גיאומטריה

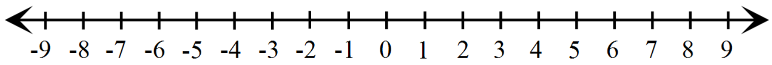
אנליטית

גאומטריה אנליטית

נושא זה עוסק במערכת הצירים ובמציאת נקודות ואורכי קטעים על פיה.
שאלות מסוימות יכולות לערב צורות גיאומטריות מסוימות ולכן חשוב לשלוט בחוקי הגיאומטריה, כפי שהם מופיעים בדף הנוסחאות ובשיעורים, בטרם ניגש לנושא זה.

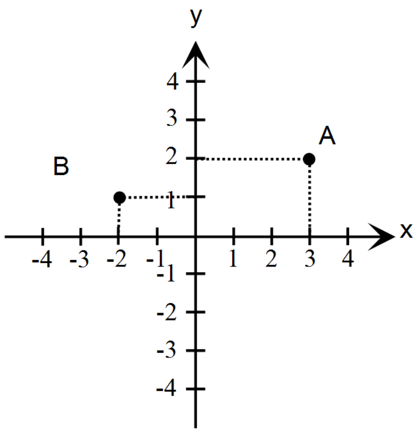
מושגים בגאומטריה אנליטית:

ציר המספרים: ציר המספרים הינו ישר המשמש להצגה גאומטרית של יחסים בין מספרים.
המספרים על ציר המספרים גדלים ככל שמתקדמים ימינה. המרחק בין מספר למספר זהה.



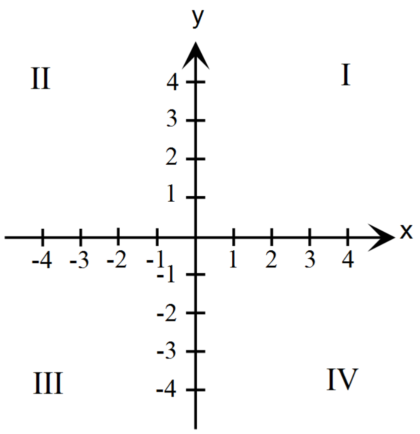
המרחק בין הנקודות על ציר המספרים שווה ל**ערכו המוחלט** של ההפרש בין הערכים המספריים המתאימים לנקודות.
למשל, המרחק בין הנקודות (-1) ו-(-5) הוא: $-1-(-5)=-1+5=4$.
במידה והיינו מחסרים את (-1) מ-(-5) היינו מקבלים תוצאה שלילית: $-5-(-1)=-5+1=-4$
במצב כזה (תוצאה שלילית) נבצע ערך מוחלט: $|-4|=4$ ונקבל תוצאה זהה.

מערכת צירים קרטזית: במערכת צירים קרטזית ישנם שני צירי מספרים מאונכים זה לזה.
הציר האופקי נקרא ציר ה-x והציר האנכי נקרא ציר ה-y.
בציר ה-x המספרים גדלים ככל שמתקדמים ימינה ובציר ה-y המספרים גדלים ככל שמתקדמים מעלה.
לכל נקודה במישור אפשר להתאים זוג ערכים x ו-y המתארים את מקומה ביחס לצירים.



למשל, בסרטוט שלפניכם ערך ה-x של הנקודה A הוא 3 וערך ה-y שלה הוא 2.
ערך ה-x של הנקודה B הוא (-2), וערך ה-y שלה הוא 1.
מקובל לסמן את ערכי הנקודות בתוך סוגריים כשערך ה-x משמאל לערך ה-y, כך: (x,y). לעיתים מסמנים את ערכי הנקודה בצמוד לאות המייצגת אותה, למשל בסרטוט שלפנינו שתי נקודות:
$A(3,2)$ ו-$B(-2,1)$.
ערכי הנקודה (x,y) נקראים גם **שיעורי הנקודה.**

ראשית הצירים: היא נקודת מפגש הצירים- הנקודה ששיעוריה הם $(0,0)$.

