שיעור שברים פשוטים

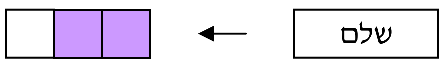
מבוא

שברים פשוטים הם בסיס לפתרון שאלות רבות בבחינה. נושאים כמו משוואות בנעלם אחד, שתי משוואות בשני נעלמים, בעיות יחס, אי שוויונים, חזקות, שורשים ונושאים רבים אחרים דורשים בבסיסם ידע בשברים פשוטים ופעולות בשברים. על כן, מומלץ לדעת נושא זה היטב.

הגדרה

שבר מוגדר כחלוקה של שני מספרים.

חלקו העליון של השבר נקרא "מונה" וחלקו התחתון של השבר נקרא "מכנה". לדוגמא: השבר $\frac{2}{3}$ הוא חלוקה של המספר 2 במספר 3, המונה של השבר הוא 2 והמכנה הוא 3.
משמעות השבר היא חלוקת שלם כלשהו למספר החלקים הנמצא במכנה, ובחירת חלקים מתוכם לפי המספר שנמצא במונה. לדוגמא, בשבר $\frac{2}{3}$, ניקח שלם כלשהו, נחלקו ל- 3 חלקים, ומתוכו נבחר 2 חלקים.



סוגי שברים

1. כאשר המונה קטן מהמכנה, כמו בשבר $\frac{2}{3}$, השבר קטן מ- 1. הסיבה לכך היא שאנחנו בוחרים מספר חלקים הקטן ממספר החלקים הכולל שמרכיב את השלם. כלומר, ערכו של השבר קטן מהשלם.
2. כאשר המונה גדול מהמכנה, כמו בשבר $\frac{3}{2}$, השבר גדול מ- 1. שבר כזה נקרא "שבר מדומה". הסיבה לכך היא שאנחנו בוחרים מספר חלקים הגדול ממספר החלקים הכולל שמרכיב את השלם. כלומר, ערכו של השבר גדול מהשלם עצמו. חלק מהשברים המדומים יכולים לבטא שלם שגדול מ- 1. לדוגמא: בשבר $\frac{6}{3}$ למשל, נחלק את 6 ב- 3, ונקבל 2.

3. שבר המורכב ממספר שלם בתוספת שבר הקטן מ-1 נקרא "שבר מעורב". דוגמא לשבר כזה היא: $4\frac{2}{3}$. צורת כתיבה זו זהה לביטוי: $4+\frac{2}{3}$.

4. נציין שכל מספר שלם יכול להיות מוצג כשבר על ידי חלוקתו ב- 1.

לדוגמא: המספר 2 יכול להיות מוצג כשבר כך: $2=\frac{2}{1}$. הסיבה היא שכל מספר שנחלקו ב- 1 נותן תוצאה הזהה למספר עצמו. הדבר ישמש אותנו בהמשך בנושא חלוקת שברים.

<u>שאלה לדוגמא</u>

איזה מבין השברים הבאים הוא הגדול ביותר?

(1) $\frac{1009}{1008}$

(2) $\frac{4}{6}$

(3) $\frac{54}{201}$

(4) $\frac{10}{11}$

<u>פתרון</u>

שאלה זו נראית מורכבת במבט ראשון, אך אם נתעמק בתשובות נוכל לראות שבתשובות (2), (3) ו-(4) המכנה גדול מהמונה, כלומר ערך השבר קטן מ- 1. בתשובה מספר (1), המונה גדול מהמכנה ולכן ערך השבר גדול מ- 1. מכאן, ערכו של השבר בתשובה (1) גדול מערכם של שלושת השברים האחרים.

התשובה הנכונה היא (1).

שברים חיוביים ושליליים

שבר מורכב מחלוקה של מספר במספר אחר, ועל כן חלים עליו חוקי החילוק. מכאן:

אם נחלק מספר שלילי במספר חיובי, נקבל מספר שלילי. לדוגמא: $(-3)\div 2=\frac{-3}{2}$ הוא שבר שלילי.

אם נחלק מספר חיובי במספר שלילי, נקבל מספר שלילי. לדוגמא: $2\div(-3)=\frac{2}{-3}$ הוא שבר שלילי.

אם נחלק מספר חיובי במספר חיובי, נקבל מספר חיובי. לדוגמא: $2\div 3=\frac{2}{3}$ הוא שבר חיובי.

אם נחלק מספר שלילי במספר שלילי, נקבל מספר חיובי. לדוגמא: $(-2)\div(-3)=\frac{-2}{-3}$ הוא שבר חיובי.

במידה ואחד המספרים בשבר הוא שלילי, ניתן "להוציא" את המינוס מתוך השבר ולכתוב אותו לפני השבר בצורה כזאת: $\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}$.

כתיבה בצורה כזאת יכולה לפשט תרגילי חיבור וחיסור בהם נדון בהמשך השיעור.

צמצום והרחבת שברים

"צמצום שבר" היא פעולה בה מחלקים את מונה השבר וגם את מכנה השבר במספר זהה. ניתן לעשות זאת בתנאי שגם המכנה וגם המונה מתחלקים ללא שארית באותו מספר.

