אלגברה

ביטויים

שיעור ביטויים

ביטוי הוא תרגיל חשבוני בין איברים, אשר עושה שימוש בארבע פעולות החשבון הבסיסיות, או בחזקות ושורשים.
ביטוי יכול להכיל מספרים בלבד וכך ערכו יהיה קבוע, או להכיל נעלמים וכך ערכו אינו קבוע אלא תלוי בערכם.

לדוגמה: ערכו של הביטוי: $3+\frac{15}{3}-1$ הינו קבוע ושווה ל- 7 $3+\frac{15}{3}-1=3+5-1=7$

לעומת זאת, הביטוי: $3+\frac{15}{3}-x$ מכיל את הנעלם x.

ערכו של ביטוי זה משתנה בהתאם לערכו של x, ולכן ערכו אינו קבוע.

אם $x=1$, ערכו של הביטוי יהיה: $3+\frac{15}{3}-1=3+5-1=7$

אם $x=2$, ערכו של הביטוי יהיה: $3+\frac{15}{3}-2=3+5-2=6$, וכך הלאה.

תחום הגדרה

לעתים יופיע נתון נוסף שיגדיר את תחום הערכים האפשרי שנעלם בביטוי יכול לקבל.

לדוגמה: תחום ההגדרה של הביטוי: $3+\frac{15}{3-x}-x$ הוא: $x\neq 3$

זאת מכיוון שאם $x=3$, אז המכנה של השבר יהיה שווה ל- $3-3=0$, ובמקרה כזה השבר אינו מוגדר.

פעולות המשנות את ערכו של ביטוי ולכן יש להימנע מהן:

1. **חיבור או חיסור אברים משנים את ערכו של ביטוי:**

לדוגמה: אם נוסיף לביטוי $5+\frac{1}{2}$ עוד $\frac{1}{2}$, נקבל ביטוי השווה בערכו ל- 6 $5+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=6$

2. **העלאת אברים בחזקה או הוצאת שורשים משנה את ערכו של ביטוי:**

לדוגמה: אם נעלה בריבוע את הביטוי $1+\frac{1}{2}$, נקבל ביטוי השווה בערכו ל- $\frac{9}{4}$ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

פעולות שאינן משנות את ערכו של ביטוי ולכן ניתן לפשט בעזרתן את הביטוי:

כל שאלות הביטויים ניתנות לפתרון באמצעות פישוט, בין אם מדובר בפתיחת סוגריים או בכינוס אברים אל תוך סוגריים, וזאת כל עוד שומר הביטוי על ערכו ורק משנה את צורתו.
התשובות בשאלות ינחו אותנו לכלים שעלינו להפעיל כדי לפשט את הביטויים.

1. **ביצוע פעולות החשבון, החזקות והשורשים הנתונים בביטוי**

2. **יצירת מכנה משותף עבור אברים שונים בביטוי**

3. **הפרדת שבר אחד לשני שברים** - לעתים נתקשה להוציא גורם משותף מהמונה לצורך צמצום. במצב זה, פירוק השבר לשני שברים יאפשר לנו לצמצם כל שבר בנפרד. כאשר יש במונה השבר פעולת חיבור או חיסור (ורק אז) נוכל לכתוב את השבר כשני שברים נפרדים שביניהם פעולת החיבור או החיסור.

   לדוגמה: בביטוי $\frac{3+x}{3}$ מופיעה פעולת חיבור במונה. אם נפריד את השבר לשני שברים, נקבל: $\frac{x}{3}+\frac{3}{3}$.

   נצמצם את אחד מהשברים ונקבל: $\frac{x}{3}+1$.

   שימו לב! לא ניתן להפריד באותה הדרך תרגיל חיבור או חיסור של שני איברים הנמצאים במכנה לשני שברים נפרדים.

   לדוגמה: הביטוי $\frac{3}{3+x}$ **שונה** מהביטוי $\frac{3}{x}+\frac{3}{3}$.