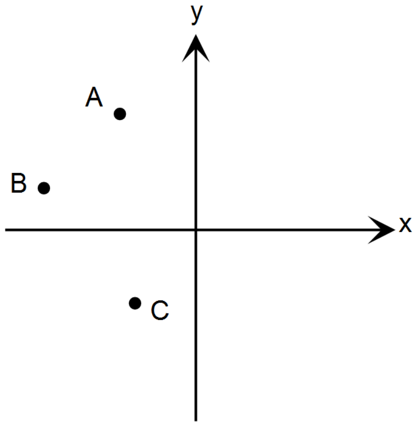


רביעים: הצירים מחלקים את המישור לארבעה רביעים, ובדרך כלל הם מסומנים בספרות הרומיות:
I- ברביע זה נקודות ששיעורי ה-x ושיעורי ה-y שלהם חיוביים.
II- ברביע זה נקודות ששיעורי ה-x שלהם שליליים ושיעורי ה-y שלהם חיוביים.
III- ברביע זה נקודות ששיעורי ה-x ושיעורי ה-y שלהם שליליים.
IV- ברביע זה נקודות ששיעורי ה-x שלהם חיוביים ושיעורי ה-y שלהם שליליים.

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם מערכת צירים ובה שלושה מקדקודי מרובע.

שיעורי הקדקוד הרביעי (שאינו מופיע במערכת הצירים) הם $(2,0)$.



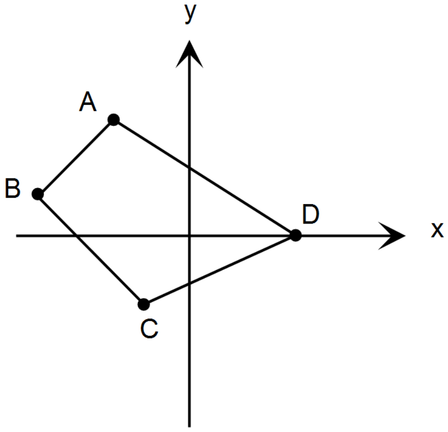
כמה מצלעות המרובע נמצאות בשלמותן באחד הרביעים?

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 0



פתרון : שיעורי קדקוד המרובע הרביעי הם $(2,0)$.

ערך ה- x של הקדקוד חיובי וערך ה- y שלו הוא 0 . מכך שהקדקוד נמצא על ציר ה- x מימין לציר ה- y . נסמן את קדקוד המרובע הרביעי ב- D (ראה סרטוט).

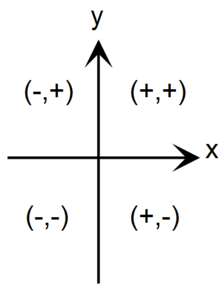
על מנת שצלע מרובע תהה כולה באחד הרביעים על שני הקדקודים שהיא מחברת להיות באותו רביע.

נבדוק כמה זוגות של קדקודים סמוכים הנמצאים באותו רביע יש במרובע ונגלה כי ישנו זוג אחד כזה.

הקדקודים A ו- B נמצאים שניהם ברביע השני ומכך (כפי שניתן לראות בסרטוט) שהצלע AB נמצאת כולה ברביע זה.

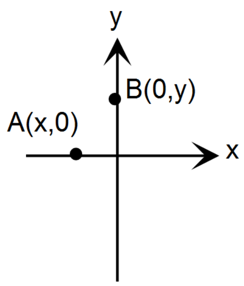
התשובה הנכונה היא (1).

משאלה זו עולים מספר כללים:



כלל: חלקו החיובי של ציר ה- x נמצא מימין לציר ה- y וחלקו השלילי נמצא משמאל לציר ה- y .

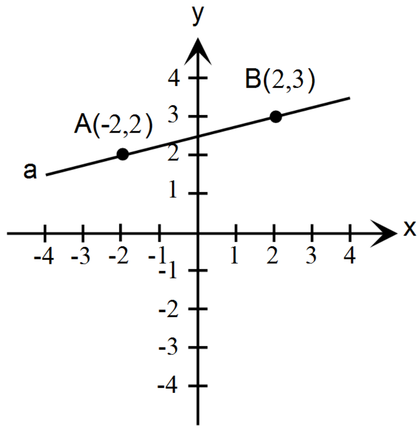
כלל: חלקו החיובי של ציר ה- y נמצא מעל לציר ה- x וחלקו השלילי נמצא מתחת לציר ה- x .



כלל: ערך ה- y של נקודה הנמצאת על ציר ה- x הוא 0 (לדוגמה הנקודה A בסרטוט).

כלל: ערך ה- x של נקודה הנמצאת על ציר ה- y הוא 0 (לדוגמה הנקודה B בסרטוט).

ישרים וקטעים



על ישר מספר אין סופי של נקודות.