לדוגמא: את השבר $\frac{4}{6}$ ניתן לצמצם על ידי חלוקה ב- 2 של המכנה וגם של המונה. מכיוון ש- $4\div 2=2$ ו- $6\div 2=3$ נקבל את השבר: $\frac{2}{3}$. כלומר ערכו של השבר $\frac{4}{6}$ שווה לערכו של השבר $\frac{2}{3}$.

"הרחבת שבר" היא פעולה שבה כופלים את מונה השבר <u>וגם</u> את מכנה השבר במספר <u>זהה</u>. לדוגמא:

את השבר $\frac{3}{5}$ ניתן להרחיב על ידי הכפלה פי 3 של המכנה וגם של המונה. $3\cdot3=9$ ו- $5\cdot3=15$,

וכך נקבל: $\frac{9}{15}$. כלומר ערכו של השבר $\frac{3}{5}$ שווה לערכו של השבר $\frac{9}{15}$.

כלל: כל שבר שווה בערכו לכל השברים שנוצרו מצמצומו או הרחבתו.

שבר שבו המכנה והמונה שווים זה לזה, ניתן לצמצם במספר המופיע במכנה ובמונה ולקבל 1.

מכאן, כל שבר שבו המונה והמכנה שווים זה לזה שווה בערכו ל- 1.

לדוגמא: $1=\frac{1}{1}=\frac{1003}{1003}=\frac{17}{17}=\frac{5}{5}$.

כלל: ערכו של כל שבר שבו המונה שווה למכנה הוא 1.

<u>תרגול צמצום והרחבה</u>

1. הרחב את השבר $\frac{5}{12}$ פי 3.
2. צמצם את השבר $\frac{2}{8}$ ב- 2.
3. הרחב את השבר $\frac{13}{12}$ פי 4.
4. צמצם את השבר $\frac{17}{17}$ פי 17.
5. הרחב את השבר $\frac{13}{18}$ פי 10 ולאחר מכן צמצם את התוצאה פי 2.

<u>שאלה לדוגמא</u>

איזה מבין השברים הבאים <u>אינו</u> שווה ל- $\frac{6}{8}$?

(1) $\frac{3}{4}$

(2) $\frac{12}{16}$

(3) $\frac{16}{18}$

(4) $\frac{60}{80}$

<u>פתרון</u>

נבדוק כל אחת מהתשובות בנפרד, ונחפש איזו תשובה <u>אינה</u> שווה לשבר $\frac{6}{8}$.

בתשובה מספר (1), נוכל לראות שעל ידי הרחבת השבר $\frac{3}{4}$ פי 2 נקבל $\frac{6}{8}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}$.

בתשובה מספר (2), נוכל לראות שעל ידי צמצום השבר $\frac{12}{16}$ ב- 2 נקבל $\frac{6}{8}$.

בתשובה מספר (4), נוכל לראות שעל ידי צמצום השבר $\frac{60}{80}$ ב- 10 נקבל $\frac{6}{8}$.

בתשובה מספר (3), ניתן לצמצם או להרחיב את השבר $\frac{16}{18}$ אך הוא אינו שווה לשבר $\frac{6}{8}$.

חשוב לשים לב שבשבר $\frac{16}{18}$ <u>הוספנו</u> 10 למכנה של השבר $\frac{6}{8}$ ו- 10 למונה, אך אין הדבר נחשב להרחבת השבר $\frac{6}{8}$.

התשובה הנכונה היא (3).

כלל: הרחבה או צמצום שברים מוגדרת אך ורק ככפל או חילוק המכנה והמונה באותו גודל.

כלל: לא ניתן לצמצם או להרחיב שבר על ידי חלוקה או כפל ב- 0.

כלל: מכנה של שבר לא יהיה שווה ל- 0 כיוון שלא ניתן לחלק מספר ב- 0.
תוצאת שבר כזה אינה מוגדרת.

חיבור וחיסור שברים

חיבור וחיסור שברים ניתן לבצע רק כאשר המכנים של השברים שאנו מחברים או מחסרים שווים זה לזה. במידה והם אינם שווים, עלינו לבצע צמצום או הרחבה על מנת להביא את כל השברים להיות בעלי מכנה זהה.
כאשר המכנה זהה, פעולת החיבור או החיסור מתבצעת על המונים של השברים והמכנה נשאר זהה גם בתוצאה: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ וגם $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

דוגמא מספרית של חיבור שברים בעלי מכנים זהים: $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}$.

דוגמא מספרית של חיסור שברים בעלי מכנים זהים: $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$.

דוגמא מספרית של חיבור שברים בעלי מכנים שונים: $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$. לא נוכל לחבר את השברים בצורתם הנוכחית. עלינו להרחיב את השבר $\frac{2}{3}$ על מנת שהמכנה שלו יהיה שווה ל- 9. מכיוון שכעת מופיע במכנה המספר 3, נרחיב פי 3 את המכנה והמונה ונקבל: $\frac{6}{9}=\frac{2\cdot3}{3\cdot3}$. כעת נקבל תרגיל שבו המכנה זהה בשני השברים: $\frac{6}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6+4}{9}=\frac{10}{9}$.

<u>מכנה משותף</u>

ראינו כעת שבכדי לחבר ולחסר שברים, עלינו לדאוג ששני השברים שברצוננו לחבר או לחסר יהיה אותו מכנה. ברגע שהמכנה של שני השברים זהה, נוכל לשים את המונים על אותו קו שבר כפי שראינו בדוגמא המספרית לחיבור שברים בעלי מכנים שווים.

