרגיל החילוק ולאחר מכן נוציא שורש למנה, או אם נוציא שורש בנפרד למונה ובנפרד למכנה ולאחר מכן נפתור את תרגיל החילוק. בדרך הראשונה נקבל: $\sqrt{\frac{81}{9}}=\sqrt{9}=3$ ובדרך השניה נקבל: $\sqrt{\frac{81}{9}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$. התוצאה זהה.
8. גם בשאלה זו, כמו בתרגיל הקודם, נתון תרגיל חילוק המוצג כשבר בתוך שורש. על פי כללי סדר פעולות בשורשים, לא משנה אם נפתור קודם את תרגיל החילוק ולאחר מכן נוציא שורש למנה או אם נוציא שורש בנפרד למונה ובנפרד למכנה ולאחר מכן נפתור את תרגיל החילוק. אולם, נשים לב שבשאלה זו יש דרך אחת מאוד פשוטה (הדרך הראשונה) ודרך אחרת יותר מסובכת שכנראה תגזול מאיתנו זמן בבחינה. בדרך הראשונה נוכל לצמצם את השבר ונקבל: $\sqrt{\frac{441}{441}}=\sqrt{1}=1$.

פתרונות מעבר משורש לחזקה

1. מכיוון שלא מצוין מאיזה סדר השורש, מדובר בשורש מסדר 2. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא ללא חזקה, נחשיב אותו כחזקה שמעריכה 1. מכאן, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל: $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$.
2. מכיוון שלא מצוין מאיזה סדר השורש, מדובר בשורש מסדר 2. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא ללא חזקה, נחשיב אותו כחזקה שמעריכה 1. מכאן, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל: $\sqrt{1}=1^{\frac{1}{2}}$.
3. מדובר בשורש מסדר 3. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא ללא חזקה, נחשיב אותו כחזקה שמעריכה 1. מכאן, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל: $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$.
4. מכיוון שלא מצוין מאיזה סדר השורש, מדובר בשורש מסדר 2. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא חזקה שבסיסה 26 והמעריך שלה הוא 4, נעשה את המעבר משורש לחזקה ולאחר מכן נוכל לצמצם את מעריך החזקה. כך, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל: $\sqrt{26^4}=26^{\frac{4}{2}}=26^{\frac{2}{1}}=26^2$.
5. מדובר בשורש מסדר 5. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא חזקה שמעריכה 3, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל: $\sqrt[5]{8^3}=8^{\frac{3}{5}}$.
6. מדובר בשורש מסדר 7. מכיוון שהמספר שמתחת לשורש הוא חזקה שמעריכה 0, על פי חוקי מעבר משורש לחזקה נקבל ביטוי שנוכל לצמצם בו את המעריך: $\sqrt[7]{83^0}=83^{\frac{0}{7}}=83^0=1$ (לפי חוקי החזקות כל מספר בחזקת 0 שווה ל- 1).

פתרונות כפל שורש מסדר 2 בעצמו

1. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר כלשהו בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=4$. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}=4^{\frac{1}{2}}\cdot4^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=4^1=4$.
2. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר כלשהו בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{97}\cdot\sqrt{97}=97$. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{97}\cdot\sqrt{97}=97^{\frac{1}{2}}\cdot97^{\frac{1}{2}}=97^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=97^1=97$.
3. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר כלשהו בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}=8$. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}=8^{\frac{1}{2}}\cdot8^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=8^1=8$.

4. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר כלשהו בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y$. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=y^{1}=y$.

5. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר מסוים בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{18ab}\cdot\sqrt{18ab}=18ab$. אין משמעות לכך שהביטוי מתחת לשורש מורכב יחסית ומכיל מספר ושני משתנים. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{18ab}\cdot\sqrt{18ab}=(18ab)^{\frac{1}{2}}\cdot(18ab)^{\frac{1}{2}}=(18ab)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=(18ab)^{1}=18ab$.

6. על פי הכלל, כפל של שורש מסדר 2 של מספר מסוים בעצמו נותן תוצאה השווה בערכה למספר שמתחת לשורש. כלומר: $\sqrt{27^3}\cdot\sqrt{27^3}=27^3$. אם נהפוך את השורשים בביטוי הנתון לחזקות נוכל לראות על פי חוקי חזקות מדוע זו התוצאה: $\sqrt{27^3}\cdot\sqrt{27^3}=27^{\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{3}{2}}=27^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=27^{\frac{6}{2}}=27^{3}$.

<u>פתרון פישוט שברים שאין להם פתרון שלם</u>

1. מכיוון של- 45 אין שורש שלם, נבדוק האם אפשר לפרקו לכפל של שני גורמים מתחת לשורש וכך לפשט אותו: $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$. מכיוון שלמספר 9 יש שורש שלם נוכל לפשט את הביטוי על ידי הוצאת שורש רק ל- 9: $\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\cdot\sqrt{5}$.