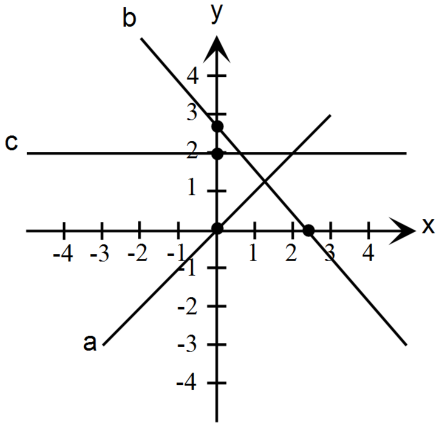
דרך כל שתי נקודות במישור עובר ישר אחד בלבד.

חלק של ישר התחום בשתי נקודות נקרא קטע.

לדוגמה: בסרטוט שלפניכם ישר a ועליו הנקודות A ו- B.

AB הוא קטע.

סוגי ישרים נפוצים

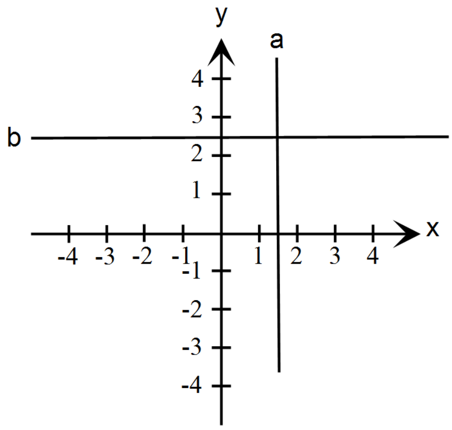


1. ישר שאינו מקביל לאחד הצירים העובר בראשית הצירים - ישר זה חותך את שני הצירים באותה הנקודה $(0,0)$. **לדוגמה:** הישר a בסרטוט שלפניכם.

2. ישר שאינו מקביל לאחד הצירים ואינו עובר בראשית הצירים- ישר זה חותך כל אחד מהצירים בנקודה שונה. **לדוגמה: הישר** b בסרטוט שלפניכם.

3. ישר המקביל לאחד הצירים- ישר כזה חותך רק את אחד הצירים (את הציר שהוא אינו מקביל לו) **לדוגמה:** בסרטוט שלפניכם הישר c מקביל לציר ה- x.

ישרים מקבילים לצירים



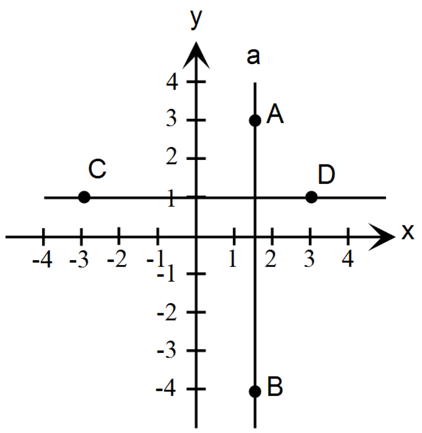
כלל: לכל הנקודות על ישר המקביל לציר ה- x יש ערך y זהה.

כלל: לכל הנקודות על ישר המקביל לציר ה- y יש ערך x זהה.

למשל, בסרטוט שלפניכם הישר a מקביל לציר ה- y ולכן לכל הנקודות הנמצאות על ישר זה ערך x זהה (במקרה זה ערך ה- x הוא $1\frac{1}{2}$).

הישר b מקביל לציר ה- x ולכן לכל הנקודות הנמצאות על ישר זה ערך y זהה (במקרה זה ערך ה- y הוא $2\frac{1}{2}$).

אורך קטע המקביל לאחד הצירים



אם הקטע מקביל לציר ה- y, אורכו הוא ההפרש (בערך מוחלט) בין ערכי ה- y של הנקודות. למשל בסרטוט הישר a, ועליו הקטע AB, מקביל לציר ה- y.

ערך ה- y של הנקודה A הוא 3 וערך ה- y של הנקודה B הוא -4.

ההפרש בין ערכי ה- y הוא: $3-(-4)=7$. לכן, אורך הקטע AB הוא 7.