על מנת להגיע למכנה משותף, עלינו להרחיב או לצמצם לפחות את אחד מהשברים.

לדוגמא: $1=\frac{4}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{2}$. בדוגמא זאת, הרחבנו את $\frac{1}{2}$ פי 2 בכדי שמכנה השבר יהיה 4 – כמו בשבר השני.

בחלק מן המקרים נצטרך לצמצם או להרחיב את שני השברים.

לדוגמא: $?=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$. במקרה זה, לא נוכל להרחיב את $\frac{1}{3}$ על מנת שהמכנה שלו יהיה 4 וגם לא נוכל לצמצם את $\frac{1}{4}$ על מנת שבמכנה שלו יהיה 3. במקרה זה, נצטרך לעשות מכנה משותף על ידי הרחבת שני השברים, כאשר המכנה המשותף יהיה מספר שיתחלק בכל אחד מהמכנים המקוריים ללא שארית. לדוגמא: את $\frac{1}{3}$ נרחיב פי 4 ואת $\frac{1}{4}$ נרחיב פי 3. כך נקבל:

$$\frac{7}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}.$$

בדוגמא זו, המכנה המשותף נוצר על ידי הכפלת המכנה של שבר אחד במכנה של השבר השני - $3\cdot 4=12$. זו הדרך הפשוטה ביותר ליצור מכנה משותף, בעיקר כאשר מדובר במספרים קטנים.

לעיתים נוכל למצוא מכנה משותף קטן יותר מאשר המכפלה של מכנה אחד במכנה השני.

לדוגמא: $?=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$. נוכל ליצור מכנה משותף מכפל של 6 ב- 9 וכך נקבל מכנה 54, אבל, נוכל גם ליצור מכנה משותף קטן יותר. לדוגמא: אם נרחיב את $\frac{1}{6}$ פי 3 ואת $\frac{1}{9}$ פי 2 נקבל:

$$\frac{5}{18}=\frac{3+2}{18}=\frac{2}{18}+\frac{3}{18}=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}.$$

כדאי לשים לב אם קופץ לנו לראש מספר הקטן ממכפלת שני המכנים זה בזה – בדרך זו נוכל להרחיב את השברים במספרים קטנים יותר ולא נסתבך עם חישובים מורכבים. במידה ולא קופץ לנו לראש מספר שכזה – חבל לבזבז זמן על בדיקות מיותרות ונוכל כן לכפול את המכנים זה בזה על מנת ליצור מכנה משותף.

באופן כללי, בבחינה הפסיכומטרית בדרך כלל לא יינתנו מספרים גדולים שמצריכים חישובים מסובכים שלא ניתן לבצע בקלות ללא מחשבון.

טיפ: חשוב לשים לב ולא להתבלבל - כאשר <u>המונים</u> זהים ולא המכנים, <u>לא</u> ניתן לבצע פעולת חיבור וחיסור על המכנים.

<u>תרגול חיבור וחיסור שברים</u>

1. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=?$
2. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=?$
3. $\frac{2}{4}+\frac{7}{2}=?$
4. $\frac{9}{6}-\frac{2}{3}=?$
5. $\frac{4}{12}+\frac{5}{8}=?$

<u>שאלה לדוגמא</u>

$$\frac{1}{5}+\frac{7}{10}-\frac{3}{20}=?$$

(1) $\frac{3}{4}$

(2) $\frac{15}{18}$

(3) $\frac{17}{20}$

(4) $\frac{12}{4}$

פתרון

על מנת לפתור את התרגיל, עלינו להביא את כל השברים למצב בו הם בעלי מכנה משותף. נבחר במכנה המשותף 20 כיוון שאת השברים $\frac{3}{20}$ ו- $\frac{7}{10}$ לא ניתן לצמצם. מכאן, נרחיב את השבר $\frac{1}{5}$ פי 4 ונקבל $\frac{4}{20}$. נרחיב את השבר $\frac{7}{10}$ פי 2 ונקבל: $\frac{14}{20}$. כעת נקבל תרגיל שאותו אנו יודעים לפתור:

$$\frac{4}{20}+\frac{14}{20}-\frac{3}{20}=\frac{4+14-3}{20}=\frac{15}{20}.$$

השבר $\frac{15}{20}$ אינו מופיע בתשובות בצורה כזו, אלא בצורתו המצומצמת. אם נחלק את המונה ואת המכנה ב- 5 נקבל $\frac{3}{4}$ וזוהי התשובה הנכונה. גם בבחינה, ברוב המקרים שברים יופיעו בתשובות בצורתם המצומצמת.

התשובה הנכונה היא (1).

כפל שברים

כפל של שברים ניתן לבצע על כל שני שברים בכל מצב <u>ואין צורך במכנה משותף בין השברים</u>.
בכפל בין שני שברים כופלים בנפרד את המונים ובנפרד את המכנים.

המכפלה תהיה תוצאת הכפל בין המונים חלקי תוצאת הכפל בין המכנים, כלומר: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

לדוגמא: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{4}{15}$.

מכיוון שאין משמעות לסדר שבו כופלים את האיברים, ניתן לשים את כל השברים על קו שבר אחד כאשר מכפלת המונים מעל קו השבר ומכפלת המכנים מתחת לקו השבר.

