# אלגברה

## נוסחאות כפל מקוצר

# נוסחאות הכפל המקוצר

## מבוא

כידוע, כאשר אנו כופלים ביטויים הנמצאים בסוגריים זה בזה, עלינו לכפול כל איבר בביטוי הראשון בכל אחד מהאיברים שבביטוי השני, ולבסוף לסכום את המכפלות.

**לדוגמה:** $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot b+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$.

כדי להימנע מתהליך ארוך זה, נוכל להשתמש בנוסחאות הכפל המקוצר.
נוסחאות הכפל המקוצר הן שלוש נוסחאות המאפשרות לפתוח סוגריים עם חזקה (או לכנס איברים) בזריזות, וכך לקצר את תהליך פתיחת הסוגריים.

נוסחאות הכפל המקוצר הן:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

## כיצד נוצרו נוסחאות אלה?

ניתן לפתוח את הסוגריים של הנוסחאות, באותו אופן שמבצעים כפל בין ביטויים הנמצאים בתוך סוגריים.

א. לפי חוקי החזקות, $(a+b)^2$ הוא למעשה הביטוי $(a+b)\cdot(a+b)$.
על ידי כפל של האיברים משמאל לימין מתקבל הביטוי $a^2+ab+ab+b^2$.
נכנס את האיברים ונקבל $a^2+2ab+b^2$.
לכן: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

ב. לפי חוקי החזקות, $(a-b)^2$ הוא למעשה הביטוי $(a-b)\cdot(a-b)$.
על ידי כפל של האיברים משמאל לימין מתקבל הביטוי $a^2-ab-ab+b^2$.
נכנס את האיברים ונקבל $a^2-2ab+b^2$.
לכן: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

ג. את הביטוי $(a+b)\cdot(a-b)$ ניתן לפתוח על ידי מכפלת איברי הביטויים משמאל לימין, ממנה נקבל את הביטוי $a^2-ab+ab-b^2$.
נכנס את האיברים ונקבל $a^2-b^2$.
לכן: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

**זיהוי ופיתוח נוסחת הכפל המקוצר**

כאשר נזהה נוסחת כפל מקוצר מכונסת בסוגריים, נוכל לפשט אותה לצורך פתרון התרגיל.

**שאלה לדוגמה – פיתוח נוסחה**

$\sqrt{40}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=?$

**(1)** $7$

**(2)** $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

**(3)** $\sqrt{40}+3$

**(4)** $4$

**פתרון:**

נפתח את הסוגריים של $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ באמצעות נוסחת הכפל המקוצר $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, ונקבל: $\sqrt{5}^2-2\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}^2$

לפי חוקי החזקות $\sqrt{a}^2=a$ ומכאן ש- $\sqrt{5}^2=5$ ו- $\sqrt{2}^2=2$.

בנוסף, לפי חוקי החזקות $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ומכאן ש- $2\sqrt{2}\sqrt{5}=2\sqrt{10}$.

נציב זאת בביטוי $\sqrt{5}^2-2\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}^2$ ונקבל: $5-2\sqrt{10}+2=7-2\sqrt{10}$.

נחזור אל הביטוי המקורי ונציב בו את הפישוט שמצאנו $\sqrt{40}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{40}+7-2\sqrt{10}$.

ממבט לתשובות, ניתן להבחין כי ייתכן שהאיברים בשורשים, $\sqrt{40}$ ו- $2\sqrt{10}$, מצטמצמים.

לפי חוקי החזקות $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, ומכאן ש- $\sqrt{40}=\sqrt{4}\sqrt{10}=2\sqrt{10}$.

נחזור להציב זאת בביטוי המקורי ונקבל: $\sqrt{40}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{40}+7-2\sqrt{10}=2\sqrt{10}+7-2\sqrt{10}=7$.

התשובה הנכונה היא (1).

**שאלה לדוגמה – פיתוח נוסחה**

$\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)=?$

**(1)** $14$ **(2)** $8$ **(3)** $3\sqrt{11}$ **(4)** $\sqrt{33}$

**פתרון:**

קשה לחבר את הערכים המספריים שבתוך הסוגריים ללא מחשבון.

למעשה מדובר בנוסחת הכפל המקוצר $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, כאשר בתרגיל שלפנינו $a=\sqrt{11}$ ו- $b=\sqrt{3}$

לכן, ניתן לפשט את הביטוי באופן הבא: $\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{11}^2-\sqrt{3}^2$.

לפי חוקי החזקות, השורש הריבועי והחזקה הריבועית מבטלים זה את זו, ומכאן שערך הביטוי הוא: $11-3=8$

התשובה הנכונה היא (2).

**נוסחה ב"כיוון ההפוך" – כינוס איברים לתוך סוגריים**

בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר ניתן לפתוח סוגריים או לכנס ביטויים לתוך סוגריים.
כלומר, באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ניתן לפתוח סוגריים בהתאם לנוסחה המתאימה.
כעת נראה שניתן להחזיר ביטויים המתאימים למבני הנוסחאות השונות חזרה לסוגריים.