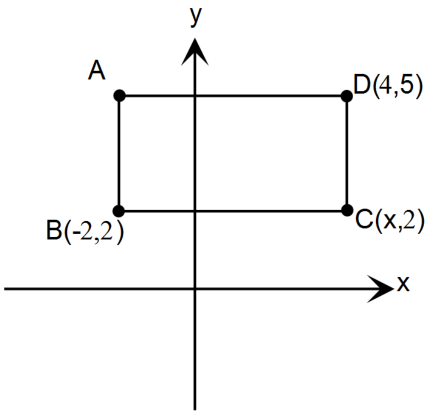
באופן דומה נחשב את אורך הקטע CD המקביל לציר ה- x:

ערך ה- x של הנקודה C הוא -3 וערך ה- x של הנקודה D הוא 3.

לכן, אורך הקטע CD הוא $3-(-3)=6$.

שאלה לדוגמה

במערכת הצירים שלפניכם מלבן ABCD.

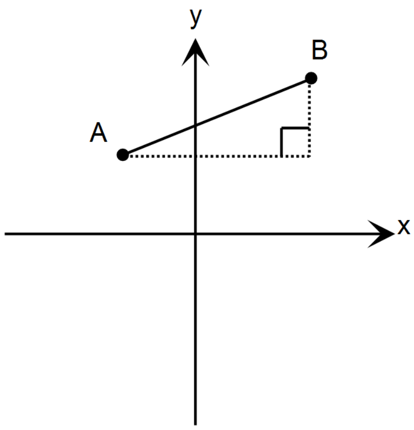


לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה היקף המלבן ABCD?

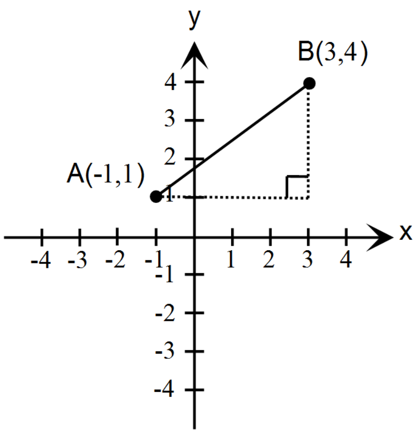
(1) 16
(2) 24
(3) 18
(4) 12

פתרון: לנקודות B ו- C ערך y זהה ומכך שהישר BC מקביל לציר ה- x.
במלבן שתי צלעות סמוכות מאונכות זו לזו. מכך, שהצלע DC מאונכת לצלע BC ולכן מקבילה לציר ה- y.
הנקודות C ו- D נמצאות על הישר CD המקביל לציר ה- y. מכך שערך ה- x שלהם זהה. ערכי הנקודה C הם (4,2).
כעת, נחשב את אורכי צלעות המלבן ונוכל לחשב את היקפו.
אורך הצלע BC המקבילה לציר ה- x הוא הפרש ערכי ה- x של הנקודות B ו- C. נחשב את אורכה:
$4-(-2)=4+2=6$.
אורך הצלע CD המקבילה לציר ה- y הוא הפרש ערכי ה- y של הנקודות C ו- D. נחשב את אורכה:
$5-2=3$.
היקף מלבן הוא פעמיים אורך צלעו ועוד פעמיים אורך צלעו הסמוכה:
$$2\cdot 6+2\cdot 3=12+6=18$$
התשובה הנכונה היא (3).

אורך קטע שאינו מקביל לאחד הצירים



על מנת לחשב אורך של קטע שאינו מקביל לאחד הצירים נשתמש במשפט פיתגורס:
נסרטט משולש ישר זווית שבו הקטע שאת אורכו אנו מעוניינים למצוא הוא היתר
וכל אחד מהניצבים מקביל לאחד הצירים (ראה סרטוט).
אורכו של הניצב המקביל לציר ה- x שווה להפרש בין ערכי ה- x של קצוות הקטע.
אורכו של הניצב המקביל לציר ה- y שווה להפרש בין ערכי ה- y של קצוות הקטע.
לאחר שנדע את אורכי הניצבים, נחשב את היתר בעזרת משפט פיתגורס.