במצב זה, ניתן לצמצם איברים במונה עם איברים מהמכנה. לדוגמא: במכפלה $\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}$ נוכל לצמצם את 3 במכנה עם 3 במונה וכך לקבל: $\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{5}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

כמו כן, ניתן לצמצם גם מספרים שאינם זהים, כל עוד ניתן לחלקם באותו מספר. למשל, במכפלה $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}$ ניתן לצמצם את 6 ו- 3 ב- 3 ולקבל: $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$.

כאשר כופלים שבר במספר שלם, מכיוון שמספר שלם שווה לאותו מספר חלקי 1, נכפול את המספר השלם במונה של השבר, ונשאיר את המכנה כמו שהוא. למשל, במכפלה $\frac{4}{3}\cdot 5$ את המספר 5 ניתן לכתוב גם כך: $\frac{5}{1}$ ואז המכפלה שווה ל- $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{20}{3}$. מכיוון שבמכנה יש מכפלה ב- 1 הוא לא משתנה ולכן היינו יכולים פשוט לכפול את המונה במספר השלם: $\frac{4}{3}\cdot 5=\frac{20}{3}$. כמובן שבמקרים המתאימים ניתן לצמצם את המספר השלם במכנה השבר, זאת מכיוון שהמספר השלם מהווה מונה כאשר מחלקים אותו ב- 1.

לדוגמא: במכפלה $\frac{4}{3}\cdot 9$ נוכל לצמצם את 9 ואת 3 ב- 3 ולקבל: $\frac{4}{3}\cdot 9=\frac{4}{1}\cdot 3=12$. אם היינו פותרים תרגיל זה בדרך הארוכה היינו מקבלים תוצאה זהה: $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{1}=\frac{36}{3}=12$.

<u>תרגול כפל שברים</u>

1. $\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{5}=?$
2. $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=?$
3. $\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{5}=?$
4. $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}=?$
5. $\frac{2}{6}\cdot 3=?$
6. $\frac{4}{5}\cdot\frac{(-7)}{2}=?$

<u>שאלה לדוגמא</u>

$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}=?$

(1) $\frac{3}{21}$

(2) $\frac{8}{84}$

(3) $\frac{5}{42}$

(4) $\frac{10}{80}$

<u>פתרון</u>

בשאלה נתונה מכפלה של שלושה שברים. נכפול ראשית את המונים זה בזה: $5\cdot1\cdot2=10$.
כעת נכפול את המכנים זה בזה ונקבל: $2\cdot7\cdot6=84$. מכאן, תוצאת המכפלה היא: $\frac{10}{84}$. נראה שבתשובות הנתונות לא מופיעה תשובה כזו. הסיבה היא שאת השבר $\frac{10}{84}$ ניתן לצמצם. נחלק את המונה ואת המכנה ב- 2 ונקבל: $\frac{5}{42}$. דרך נוספת לפתרון היא לצמצם ב- 2 את המכפלה בתרגיל המקורי ולאחר מכן לפתור: $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{42}$.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>חלוקת שברים</u>

חלוקת שבר בשבר אחר נפתור על ידי כפל של השבר שבמונה **במספר ההופכי** של השבר שבמכנה:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

שימו לב, את המספר ההופכי קיבלנו ע"י החלפת המיקום של המכנה והמונה. כלומר, המונה הפך להיות המכנה והמכנה הפך להיות המונה.

לדוגמא: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=?$. נהפוך את תרגיל החלוקה למכפלה ע"י כפל בהופכי של השבר המופיע במכנה:

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$. מכיוון שמכפלת שברים אנו כבר יודעים לפתור, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

טיפ: במידה ואנו מחלקים שלם בשבר (לדוגמא: $\frac{3}{\frac{7}{9}}$) או שבר בשלם (לדוגמא: $\frac{\frac{7}{9}}{3}$) נתייחס לשלם

כמו שבר המחולק ב- 1. כלומר $\frac{3}{1}=3$, ובמקרה זה, $\frac{\frac{3}{1}}{\frac{7}{9}}=\frac{3}{\frac{7}{9}}$, ו- $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{3}{1}}=\frac{\frac{7}{9}}{3}$.

<u>תרגול חלוקת שברים</u>

1. $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}=?$

2. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{6}}=?$

3. $\frac{\frac{1}{100}}{\frac{10}{1{,}000}}=?$

4. $\frac{6}{\frac{7}{12}}=?$

<u>שאלה לדוגמא</u>

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}}=?$$

(1) $\frac{6}{2}$

(2) 2

(3) $\frac{2}{4}$

(4) $\frac{8}{18}$

<u>פתרון</u>

ראשית, עלינו להגיע למכנה משותף בחלקו העליון של השבר הכללי. כך נוכל לבצע את פעולת החיבור ולפשט את הביטוי. נוכל לצמצם את השבר $\frac{4}{6}$ ל- $\frac{2}{3}$ וכך נקבל שהמונה של השבר הכללי הוא $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$. כעת נוכל לפתור בקלות את התרגיל: $\frac{1}{\frac{1}{2}}=1\cdot\frac{2}{1}=2$.

התשובה הנכונה היא (2).