**שאלה נוספת – כינוס איברים**

נתון: $\sqrt{a^2+16a+64}<10$

a **בהכרח שונה** מ-

(1) $1$ (2) $2$ (3) $-3$ (4) $0$

**פתרון:**

ניתן להבחין כי באגף שמאל ישנו פיתוח של נוסחת הכפל המקוצר $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, כאשר $b=8$.

לכן, ניתן לכתוב את אי-השוויון בתור $\sqrt{(a+8)^2}<10$.

השורש והחזקה הריבועית מבטלים זה את זו, ומתקבל אי-השוויון $a+8<10$. נבודד את הנעלם a ונמצא כי $a<2$.

לכן, a אינו יכול להיות שווה ל- $2$.

התשובה הנכונה היא (2).

## הרכבת נוסחת כפל מקוצר

ישנן שאלות כפל מקוצר בהן הנוסחאות אינן מופיעות בצורתן המוכרת.
בשאלות אלה יהיה עלינו לבנות את הנוסחה על ידי העלאה בחזקה, חיבור וחיסור איברים, או סידור מחדש של איברי הביטוי.
לרוב שאלות אלה יכילו רמז בצורה של איבר אחד או יותר מאיברי נוסחת כפל מקוצר.
כשנזהה את הרמז, נבין איזו פעולה עלינו לבצע כדי ליצור את נוסחת הכפל המקוצר.

**שאלה לדוגמה – הרכבת נוסחה**

נתון: $a^2+b^2=45$
$a-b=-3$

$a\cdot b=?$

(1) 3 (2) 18 (3) 36 (4) 9

**פתרון:**

הביטוי שאנו מחפשים $(a\cdot b)$ אינו מופיע כאיבר במשוואות ועלינו למצוא את ערכו.

נשים לב, כי אגף שמאל בשתי המשוואות מכיל אברים המוכרים לנו מנוסחת הכפל המקוצר: $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

לפי הנתונים, אנו יודעים כי $a-b=-3$, ובנוסף כי אנו יודעים כי $a^2+b^2=45$.

כעת נציב נתונים אלו בנוסחה ונקבל: $(3)^2=45-2\cdot a\cdot b$.

נוסיף לשני אגפי המשוואה את הביטוי $2ab-9$ ונקבל: $2\cdot a\cdot b=36$, נחלק את שני האגפים פי 2 ונקבל: $a\cdot b=18$.
התשובה הנכונה היא (2).

**כלל:** העלאה בחזקה ריבועית של ביטוי מסוג $(a-b)$ או $(a+b)$ יוצרת נוסחת כפל מקוצר.

**שאלה נוספת – הרכבת נוסחה**

$203 \cdot 197 - 204 \cdot 196 = ?$

(1) $7$ (2) $25$ (3) $(-1)$ (4) $0$

**<u>פתרון:</u>**

על אף שניתן לפתור שאלה זו גם באמצעות ביצוע פעולות החשבון שבשאלה, דרך זו אינה מומלצת מכיוון שהיא מאוד ארוכה.
ניתן לסדר את המספרים שבשאלה בצורה של נוסחאות הכפל מקוצר,

מכיוון ש- $203 \cdot 197 = (200+3)(200-3)$

ובנוסף, $204 \cdot 196 = (200+4)(200-4)$

מכאן, ניתן להסיק כי הביטוי הנתון שווה ל- $(200+3)(200-3)-(200+4)(200-4)$.

כעת, ניתן לפתוח את הסוגריים שנוצרו לפי נוסחת הכפל המקוצר: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ונקבל: $200^2-3^2-(200^2-4^2)$.

נפתח את הסוגריים בביטוי שקיבלנו: $200^2-9-200^2+16$. נפשט את הביטוי ונקבל: $16-9=7$.

לחלופין, ניתן לפתור את השאלה באמצעות ספרת האחדות בתרגיל הכפל.
מכפלת ספרות האחדות בתרגיל $203 \cdot 197$ היא $3 \cdot 7 = 21$. כלומר, ספרת האחדות במכפלה היא $1$.
מכפלת ספרות האחדות בתרגיל $204 \cdot 196$ היא $4 \cdot 6 = 24$. כלומר, ספרת האחדות במכפלה היא $4$.
בתרגיל המקורי מחסרים את שתי המכפלות: $203 \cdot 197 - 204 \cdot 196$.
בחיסור ספרות האחדות $(1-4)$ יש להתייחס לספרה $1$ כאילו מדובר במספר $11$, ובמצב זה נקבל: $11-4=7$. יש לציין כי ניתן לעשות כן רק כאשר המספר בעל הספרה $1$ בספרת האחדות גדול מהמספר בעל הספרה $4$ בספרת האחדות. במצב זה, ניתן לראות כי התשובה אותה אנו מחפשים צריכה להכיל את הספרה $7$ במיקום ספרת האחדות, ורק תשובה (1) מתאימה.
התשובה הנכונה היא (1).

## <u>סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!</u>