4. **צמצום והרחבת שברים**
   הערה: ניתן לקרוא בהרחבה על נושא השברים (פירוק, צמצום והרחבה) בשיעור שברים פשוטים בספר "יסודות מתמטיים".

שאלה לדוגמה – פישוט ביטוי

$$\frac{16a+7b}{56}=?$$

(1) $\frac{2a+b}{7}$ (2) $\frac{2a}{7}+\frac{b}{8}$ (3) $\frac{4a+b}{19}$ (4) $\frac{a}{7}+\frac{2b}{8}$

פתרון: ממבט על התשובות ניתן לראות כי ייתכן שעלינו לפצל את השבר שקיבלנו לשני שברים, לפני פעולת הצמצום.
בנוסף, ניתן לראות כי אין גורם משותף בין איברי המונה.

לכן, נפרק את השבר לשניים ונקבל את הביטוי החדש $\frac{16a}{56}+\frac{7b}{56}$. כעת, נוכל לצמצם את שני חלקי הביטוי.

את השבר השמאלי נצמצם ב- 8 ואת הימני נצמצם ב- 7 ונקבל $\frac{2a}{7}+\frac{b}{8}$.

התשובה הנכונה היא (2).

דגש: בשאלות ביטויים, תשובות אשר כוללות שברים יכולות לרמוז שיש לפרק את השבר למספר שברים קטנים יותר.

5. **שינוי סדר האיברים בחיבור וחיסור** - מכיוון שבחיבור, חיסור וכפל אין משמעות לסדר האיברים, נוכל לשנות את סדר האיברים בביטויים לצורך צמצום שברים. חשוב להקפיד לשמור על סימני האיברים: מספר שלילי יישאר עם סימן מינוס ומספר חיובי עם סימן פלוס. **לדוגמה:** הביטוי $x-2$ זהה לביטוי $-2+x$, ומכאן $1=\frac{x-2}{x-2}=\frac{-2+x}{x-2}$.

6. **הוצאת גורם משותף מחוץ לסוגריים**

7. **היפוך סימנים בביטוי** - נוציא גורם משותף (-1) כדי להפוך את סימני האיברים בביטוי.

שאלה לדוגמה – גורם משותף

$$(x+1)(x-2)-x(x-2)=?$$

(1) $x-2$ (2) $x+2$ (3) x^2+x (4) $2x-2$

פתרון: בשאלה זו, הגורם המשותף אינו מספר, אלא ביטוי, אשר מתנהג ככל גורם משותף אחר.
מהוצאת הגורם המשותף $(x-2)$ משני איברי הביטוי, מתקבל הביטוי $(x-2)\cdot[(x+1)-x]$.
כעת, נוכל לכנס את האיברים שנמצאים בתוך הסוגריים ולהציג את הביטוי כך: $(x-2)\cdot(1)$.
כלומר, הביטוי כולו שווה ל- $x-2$.
התשובה הנכונה היא (1).

שאלה נוספת – גורם משותף

$$\left(\frac{3}{2^9+2^{10}}\right)^{(-1)}=?$$

(1) 2^9 (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ (4) $-\frac{3}{2^{19}}$

פתרון: ראשית, נפעיל את חוק החזקות הנוגע לחזקה שלילית ונקבל את הביטוי: $\frac{2^9+2^{10}}{3}$
כיוון שיש חיבור בין איברי המונה, נוציא גורם משותף וכך נוכל לצמצם את השבר.
הגורם המשותף במונה הוא 2^9, כיוון ש- 2^{10}, לפי חוקי החזקות, הוא למעשה: $(2^9\cdot 2)$.
מהוצאת הגורם המשותף מחוץ לסוגריים מתקבל הביטוי $\frac{2^9\cdot(1+2)}{3}$. כלומר, הביטוי שווה ל- $\frac{2^9\cdot 3}{3}$.
נחלק ב- 3 את המונה והמכנה, ונקבל את הביטוי המצומצם 2^9.
התשובה הנכונה היא (1).