שבר עשרוני

צורת הכתיבה של שבר עשרוני נעשית כאשר משמאל לנקודה העשרונית נרשם חלקו השלם של המספר, ומצידה הימני נרשם חלקו הלא- שלם של המספר. לדוגמא: 1.2 או 6.8.
כאשר מופיעה ספרה בודדת מימין לנקודה, החלק ה"לא שלם" של השבר העשרוני המופיע מימין לנקודה מסמן עשיריות. כלומר, על מנת להפוך את החלק הלא שלם של המספר לשבר פשוט, עלינו לחלקו ב- 10. זאת הסיבה לשמו של השבר העשרוני. כאשר מופיע מספר דו-ספרתי מימין לנקודה, מספר זה מסמן מאיות, כאשר מופיע מספר תלת-ספרתי מימין לנקודה הוא מסמן אלפיות, וכן הלאה.

לדוגמא: המשמעות של 1.3 קילוגרם היא שיש קילוגרם אחד שלם ועוד $\frac{3}{10}$ קילוגרמים.

מומלץ לזכור בעל פה מעברים מסוימים משבר עשרוני לשבר רגיל ולהיפך, משום שבבחינה הפסיכומטרית יש לעיתים שאלות המצריכות שימוש בידע זה.

שברים עשרוניים שמומלץ לזכור

$\frac{1}{2}=0.5$ $\quad \frac{1}{4}=0.25$ $\quad \frac{1}{8}=0.125$ $\quad \frac{1}{10}=0.1$

$\frac{1}{3}=0.333...$ $\quad \frac{1}{5}=0.2$ $\quad \frac{1}{9}=0.111...$

כלל: כאשר אנו כופלים שבר עשרוני ב- 10, "נזיז" את הנקודה מקום אחד ימינה.
לדוגמא: $0.45\cdot 10=4.5$.

כלל: כאשר אנו מחלקים שבר עשרוני ב- 10, "נזיז" את הנקודה מקום אחד שמאלה.
לדוגמא: $\frac{5.23}{10}=0.523$.

<u>תרגול שברים עשרוניים</u>

1. $\frac{3.23}{10}=?$
2. $\frac{340.34}{10}=?$
3. $2.1\cdot 10=?$
4. $84.22\cdot 10=?$

<u>שאלה לדוגמא</u>

$?=\frac{1.11}{10}$ (סמן את התשובה הקרובה ביותר)

(1) 1.1
(2) 9
(3) $\frac{1}{9}$
(4) 0.9

<u>פתרון</u>

נפתור את השאלה בשני שלבים. בשלב ראשון, נבין שמשמעות השבר היא חלוקה של 1.11 ב- 10. על פי הכלל, בחלוקה ב- 10 של שבר עשרוני "נזיז" את הנקודה מקום אחד שמאלה, ונקבל שערכו של השבר שווה ל- $0.111=\frac{1.11}{10}$. כפי שלמדנו קודם, ערכו של השבר העשרוני 0.111 שווה בקירוב ל- $\frac{1}{9}$.

התשובה הנכונה היא (3).

פירוק שברים מדומים

שברים מדומים הם למעשה חלוקה של מספר במספר הקטן ממנו. מכאן, לעיתים התוצאה יכולה להיות מספר שלם כמו לדוגמא: $\frac{10}{2}=5$, פשוט נחלק 10 ב- 2 ונקבל 5,

אך התוצאה יכולה להיות גם מספר שלם עם שארית. לדוגמא: $\frac{17}{3}$ - במקרה זה, נמצא מהו המספר הכי קרוב ל- 17 מלמטה שמתחלק ב- 3 ללא שארית, שהוא 15. 15 חלקי 3 שווה ל- 5. נוכל לפרק את השבר ולכתוב אותו כך: $5\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{15}{3}=\frac{17}{3}$.

תרגול שברים מדומים

הצג את השברים המדומים הבאים בצורה של שברים מעורבים או מספרים שלמים:

1. $\frac{14}{3}=?$
2. $\frac{100}{5}=?$
3. $\frac{23}{7}=?$
4. $\frac{16}{9}=?$
5. $\frac{47}{6}=?$
6. $\frac{14}{2}=?$

השוואת שברים

לעיתים נדרש במבחן (בעיקר בשאלות מסוג השוואה כמותית) להשוות בין שברים ולהחליט מי מהם גדול או קטן יותר. על מנת להשוות בין שברים, קיימים מספר כללים שכדאי לזכור.
נניח שחילקנו שלם למספר חלקים (זהו המספר שמופיע במכנה). ברור, שככל שנבחר יותר חלקים מתוכם, נקבל שבר בעל ערך גדול יותר.
כלל: כאשר המכנה זהה והמונה שונה, השבר שבו המונה גדול יותר הוא השבר הגדול יותר.
לדוגמא: $\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$, או $\frac{300}{10,000}>\frac{99}{10,000}$.

שבר שהמונה שלו שווה ל- 1, הוא חלק אחד המתקבל מחלוקה של שלם למספר החלקים הרשום במכנה.

$\frac{1}{3}$ הוא חלק אחד מחלוקה של שלם ל- 3 חלקים, $\frac{1}{4}$ הוא חלק אחד מחלוקה של שלם ל- 4 חלקים וכן הלאה.

מכאן, ככל שנחלק שלם למספר חלקים גדול יותר (כלומר, ככל שהמכנה גדל), כך ערכו של השבר קטן.