לדוגמה: בסרטוט שלפניכם הקטע AB שאינו מקביל לאחד הצירים.
נבנה משולש ישר זווית (ראה סרטוט).
אורך הניצב המקביל לציר ה- x הוא:

$x(B) - x(A)$, נציב:

$$3-(-1)=4$$

אורך הניצב המקביל לציר ה- y הוא:

$y(B) - y(A)$, נציב:

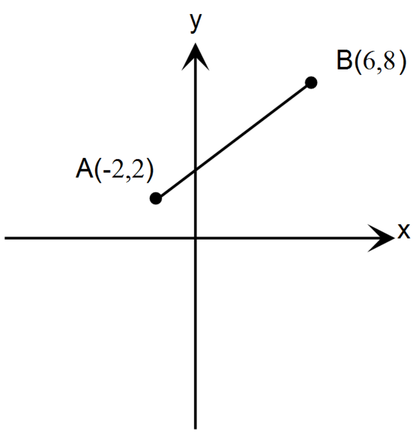
$$4-1=3$$

על פי משפט פיתגורס:

$$AB^2 = 3^3 + 4^2$$

$AB^2 = 9 + 16$ נבצע פעולת שורש:

$$AB = 5$$



קיימת נוסחה לחישוב אורך קטע שאינו מקביל לאחד הצירים.
נוסחה זו מסתמכת גם היא על משפט פיתגורס, והיא:

$$\text{אורך} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

x_1 ו- y_1 מייצגים את ערכי אחד מקצוות הקטע ו- x_2 ו- y_2 מייצגים את ערכי
הקצה השני של הקטע. למשל, בסרטוט שלפניכם אורך הקטע AB הוא:

$$\text{אורך} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (8-2)^2}$$

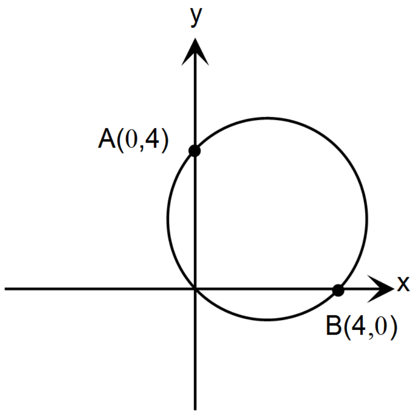
$$\text{אורך} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$$

$$\text{אורך} = \sqrt{64 + 36}$$

$$\text{אורך} = \sqrt{100} = 10$$

שאלה לדוגמה

בסרטוט שלפניכם מעגל החותך מערכת צירים בראשית הצירים ובנקודות A ו- B.



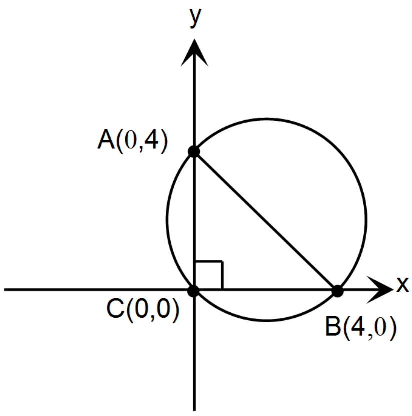
לפי הנתונים האלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך רדיוס המעגל?

(1) 4
(2) 2
(3) $2\sqrt{2}$
(4) לא ניתן לדעת

פתרון: נסמן את ראשית הצירים באות C.

ציר ה- x וציר ה- y מאונכים זה לזה, מכך שהזווית ההיקפית ACB היא זווית ישרה.

זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר- מכך שמחיבור הנקודות A ו- B נקבל קוטר.



נחשב את אורך AB : במקרה זה אין לנו צורך לבנות משולש ישר זווית ש- AB הוא היתר בו מכיוון שכבר קיים אחד כזה בסרטוט, המשולש ABC .

תחילה נחשב את אורכי הניצבים במשולש :

AC נמצא על ציר ה- y ולכן אורכו הוא הפרש ערכי ה- y של הנקודות A ו- C :

$4-0=4$

BC נמצא על ציר ה- x ולכן אורכו הוא הפרש ערכי ה- x של הנקודות C ו- B :

$4-0=4$.

כעת נמצא את אורך יתר המשולש AB :

נשים לב כי זהו משולש ישר זווית ושווה שוקיים (הניצבים שווים זה לזה). מכך, שאורך היתר הוא $\sqrt{2}$ כפול אורך הניצב.

$$AB=\sqrt{2}\cdot AC$$

$$AB=4\sqrt{2}$$

*שימו לב- במידה ולא שמנו לב כי זהו משולש ישר זווית ושווה שוקיים נמצא את אורך היתר בעזרת משפט פיתגורס - כמובן שנגיע לאותה תוצאה.

אנו נשאלים על אורך הרדיוס, שהוא כידוע מחצית מאורך הקוטר. נחלק את אורך הקוטר שמצאנו ב- 2 : $\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

התשובה הנכונה היא (3).

<u>סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!</u>