הצבת מספרים בביטוי

לעיתים כל שנידרש לעשות בשאלת ביטוי ספציפית יהיה להשוות בין הביטוי הנתון בשאלה, והביטויים הנתונים בתשובות.
ביטויים זהים נותנים אותה תוצאה מספרית עבור המספרים שמציבים בנעלמים, כמו x או y.

לכן, נוכל להציב בביטוי מספרים פשוטים במקום הנעלמים שבו, ונשווה את הערך המתקבל בביטוי, לערכם של הביטויים בתשובות, תוך הצבתם של אותם ערכים בהם.
אם יש רק תשובה אחת שנתנה תוצאה זהה, זו התשובה הנכונה. אם יש יותר מאחת, יש להציב מספר אחר בנעלמים ולבדוק שנית.

לדוגמה: הביטוי $\frac{3x+3}{6}$ זהה לביטוי $\frac{x+1}{2}$. עבור כל מספר שנציב ב- x המופיע בביטויים, נקבל תוצאה זהה.

כלל: בשאלות ביטויים ניתן להציב ערכים בנעלמים כדי למצוא את התשובה הנכונה. אם שתי תשובות מובילות לערך זהה עבור אותה הצבה, יש להציב שנית ערך אחר.

שאלה לדוגמה – הצבת מספרים

$$\frac{2\cdot(x+3)}{3x}=?\quad,\quad x\neq 0$$

(1) $\frac{2(4x+12)}{6x}$ (2) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(6x+3)}{9x}$ (3) $\frac{2\cdot(2x+6)}{6x}$ (4) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{(x+3)}$

פתרון: נוכל לפשט כל אחת מהתשובות: לצמצם או להרחיב, להוציא מחוץ לסוגריים גורם משותף או לפתוח סוגריים ולנסות לראות אם מגיעים מהתשובה הנתונה לביטוי הנתון בשאלה. פעולה זו עלולה לגזול מאתנו זמן רב, שכידוע, הוא מצרך יקר בבחינה הפסיכומטרית.

לכן, נשתמש בשיטת ההצבה. נציב $x=1$ ונקבל בביטוי הנתון בשאלה: $\frac{2\cdot(x+3)}{3x}=\frac{2\cdot(1+3)}{3\cdot1}=\frac{2\cdot4}{3}=\frac{8}{3}$

כעת, נציב $x=1$ בכל אחת מן התשובות ונבדוק איזה מהביטויים בתשובות שווה בערכו ל- $\frac{8}{3}$.

תשובה (1): לאחר הצבה נקבל $\frac{2(4x+12)}{6x}=\frac{2(4\cdot1+12)}{6\cdot1}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$. ערכה של התשובה שונה מ- $\frac{8}{3}$, לכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): לאחר הצבה נקבל $\frac{2}{3}\cdot\frac{(6x+3)}{9x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(6\cdot1+3)}{9\cdot1}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$. ערכה של התשובה שונה מ- $\frac{8}{3}$, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): לאחר הצבה נקבל $\frac{2\cdot(2x+6)}{6x}=\frac{2\cdot(2\cdot1+6)}{6\cdot1}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$. זו התשובה הנכונה.

נמשיך לבדוק את תשובה (4) כדי לוודא שאינה מתאימה.

תשובה (4): לאחר הצבה נקבל $\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{(x+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot1}{(1+3)}=\frac{3}{8}$. ערכה של התשובה שונה מ- $\frac{8}{3}$, ולכן התשובה נפסלת.

התשובה הנכונה היא (3).

שאלה לדוגמה – הצבת מספרים

$$\frac{12a-3b}{2b-8a}=?$$

(1) 8 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) 5 (4) $4\frac{1}{2}$

פתרון: כיוון שכל התשובות הנתונות הן מספריות, ערכו של הביטוי הוא למעשה **מספר קבוע**, ללא תלות במספרים שנבחר להציב בביטוי. נציב בנעלמי השאלה ערכים מספריים כדי למצוא את הערך המספרי של הביטוי.