לדוגמא: $\frac{1}{4} < \frac{1}{6}$, או $\frac{1}{299} < \frac{1}{300}$. מכיוון שמדובר באי שוויון, גם אם נכפיל את שני צידי אי השוויון במספר כלשהו, אי השוויון יישמר. לכן, גם אם לשני השברים שאנו משווים ביניהם יש את אותו מונה וערכו אינו שווה לאחד, נוכל לדעת איזה שבר גדול יותר מהסתכלות במכנה.

כלל: כאשר המונה זהה והמכנה שונה, השבר שבו המכנה גדול יותר הוא השבר הקטן יותר.

כאשר אנו נדרשים להשוות בין שברים בעלי מכנים ומונים שונים, עלינו להרחיב או לצמצם לפחות אחד מהשברים על מנת שיהיה שוויון בין המונים או בין המכנים של שני השברים, וכך נוכל להשתמש בכללים שהוסברו זה עתה.

<u>שאלה לדוגמא</u>

איזה מהשברים הבאים הוא הגדול ביותר?

(1) $\frac{99}{100}$

(2) $\frac{49}{50}$

(3) $\frac{24}{25}$

(4) $\frac{4}{5}$

<u>פתרון</u>

על מנת להשוות בין השברים, נצטרך להביא את כל השברים למצב שבו המכנים של כל השברים זהים או המונים של כל השברים זהים. נשים לב שנוכל לכפול כל אחד מהמכנים בתשובות (2), (3) ו- (4) במספר שלם וכך להגיע ל- 100. נרחיב את השבר בתשובה (2) פי 2: $\frac{98}{100}=\frac{49\cdot 2}{50\cdot 2}$, נרחיב את השבר בתשובה (3) פי 4: $\frac{96}{100}=\frac{24\cdot 4}{25\cdot 4}$ ונרחיב את השבר בתשובה (4) פי 20: $\frac{80}{100}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 20}$. כעת נוכל להשוות בין כל השברים על פי הכלל לפיו כאשר המכנה זהה, השבר הגדול ביותר הוא השבר בעל המונה הגדול ביותר: $\frac{99}{100}>\frac{98}{100}>\frac{96}{100}>\frac{80}{100}$.

התשובה הנכונה היא (1).

משאלה זו, נוכל ללמוד שכאשר נתונים שני שברים אשר בשניהם המונה קטן בדיוק ב- 1 מהמכנה, השבר בעל המונה והמכנה הקטנים יותר יהיה בעל ערך קטן יותר. לדוגמא: $\frac{45}{46}>\frac{6}{7}>\frac{4}{5}$ וכן הלאה.

כלל: כאשר נתונים שני שברים אשר המונה בשניהם קטן בדיוק ב- 1 מהמכנה, השבר בעל המונה והמכנה הקטנים יותר הוא בעל הערך הקטן יותר.

השוואת שברים שליליים

כאשר נדרש מאיתנו להשוות בין שני שברים שליליים, עלינו לזכור שהשבר הקרוב יותר לאפס הוא השבר הגדול יותר. כך קורה שבזמן שמתקיים $\frac{3}{4}>\frac{2}{4}$, כאשר שני השברים הם בעלי סימן שלילי מתקיים $\left(-\frac{3}{4}\right)<\left(-\frac{2}{4}\right)$.

אם השאלה איזה מהשברים קרוב יותר ל- 0 מבלבלת מדי, ניתן לחשב איזה מהשברים <u>קטן</u> יותר כאשר שני השברים <u>בסימן חיובי</u> והוא יהיה השבר <u>הגדול</u> יותר כאשר שניהם <u>בסימן שלילי</u>, ולהיפך.

שאלות מילוליות

בבחינה הפסיכומטרית יש לעיתים שאלות שתוכנן הוא מילולי אך כדי לפתור אותן עלינו להופכן לשאלות מספריות. גם שאלות בשברים פשוטים יכולות להופיע כשאלה מילולית.

שאלה לדוגמא

בעוגת שוקולד אחת יש שליש כוס סוכר. בעוגת תפוחים אחת יש רבע כוס סוכר.
כמה כוסות סוכר צריך על מנת לאפות 2 עוגות שוקולד ו- 3 עוגות תפוחים?

(1) $\frac{14}{12}$

(2) $\frac{7}{12}$

(3) 5

(4) $\frac{17}{12}$

פתרון

נוכל להפוך שאלה זו בקלות לביטוי בשברים פשוטים. ראשית, נכפול את כמות עוגות השוקולד בכמות כוסות הסוכר הדרושה עבור כל עוגת שוקולד: 2 עוגות שוקולד כפול שליש כוס: $2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
כעת, נכפול את כמות עוגות התפוחים בכמות כוסות הסוכר הדרושה עבור כל עוגת תפוחים: 3 עוגות כפול רבע כוס סוכר: $3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. נחבר את שני השברים שקיבלנו וכך נקבל את סך כוסות הסוכר הדרושות: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. נגדיר מכנה משותף 12 ונפתור את התרגיל:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}.$$

התשובה הנכונה היא (4).

לסיכום

שברים פשוטים ופעולות בשברים פשוטים הם הבסיס לאלגברה ולשאלות רבות מאוד בחלק הכמותי בבחינה הפסיכומטרית. יש לדעת נושא זה בצורה טובה על מנת לפתור כמות גדולה של שאלות בצורה נכונה ולחסוך בזמן. בנוסף, מומלץ ללמוד בעל פה את המעבר משברים עשרוניים לשברים פשוטים, וזאת גם כדי לחסוך בזמן וגם מכיוון שיותר פשוט לבצע פעולות בשברים פשוטים מאשר בשברים עשרוניים.