2. מכיוון של- 12 אין שורש שלם, נבדוק אם אפשר לפרקו לכפל של שני גורמים מתחת לשורש וכך לפשט אותו: $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}$. מכיוון שלמספר 4 יש שורש שלם, נוכל לפשט את הביטוי על ידי הוצאת שורש ל- 4: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$. כעת נחזור לביטוי המקורי ונוכל לצמצמו: $\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. תרגיל זה מדגים את החשיבות של הוצאת שורש גם משורש שאינו שלם. הדבר יכול לסייע לנו בצמצום ביטוי כפי שראינו בשאלה זו.

3. מכיוון של- 54 אין שורש שלם, נבדוק אם אפשר לפרקו לכפל של שני גורמים מתחת לשורש וכך לפשט אותו. כך נקבל: $\sqrt{54}=\sqrt{9\cdot6}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}$. מכיוון שלמספר 9 יש שורש שלם, נוכל לפשט את הביטוי על ידי הוצאת שורש ל- 9 כך: $\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}=3\cdot\sqrt{6}$. כעת נחזור לביטוי המקורי ונוכל לצמצמו כך: $\frac{\sqrt{54}}{6}=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. במבט ראשון הביטוי $\frac{\sqrt{16}+\sqrt{32}}{2+\sqrt{8}}$ נראה מאוד מורכב. מכל השורשים המופיעים בביטוי רק ל- 16 יש שורש שלם. ננסה לפרק את 8 ו- 32 לכפל של מספרים שלחלק מהם יש שורש שלם:

$\sqrt{32}=\sqrt{4\cdot 8}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{8}$ וגם $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$. כעת נוכל לכתוב את הביטוי כולו בצורה כזו: $\frac{4+2\cdot\sqrt{8}}{2+2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{16}+\sqrt{32}}{2+\sqrt{8}}$. חישבנו כי $\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}$ ולכן:

$\frac{4+2\cdot\sqrt{8}}{2+2\cdot\sqrt{2}}=\frac{4+2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{4+4\cdot\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$. נוציא גורמים מחוץ לסוגריים ונצמצם:

$\frac{4+4\cdot\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{2}=2$.

5. את $\sqrt{72}$ ניתן לפרק ל- $\sqrt{36\cdot 2}$. מכאן: $\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. כעת נוכל להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים: $6\sqrt{2}+6=6\left(\sqrt{2}+1\right)$.

6. לא נוכל להוציא שורש שלם ל- 38 אבל נוכל לפרק אותו לכפל בין מספרים:

$\frac{\sqrt{38}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 19}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{19}}{2}$. כמו כן, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ ולכן נוכל לכתוב את השבר כך:

$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{19}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{19}}{2}$. כעת נוכל לצמצם ב- $\sqrt{2}$ ונקבל: $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$. כמובן שעל פי חוקי השורשים ניתן לכתוב את השבר גם באופן הבא: $\sqrt{\frac{19}{2}}$.

7. ל- 54 אין שורש שלם מסדר 3. בדיוק כמו שורש מסדר 2, נוכל לפרק את המספרים מתחת לשורש מסדר 3 לכפל בין מספרים שלהם יש שורש שלם מסדר 3. כך נקבל:

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=3\cdot\sqrt[3]{2}$.

8. לא נוכל להוציא שורש שלם ל- 63 אבל נוכל לפרק אותו לכפל בין מספרים שביניהם מספר שנוכל להוציא לו שורש שלם. נקבל: $\sqrt{63}=\sqrt{9\cdot 7}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}$. כעת נחזור לביטוי המקורי ונראה שאנו יכולים להוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים: $\frac{\sqrt{63}-\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{9}-1\right)}{2}$. מכיוון של- 9 יש שורש שלם נוכל לפשט את הביטוי כך: $\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{9}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{7}(3-1)}{2}=\frac{\sqrt{7}\cdot 2}{2}=\sqrt{7}$.

פתרונות שברים של שורש במכנה

1. נכפול את השבר הנתון בשורש 5 ונחלק בשורש 5. כך נקבל: $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.
2. נכפול את השבר הנתון פי שורש 2 ונחלק בשורש 2. כך נקבל: $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.
3. נכפול את השבר הנתון פי שורש 6 ונחלק בשורש 6. כך נקבל: $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1\cdot\sqrt{6}}{6}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.
4. נכפול את השבר הנתון פי שורש 2 ונחלק בשורש 2. כך נקבל: $\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.
5. נכפול את השבר הנתון פי שורש y ונחלק בשורש y. כך נקבל: $\frac{(3+x)}{\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{y}\cdot(3+x)}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{y}\cdot(3+x)}{y}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.
6. נכפול את השבר הנתון פי שורש $(4+x)$ ונחלק בשורש $(4+x)$. כך נקבל: $\frac{4}{\sqrt{4+x}}=\frac{4\cdot\sqrt{4+x}}{\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{4+x}}=\frac{4\cdot\sqrt{4+x}}{4+x}$. נשים לב שבמכנה אנו משתמשים בכלל של כפל שורש של מספר בעצמו.