דרך א׳: נציב בביטוי: $a=1$ ו- $b=2$, ונמצא כי הביטוי הנתון שווה ל- $\frac{12\cdot1-3\cdot2}{2\cdot2-8\cdot1}=\frac{12-6}{4-8}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$.

דרך ב׳: נפשט את הביטוי ונראה כי הוא שווה למספר קבוע.

נוציא את המספר 3 כגורם משותף במונה השבר ונקבל שהמונה שווה ל- $3\cdot(4a-b)$

נוציא את המספר 2 כגורם משותף במכנה השבר ונקבל שהמכנה שווה ל- $2\cdot(b-4a)$

מכאן ניתן להסיק כי הביטוי הנתון שווה ל- $\frac{3\cdot(4a-b)}{2\cdot(b-4a)}$

הביטוי $(4a-b)$ שווה לביטוי $[-(b-4a)]$. במילים אחרות, ניתן להוציא גורם משותף (-1) מהביטוי $(4a-b)$ ולקבל את הביטוי $(b-4a)$.

לאחר הוצאת הגורם המשותף (-1) מהמכנה נקבל: $\frac{3\cdot(-1)\cdot(b-4a)}{2\cdot(b-4a)}$

נצמצם את המונה והמכנה ב-$(b-4a)$ ונמצא שהביטוי הנתון שווה ל- $\left(-\frac{3}{2}\right)$, בדיוק כפי שמצאנו לפי הצבת מספרים.

התשובה הנכונה היא (2).

בניית ביטוי

בשאלות מסוימות יהיה עלינו לכתוב ביטוי, תרגיל חשבוני, המתאר את הנתונים המילוליים המופיעים בשאלה.
חשוב לשים לב למילות עזר בעת כתיבת הביטוי, ובעיקר ל:

מילה או ביטוי	משמעות חשבונית
ועוד, הוסיפו, יותר, גדל ב-, עלה, סכום	$+$ (חיבור)
פחות, מינוס, הורידו, הפחיתו, קטן, הפרש	$-$ (חיסור)
פי, כפול, מהווה, מכפלת, מ-	$\times$ (כפל)
לחלק ל-, מתוך, חלקי, מחצית, שליש, רבע	$\div$ (חילוק)

שאלה לדוגמה – בניית ביטוי

למשה 3 קלפים, למאיה a קלפים ולעידן $\frac{b}{a}$ קלפים ($a \neq 0$).

הוחלט לחלק את סכום הקלפים של שלושתם בין $(a+3)$ ילדים באופן שווה.

כמה קלפים קיבל כל ילד?

(1) $b+a(a+3)$ (2) $a-3b$ (3) $1+\frac{b}{a(a+3)}$ (4) $(a+3)^2$

פתרון: סכום הקלפים של משה, מאיה ועידן הוא $3+a+\frac{b}{a}$.

אם נחלק את סכום הקלפים בין $a+3$ ילדים באופן שווה, כל ילד יקבל $\frac{3+a+\frac{b}{a}}{a+3}$ קלפים.

למדנו כי ניתן לפרק כל פעולת חיבור בשבר לשני שברים, ומכאן שהביטוי $\frac{3+a+\frac{b}{a}}{a+3}$ שווה לביטוי- $\frac{3+a}{a+3}+\frac{\frac{b}{a}}{a+3}$.

נחלק את המונה והמכנה של האיבר השמאלי בביטוי $a+3$ ונקבל: $\frac{3+a}{a+3}=\frac{a+3}{a+3}=1$.

האיבר הימני בביטוי ניתן לפישוט על ידי כפל בהופכי: $\frac{\frac{b}{a}}{a+3}=\frac{b}{a\cdot(a+3)}$.

כלומר, $\frac{3+a}{a+3}+\frac{\frac{b}{a}}{a+3}=1+\frac{b}{a(a+3)}$.

התשובה הנכונה היא (3).

סוף שיעור – בהצלחה בתרגול!