פתרונות לתרגול צמצום והרחבה

1. נכפול את מונה השבר ב- 3 ונקבל: $5\cdot 3=15$. נכפול את מכנה השבר ב- 3 ונקבל: $12\cdot 3=36$.
   בסך הכל לאחר הרחבת השבר נקבל: $\frac{5}{12}=\frac{15}{36}$.
2. נחלק את מונה השבר ב- 2 ונקבל: $2\div 2=1$. נחלק את מכנה השבר ב- 2 ונקבל: $8\div 2=4$.
   בסך הכל לאחר צמצום השבר נקבל: $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
3. נכפול את מונה השבר ב- 4 ונקבל: $13\cdot 4=52$. נכפול את מכנה השבר ב- 4 ונקבל: $12\cdot 4=48$.
   בסך הכל לאחר הרחבת השבר נקבל: $\frac{13}{12}=\frac{52}{48}$.
4. נחלק את מונה השבר ב- 17 ונקבל: $17\div 17=1$. נחלק את מכנה השבר ב- 17 ונקבל: $17\div 17=1$. בסך הכל לאחר צמצום השבר נקבל: $\frac{17}{17}=\frac{1}{1}=1$.
5. ראשית, נכפול את מונה השבר ב- 10 ונקבל: $13\cdot 10=130$. נכפול את מכנה השבר ב- 10 ונקבל: $18\cdot 10=180$. בסך הכל לאחר הרחבת השבר נקבל: $\frac{13}{18}=\frac{130}{180}$. כעת, נצמצם את השבר שקיבלנו, ונחלק גם את המכנה וגם את המונה ב- 2. כך נקבל: $\frac{130}{180}=\frac{130\div 2}{180\div 2}=\frac{65}{90}$.

פתרונות לתרגול חיבור וחיסור שברים

1. נתון לנו תרגיל חיבור שברים שבו המכנה זהה בשני השברים ולכן נוכל לסכום את המונים של השברים: $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$.
2. נתון לנו תרגיל חיסור שברים שבו המכנה זהה בשני השברים ולכן נוכל לחסר בין המונים של השברים: $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}$.
3. נתון לנו תרגיל חיבור שברים שבו המכנים שונים. לכן, עלינו לצמצם את השבר הראשון או להרחיב את השבר השני על מנת להגיע למצב שבו לשני השברים מכנה זהה. על ידי צמצום השבר הראשון נקבל: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. כעת קיבלנו תרגיל חיבור שברים פשוט בו נחבר את המונים ונקבל: $\frac{2}{4}+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$.
4. נתון לנו תרגיל חיסור שברים שבו המכנים שונים. לכן, עלינו לצמצם את השבר הראשון או להרחיב את השבר השני על מנת להגיע למצב שבו לשני השברים מכנה זהה. על ידי הרחבת השבר השני פי 2 נקבל: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. כעת קיבלנו תרגיל חיסור שברים פשוט בו נחסר את המונים ונקבל: $\frac{9}{6}-\frac{2}{3}=\frac{9}{6}-\frac{4}{6}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$.
5. נתון לנו תרגיל חיבור שברים שבו המכנים שונים. מכיוון שלא ניתן להרחיב או לצמצם שבר אחד וכך לקבל מכנים זהים, עלינו להרחיב את שני השברים. את השבר הראשון נרחיב פי 2 ונקבל: $\frac{4}{12}=\frac{8}{24}$. את השבר השני נרחיב פי 3 ונקבל: $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$. כעת קיבלנו תרגיל חיבור שברים פשוט בו נחבר את המונים ונקבל: $\frac{4}{12}+\frac{5}{8}=\frac{8}{24}+\frac{15}{24}=\frac{8+15}{24}=\frac{23}{24}$.

פתרונות לתרגול כפל שברים

1. נכפול לחוד את המכנים ואת המונים ונקבל: $\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{8\cdot7}{3\cdot5}=\frac{56}{15}$.

2. נוכל לצמצם את 2 ו- 4 ולקבל: $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot2}{4\cdot3}=\frac{1\cdot1}{2\cdot3}=\frac{1}{6}$.

3. נוכל לראות כי את השבר $\frac{3}{12}$ ניתן לצמצם ב- 3 ולקבל $\frac{1}{4}$. כעת יותר פשוט לבצע את פעולת הכפל: $\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20}$. כעת ניתן לראות כי נוכל לצמצם את השבר ב- 2 ונקבל: $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

4. נכפול לחוד את המכנים ואת המונים ונקבל: $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}=\frac{1\cdot7}{3\cdot9}=\frac{7}{27}$.

5. בשאלה זו נתון תרגיל כפל של שבר במספר שלם. מספר שלם נוכל להציג כשבר על ידי חלוקה של המספר ב- 1. כלומר: $3=\frac{3}{1}$. כעת נכפול לחוד את המכנים ואת המונים ונקבל: $\frac{2}{6}\cdot3=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2\cdot3}{6\cdot1}=\frac{6}{6}$. כעת נוכל לצמצם את השבר ולחלק את המונה ואת המכנה כל אחד ב- 6. נקבל: $1=\frac{1}{1}=\frac{6}{6}$.

למעשה היינו יכולים מראש לצמצם את 3 ואת 6 ב- 3 ולקבל $\frac{2}{6}\cdot3=\frac{2}{2}\cdot1=1$.

6. בשאלה זו נתון תרגיל כפל של שבר חיובי ושבר שהמונה שלו שלילי. נכפול לחוד את המכנים ואת המונים ונשים לב לסימנים. כך נקבל: $\frac{4}{5}\cdot\frac{(-7)}{2}=\frac{4\cdot(-7)}{5\cdot2}=\frac{(-28)}{10}$. כעת נוכל לצמצם את השבר ולחלק את המונה ואת המכנה כל אחד ב- 2: $\frac{(-28)}{10}=\frac{(-14)}{5}$.

היינו יכולים כמובן גם לצמצם את 4 ואת 2 מלכתחילה ולקבל: $\frac{4}{5}\cdot\frac{(-7)}{2}=\frac{2\cdot(-7)}{5\cdot1}=\frac{(-14)}{5}$.

<u>פתרונות לתרגול חלוקת שברים</u>

1. על פי כללי חלוקת שבר בשבר, נכפול את השבר הנמצא במונה של השבר הראשי במספר ההופכי של השבר הנמצא במכנה של השבר הראשי. כך נקבל תרגיל כפל שברים שאותו אנו יודעים לפתור בקלות: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{15}{8}$.

2. על פי כללי חלוקת שבר בשבר, נכפול את השבר הנמצא במונה של השבר הראשי במספר ההופכי של השבר הנמצא במכנה של השבר הראשי. כך נקבל תרגיל כפל שברים שאותו אנו יודעים לפתור בקלות: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{4}=\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

3. על פי כללי חלוקת שבר בשבר, נכפול את השבר הנמצא במונה של השבר הראשי במספר ההופכי של השבר הנמצא במכנה של השבר הראשי. כך נקבל תרגיל כפל שברים שאותו אנו יודעים לפתור בקלות: $\frac{\frac{1}{100}}{\frac{10}{1,000}}=\frac{1}{100}\cdot\frac{1,000}{10}=\frac{1\cdot 1,000}{100\cdot 10}=\frac{1,000}{1,000}$. כעת נוכל לצמצם את התוצאה שקיבלנו ב- 1,000 ונקבל: $\frac{1,000}{1,000}=1$.

4. כדי לפתור את התרגיל נהפוך את 12 לשבר על ידי חלוקה ב-1 כך נקבל: $\frac{\frac{6}{7}}{12}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{12}{1}}$. כעת נוכל לפתור על פי כללי חלוקת שבר בשבר. נכפול את השבר הנמצא במונה של השבר הראשי במספר ההופכי של השבר הנמצא במכנה של השבר הראשי. כך נקבל תרגיל כפל שברים שאותו אנו יודעים לפתור בקלות: $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{12}{1}}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{12}=\frac{6\cdot 1}{7\cdot 12}=\frac{1\cdot 1}{7\cdot 2}=\frac{1}{14}$.

<u>פתרונות לתרגול שברים עשרוניים</u>

1. על פי הכלל, בחלוקה ב- 10 של שבר עשרוני נזיז את הנקודה מקום אחד שמאלה. כלומר:
$\frac{3.23}{10}=0.323$.

2. על פי הכלל, בחלוקה ב- 10 של שבר עשרוני נזיז את הנקודה מקום אחד שמאלה. כלומר:
$\frac{340.34}{10}=34.034$.

3. על פי הכלל, בכפל ב- 10 של שבר עשרוני נזיז את הנקודה מקום אחד ימינה. כלומר:
$2.1\cdot 10=21.0$.

4. על פי הכלל, בכפל ב- 10 של שבר עשרוני נזיז את הנקודה מקום אחד ימינה. כלומר:
$84.22\cdot 10=842.2$.

<u>פתרונות שברים מדומים</u>

1. 14 אינו מתחלק ללא שארית ב- 3. המספר הקרוב ביותר מלמטה ל- 14 המתחלק ללא שארית ב- 3 הוא 12. לכן, נפרק את השבר כך: $\frac{14}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

2. 100 מתחלק ללא שארית ב- 5: $\frac{100}{5}=20$.

3. 23 אינו מתחלק ללא שארית ב- 7. המספר הקרוב ביותר מלמטה ל- 23 המתחלק ללא שארית ב- 7 הוא 21. לכן, נפרק את השבר כך: $\frac{23}{7}=\frac{21}{7}+\frac{2}{7}=3+\frac{2}{7}=3\frac{2}{7}$.

4. 16 אינו מתחלק ללא שארית ב- 9. המספר הקרוב ביותר מלמטה ל- 16 המתחלק ללא שארית ב- 9 הוא 9. לכן, נפרק את השבר כך: $\frac{16}{9}=\frac{9}{9}+\frac{7}{9}=1+\frac{7}{9}=1\frac{7}{9}$.

5. 47 אינו מתחלק ללא שארית ב- 6. המספר הקרוב ביותר מלמטה ל- 47 המתחלק ללא שארית ב- 6 הוא 42. לכן, נפרק את השבר כך: $\frac{47}{6}=\frac{42}{6}+\frac{5}{6}=7+\frac{5}{6}=7\frac{5}{6}$.

6. 14 מתחלק לא שארית ב- 2: $\frac{14}{2}=7$.